

NURBS 曲线相关积分量的计算方法

王国瑾

(浙江大学应用数学系 杭州 310027)

摘要 本文给出了求 2 次和 3 次非均匀有理 B 样条 (NURBS) 曲线的相关积分量, 例如它所包围区域的面积、旋转体体积、面积矩、形心等的算法. 对于 2 次曲线, 本文推导了一系列精确的积分公式, 由此, 所有积分量可用曲线的控制顶点坐标和权因子一步代入直接求得而没有逼近误差; 对于 3 次曲线, 本文展示了一种近似算法, 与通常的数值积分法相比, 它具有误差界估计简单, 高精度下收敛速度快等优点.

关键词 计算机辅助几何设计, 非均匀有理 B 样条, 积分, 面积, 旋转体体积, 面积矩.

非均匀有理 B 样条 (NURBS) 表示技术, 在产品数据转换、几何造型和几何设计中, 现已成为一种国际标准; 在计算机辅助几何设计的 10 大前沿研究课题中, 也已名列前茅.^[1] 国际图形学界对其价值和重要性业已达成共识. NURBS 的许多算法与多项式样条并无本质差别, 但是其有理表示的特殊形式, 却在微分和积分中带来了极大的麻烦. 国内外图形学者对其求导算法开展了一系列研究工作^[2~5], 而关于求积算法的研究报道却寥若晨星.

在计算机辅助几何造型及图形设计 NURBS 系统中, 人们迫切希望对于产品或立体横截面求其面积、旋转体体积、面积矩和形心等, 而这个横截面是由 NURBS 曲线所围成的. 这是一个非常现实的课题. 对于 NURBS 曲线的特例—有理 Bézier 曲线的相关积分, 文献^[6] 已给出了一种逼近算法, 优于辛普森 (Simpson) 的类数值积分法. 人们自然会问: (1) 对于低次 (例如 2 次) 有理 Bézier 曲线和 NURBS 曲线的积分, 能否不通过近似计算得到一步到位的精确解? 即根据曲线本身的几何信息直接代入某种公式得到积分值? (2) 对于高次 NURBS 曲线, 是否存在类似于有理 Bézier 曲线那样的积分逼近近似解, 优于普通的数值积分法?

对于问题 (1), 就 2 次曲线而言, 必须计算高达 8 次的有理分式积分, 纵然具有娴熟的积分技巧, 也会望而生畏. 本研究采用曲线二步转化和积分模型简化的方法, 首先把有关积分归结为权因子为 $\{1, \omega, 1\}$ 的有理 2 次 Bézier 曲线的积分, 使积分项数和积分参数大为减少; 其次, 分解基本积分元并用分离系数法展开部分分式, 终于得到一系列精确的积分公式. 由于曲线模型不外乎圆锥曲线和自由曲线这 2 大类, 前者常用 2 次 NURBS 表示, 后者常用多

* 本文研究得到国家自然科学基金和曹光彪科学研究基金资助. 作者王国瑾, 1944 年生, 副教授, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学, 几何造型和应用逼近论.

本文通讯联系人: 王国瑾, 杭州 310027, 浙江大学应用数学系

本文 1996-03-04 收到修改稿

项式 B 样条表示, 所以问题(1)的突破从某种程度上来说, 基本上解决了 CAGD 中的曲线精确求积问题. 对于问题(2), 本文以 3 次 NURBS 曲线为例展示了一种近似算法, 其基本思想是先用 Boehm^[7] 算法把其转化为 3 次有理 Bézier 曲线, 再用 Hybrid 算法和离散算法把后者的相关积分化为多项式积分的和, 而逼近精度预先得到控制. 这种算法比普通的数值积分法在误差界估计上要简单得多, 而在高精度下收敛得快.

1 2 次 NURBS 曲线积分量的计算

1.1 2 次 NURBS 曲线的转化和积分模型的简化

2 次 NURBS 曲线求积问题的提法如下: 已知一条 2 次 NURBS 曲线

$$\mathbf{r}(u) = \sum_{j=n-2}^n N_j^2(u) h_j \mathbf{r}_j / \sum_{j=n-2}^n N_j^2(u) h_j \quad (u_n \leq u \leq u_{n+1}, h_j > 0),$$

设 AB 为 $\mathbf{r}(u)$ 所在平面上与 $\mathbf{r}(u)$ 不相交的一条直线, 直线 $A\mathbf{r}(u_n), A\mathbf{r}(u_{n+1})$ 与曲线 $\mathbf{r}(u)$ 围成区域 G , 由 $\mathbf{r}(u_n)$ 和 $\mathbf{r}(u_{n+1})$ 向直线 AB 作垂线, 与 $\mathbf{r}(u), AB$ 围成区域 D (见图 1、2).

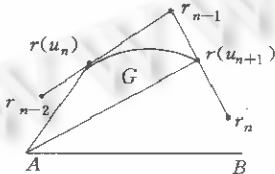


图1

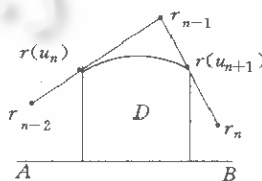


图2

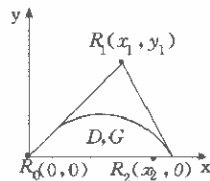


图3

问题 a. 求区域 G 的面积 $S(G)$, 区域 D 的面积 $S(D)$.

问题 b. 求区域 D 关于某坐标轴 x 和 y 的面积矩 $I_x(D), I_y(D)$.

问题 c. 求区域 D 绕某坐标轴 x 和 y 旋转所产生的旋转体体积 $V_x(D), V_y(D)$.

为了简化计算, 首先按文献[8]中的方法把 $\mathbf{r}(u)$ 转化为 2 次有理 Bézier 曲线

$$\mathbf{R}^*(v) = \sum_{j=0}^2 B_j^2(v) \omega_j^* \mathbf{R}_j / \sum_{j=0}^2 B_j^2(v) \omega_j^* \quad (0 \leq v \leq 1, \omega_j^* > 0),$$

再作分式线性变换

$$v = \frac{t}{\left[1 - \sqrt{\frac{\omega_2^*}{\omega_0^*}}\right]t + \sqrt{\frac{\omega_2^*}{\omega_0^*}}}$$

于曲线 $\mathbf{R}^*(v)$, 则此曲线进一步转化为控制顶点相同的另一条 2 次有理 Bézier 曲线

$$\mathbf{R}(t) = (X(t), Y(t)) = \left(\frac{x(t)}{\omega(t)}, \frac{y(t)}{\omega(t)} \right) = \sum_{j=0}^2 B_j^2(t) \omega_j \mathbf{R}_j / \sum_{j=0}^2 B_j^2(t) \omega_j,$$

而其权因子 $(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = (1, \omega, 1) = \left[1, \frac{\omega_1^*}{\sqrt{\omega_0^* \omega_2^*}}, 1 \right]$.

由于 $\frac{\omega_1^2}{\omega_0 \omega_2} = \frac{\omega_1^{*2}}{\omega_0^* \omega_2^*}$, 曲线 $\mathbf{R}^*(v)$ 和 $\mathbf{R}(t)$ 形状完全相同.^[9] 至此, 曲线 $\mathbf{r}(u)$ 的求积就转化为曲线 $\mathbf{R}(t)$ 的求积.

为了进一步简化计算, 不妨假设直线 AB 与直线 $\mathbf{r}(u_n)\mathbf{r}(u_{n+1})$ 相重合, 再取 AB 为坐标系的 x 轴, A 为原点, 这样就有 $\mathbf{R}_0 = (0, 0), \mathbf{R}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{R}_2 = (x_2, 0)$, (见图 3).

$$\omega(t) = \begin{cases} 2(1-\omega)(t^2-t+a) = 2(1-\omega) \left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b}\right)^2 \right] & (0 < \omega < 1) \\ 1 & (\omega = 1) \\ 2(1-\omega)(t-c)(t-d) & (\omega > 1), \end{cases}$$

其中 $a = \frac{1}{2(1-\omega)}, b = \sqrt{\frac{1-\omega}{1+\omega}}, c = \frac{1+e}{2}, d = \frac{1-e}{2}, e = \sqrt{\frac{\omega+1}{\omega-1}}$.

1.2 2 次有理 Bézier 曲线积分量的精确计算

在图 3 的坐标系下, 首先按向量楔积运算得到

$$\begin{aligned} S(G) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \| \mathbf{R}(t) \times \mathbf{R}'(t) \| dt = \frac{1}{2} \int_0^1 |X(t)Y'(t) - X'(t)Y(t)| dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{|x(t)y'(t) - x'(t)y(t)|}{\omega^2(t)} dt = \omega x_2 y_1 \int_0^1 \frac{t^2}{\omega^2(t)} dt. \end{aligned}$$

其次有 $S(D) = \int_0^{x_2} Y dX = \int_0^1 Y(t)X'(t) dt$

$$= 4\omega y_1 \int_0^1 \frac{(1-\omega)x_2 t^4 + [2\omega x_1 + (\omega-2)x_2]t^3 + (x_2 - 3\omega x_1)t^2 + \omega x_1 t}{\omega^3(t)} dt,$$

$$I_x(D) = \int_0^{x_2} \frac{1}{2} Y^2 dX = \frac{\omega^2 y_1^2}{4(1-\omega)^4} \int_0^1 F(I_x, t) f^4(t) dt \quad (\omega \neq 1),$$

$$I_y(D) = \int_0^{x_2} XY dX = \frac{\omega y_1}{4(1-\omega)^4} \int_0^1 F(I_y, t) f^4(t) dt \quad (\omega \neq 1).$$

式中 $F(I_x, t) = (\omega-1)x_2 t^6 + [(3-2\omega)x_2 - 2\omega x_1]t^5 + [5\omega x_1 + (\omega-3)x_2]t^4$
 $+ (x_2 - 4\omega x_1)t^3 + \omega x_1 t^2,$

$$F(I_y, t) = [(1-\omega)x_2^2 + 2\omega(\omega-1)x_1 x_2]t^6 + [(\omega-2)x_2^2 - 4\omega(\omega-2)x_1 x_2 - 4\omega^2 x_1^2]t^5$$

$$+ [10\omega^2 x_1^2 + \omega(2\omega-9)x_1 x_2 + x_2^2]t^4 + (3\omega x_1 x_2 - 8\omega^2 x_1^2)t^3 + 2\omega^2 x_1^2 t^2,$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2 - t + a} = \frac{1}{(t-c)(t-d)}.$$

注意到 $S(D) = S(G)$ 且

$$V_x(D) = \int_0^{x_2} \pi Y^2 dX = 2\pi I_x(D), \quad V_y(D) = \int_0^{x_2} 2\pi XY dX = 2\pi I_y(D),$$

因此我们无需计算 $S(D), V_x(D), V_y(D)$. 下面, 先令 $0 < \omega < 1$, 假设

$$A_{ij} = \int_0^1 t^i f^j(t) dt \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots).$$

由有理函数积分可算出积分基本元

$$\begin{cases} A_{01} = 2A_{11} = 4btg^{-1}b \\ A_{02} = 2A_{12} = 8b^3tg^{-1}b + \frac{4(1-\omega)^2}{1+\omega} \\ A_{03} = 2A_{13} = 24b^5tg^{-1}b + \frac{4(\omega+4)(1-\omega)^3}{(1+\omega)^2} \\ A_{04} = 2A_{14} = 80b^7tg^{-1}b + \frac{8(2\omega^2+9\omega+22)(1-\omega)^4}{3(1+\omega)^3} \end{cases}$$

进一步可以算出 $A_{22} = A_{01} + A_{12} - aA_{02}, A_{i+2,3} = A_{i2} + A_{i+1,3} - aA_{i,3}, (i=0, 1, 2), A_{i+2,4} = A_{i3} + A_{i+1,4} - aA_{i,4}, (i=0, 1, 2, 3, 4)$. 因而由以上递推公式最终求得

$$I_x(D, 0 < \omega < 1) = \frac{\omega^2 x_2 y_1^2}{(1-\omega^2)^2} \left\{ \frac{-\omega}{\sqrt{1-\omega^2}} tg^{-1} \sqrt{\frac{1-\omega}{1+\omega} + \frac{2+\omega^2}{6}} \right\},$$

$$I_y(D, 0 < \omega < 1) = \frac{\omega x_2 y_1}{2(1-\omega^2)^2} \left\{ \frac{x_2 - 2\omega^2 x_1}{\sqrt{1-\omega^2}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{1-\omega}{1+\omega}} + \frac{\omega[2(2+\omega^2)x_1 - (5-2\omega^2)x_2]}{6} \right\}.$$

再令 $\omega > 1$, 假设

$$F(I_x, t) f^4(t) = \sum_{i=1}^4 \frac{l_i}{(t-c)^i} + \sum_{i=1}^4 \frac{s_i}{(t-d)^i}. \quad (*)$$

其中 $l_i, s_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是待定常数. 在 (*) 两端同乘以 $(t-c)^4$, 再置 $t=c$ 或 d 可求出

$$(l_4, s_4) = \frac{x_2}{8(\omega+1)} \pm \frac{\omega(x_2 - 2x_1)}{8(\omega+1)^2} \sqrt{\frac{\omega+1}{\omega-1}}.$$

在 (*) 两端同乘以 $(t-c)^4(t-d)^4$, 再对 t 求导后, 置 $t=c$ 或 d , 利用上式, 可求出

$$(l_3, s_3) = \frac{\omega(2\omega+1)(x_2 - 2x_1)}{4(\omega+1)^2} \pm \frac{(2\omega+1)x_2}{4(\omega+1)} \sqrt{\frac{\omega-1}{\omega+1}}.$$

为了求 l_1, l_2, s_1, s_2 , 可对 (*) 通分并比较 $t^i (i=7, 6, 5, 4)$ 之系数, 按线性方程组算出

$$l_1 = -s_1 = \frac{\omega(\omega-1)x_2}{(\omega+1)^2} \sqrt{\frac{\omega-1}{\omega+1}},$$

$$(l_2, s_2) = \frac{(\omega^3-1)x_2}{2(\omega+1)^2} \pm \frac{\omega(2\omega^2+2\omega+1)(x_2 - 2x_1)}{4(\omega+1)^2} \sqrt{\frac{\omega-1}{\omega+1}},$$

因而最终得到

$$I_x(D, \omega > 1) = \frac{\omega^2 x_2 y_1^2}{2(\omega^2-1)^2} \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-1}} \ln(\omega - \sqrt{\omega^2-1}) + \frac{\omega^2+2}{3} \right\}.$$

类似地我们有

$$I_y(D, \omega > 1) = \frac{\omega x_2 y_1}{4(\omega^2-1)^2} \left\{ \frac{x_2 - 2\omega^2 x_1}{\sqrt{\omega^2-1}} \ln(\omega + \sqrt{\omega^2-1}) + \frac{\omega[2(\omega^2+2)x_1 - (2\omega^2-5)x_2]}{3} \right\}.$$

至于 $\omega=1$ 的情形容易算出 $I_x(D, \omega=1) = \frac{1}{15} x_2 y_1^2, I_y(D, \omega=1) = \frac{x_2 y_1}{15} (x_1 + 2x_2)$.

最后来考察 $S(G)$, 容易得到

$$S(G, 0 < \omega < 1) = \frac{\omega x_2 y_1}{1-\omega^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{1-\omega}{1+\omega}} - \frac{\omega}{2} \right\},$$

$$S(G, \omega > 1) = \frac{\omega x_2 y_1}{2(\omega^2-1)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\omega^2-1}} \ln(\omega - \sqrt{\omega^2-1}) + \omega \right\},$$

$$S(G, \omega=1) = \frac{1}{3} x_2 y_1 = \frac{2}{3} S(\Delta R_0 R_1 R_2).$$

2 3 次 NURBS 曲线积分量的计算

设有一条 3 次 NURBS 曲线

$$\mathbf{r}(u) = \sum_{j=n-3}^n N_j^3(u) h_j \mathbf{r}_j / \sum_{j=n-3}^n N_j^3(u) h_j \quad (u_n \leq u \leq u_{n+1}, h_j > 0),$$

按插入节点法^[7], 用文献[10]中的公式先把 $\mathbf{r}(u)$ 转化成 3 次有理 Bézier 曲线

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{j=0}^3 B_j^3(t) \omega_j \mathbf{R}_j / \sum_{j=0}^3 B_j^3(t) \omega_j \quad (0 \leq t \leq 1).$$

为了计算 3 次有理 Bézier 曲线 $R(t)$ 的相关积分, 我们可用文献[6]中方法实行多项式 Bézier 曲线的积分逼近. 具体作法是: 首先估计 3 次有理 Bézier 曲线用 m 次(常取 $m=6, 8, \dots$)多项式 Bézier 逼近曲线取代时 2 个相应积分的误差 B , 若 B 小于公差(Tolerance), 则输出积分逼近值, 否则对已知的曲线 $R(t)$ 离散, 再分段实行积分逼近. 这种算法对任意高次的 NURBS 曲线求积皆为适用, 而且比传统的数值积分法(例如辛普森法和梯形法)好得多. 理由是: ① 辛普森方法估计积分误差, 必须求被积函数 $X'Y(t)$ 或 $X'Y^2(t)$ 的 4 阶导函数的界, 这个导函数是高达 $48r$ 次或 $64r$ 次的有理函数, 这里 r 是 NURBS 曲线次数. 在 3 次场合, 显然要计算并估计 144 次或 192 次有理函数并非易事. 但用多项式曲线逼近时, 积分误差可简单地算出. ② 试验表明, 用多项式曲线求积逼近有理多项式曲线求积, 在高精度要求下具有较快的收敛速度.

参考文献

- 1 Nielson G M. CAGD's top ten; what to watch. IEEE CG & A, 1993, 13(1): 35~37.
- 2 Sederberg T W, Wang Xuguang. Rational hodographs. CAGD, 1987, 4(4): 333~335.
- 3 Floater M S. Derivatives of rational Bézier curves. CAGD, 1992, 9(3): 161~174.
- 4 Wang Guozhao, Wang Guojin. Higher order derivatives of a rational Bézier curve. CVGIP: GMIP, 1995, 57(3): 246~253.
- 5 Saito T, Wang Guojin, Sederberg T W. Hodographs and normals of rational curves and surfaces. CAGD, 1995, 12(4): 417~430.
- 6 Wang Guojin, Sederberg T W. Computing areas bounded by rational Bézier curves. CADDM, 1994, 4(2): 18~27.
- 7 Boehm W. Inserting new knots into B-spline curves. CAD, 1980, 12(4): 199~201.
- 8 王国瑾. 旋转曲面 CAD 的有理 B 样条方法. 软件学报, 1990, 1(4): 24~39.
- 9 Farin G. Curves and surfaces for computer aided geometric design. 2nd ed., New York: Academic Press, 1990.
- 10 王国瑾. 三次 NURBS 曲线的一个转换公式. 浙江大学学报, 1992, 26(6): 627~636.

COMPUTING INTEGRAL VALUES INVOLVING NURBS CURVES

Wang Guojin

(Department of Applied Mathematics Zhejiang University Hangzhou 310027)

Abstract This paper presents an algorithm for computing quantities involving integration of NURBS curves, such as areas, volumes of revolution, first moments of area, centroids etc., of regions bounded by plane NURBS curves. For quadratic NURBS curves, closed form integral solutions are derived, thus all integral values can be directly obtained by the coordinates of control points and weights without approximation error. For cubic NURBS curves, an approximation method is given, which provides a simple error bound and has a speed advantage for small tolerance.

Key words Computer aided geometric design, NURBS, integration, area, volume of revolution, moments of area.