第7卷第6期
1996年6月

软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol.7, No.6
Jun. 1996

悖论逻辑的表演算*

林作铨　　李　未

(汕头大学计算机科学研究所　汕头　515063)

摘要　悖论逻辑LP是一个超协调逻辑,发展超协调逻辑(LP)的目的是使得不会从矛盾推出任一命题,但它有一个主要缺点:就是一些在经典逻辑中有效的推理在LP中不再有效;极小悖论逻辑LP_m能克服这个缺点,使得在没有矛盾的直接影响下超协调逻辑等价于经典逻辑. LP和LP_m原来都只给出语义定义,虽然已有LP的证明论,但如何得到一个LP_m的证明论仍是一个未解问题.本文提出了一种可靠与完全的表演算作为LP与LP_m的证明论.

关键词　表演算,超协调逻辑,悖论逻辑,极小悖论逻辑,极小非协调模型.

Priest提出的悖论逻辑LP(logic of paradox)是一个重要的超协调逻辑(paraconsistent logic,亦译弗协调逻辑或次协调逻辑).[1,2]我们称一个理论为非协调的,如果对某个命题A,它同时包含A与$\neg A$,一个理论称为平凡的,如果它可推出任一命题,超协调逻辑是一种非协调但不平凡的理论.作为一个超协调逻辑,LP能局部化矛盾获得不平凡性,但是,LP必须为此付出一个代价:一些在经典逻辑中有效的推理在LP中是无效的,致使LP不能作出许多有用的结论而显得太弱了. Priest最近提出的极小悖论逻辑LP_m能克服这个缺点[3],LP_m是LP的一个非单调扩充,由于LP_m的模型所包含的矛盾是极小化的,正是在这个意义下,LP_m被认为是非单调的(但LP_m并不适合如一般非单调逻辑所处理的不完全知识的表示与推理.文献[4,5]中提出的限制悖论逻辑可以作为LP的一个重要扩充,它同时具备限制的非单调逻辑能力).这样,LP_m通过在超协调逻辑LP中引入非单调性,能够克服超协调逻辑存在的弱性,这在逻辑上具有相当重要的意义.[6]

原来,LP只是作为超协调逻辑的语义后承提出来的,文献[7]中提出了一种LP的基于归结的推理方法,由此可以给出一种所谓的配对表作为LP的证明论,同样的想法也更早由文献[8,9]提出来作为一度相干蕴涵的证明论[10],文献[3]指出了一种LP的序列演算,文献[11]给出一种LP的公理系统,因此LP已有较好的证明论.类似地,LP_m原来也只是一种语义定义,如Priest指出[3],关于LP_m的证明论是一个困难的未解问题,因此LP_m的证明论作为一个挑战性问题存在.

* 本文研究得到国家自然科学基金、国家863高技术计划与李嘉诚学术基金和国家基础研究攀登计划资助.作者**林作铨**,1963年生,教授,主要研究领域为计算机科学与人工智能的逻辑基础. **李未**,1943年生,教授,博士导师,主要研究领域为计算机科学.

本文通讯联系人:林作铨,汕头515063,汕头大学计算机科学研究所

本文1995-03-28收到修改稿

本文将提出一种表演算(Tableaux)作为 LP_m 的证明论,首先,我们给出一个 LP 的证明论,称为记号(Signed)表演算,它是标准表演算的一种修改[12],虽然 LP 已有证明论,但我们给出的记号表演算具有更接近标准表演算因此更简单的特点,而且由它容易同时考虑超协调逻辑的非单调性质;然后,我们基于 LP 的记号表演算发展一种极小表演算作为 LP_m 的证明论,并且证明了 2 种表演算分别对于 LP 与 LP_m 的语义是可靠与完全的.

在下一节,我们首先给出 LP 与 LP_m 的语义并指出一些问题,在第 2 节与第 3 节中,我们分别给出 LP 与 LP_m 的可靠与完全的表演算系统,最后,我们讨论一些有关的研究问题,在附录中给出对于 LP 与 LP_m 语义的表演算的可靠与完全性定理的证明.

1 LP 与 LP_m 的语义

我们设定 $\mathscr{L}$ 为一个命题语言,$\mathscr{L}$ 中公式定义如常. 下面,首先定义悖论逻辑 LP 的语义. 一个赋值 π 赋予 $\mathscr{L}$ 中每个原子命题 p 如下三值之一:0(假且仅假),1(真且仅真)或 01(既真又假). 我们称一个命题 p 在赋值 π 下为真,若 $\pi(p)=1$ 或 $\pi(p)=01$;一个命题 p 在赋值 π 下为假,若 $\pi(p)=0$ 或 $\pi(p)=01$.

在一个赋值下,真值能被扩展到合式公式如下:

(1)$\neg A$ 为真,当且仅当 A 为假;$\neg A$ 为假,当且仅当 A 为真.

(2)$A\wedge B$ 为真,当且仅当 A 与 B 都为真;$A\wedge B$ 为假,当且仅当 A 或 B 为假.

(3)$A\vee B$ 为真,当且仅当 A 或 B 为真;$A\vee B$ 为假,当且仅当 A 与 B 都为假.

其它联词的定义如同经典逻辑,如 $A\rightarrow B$ 定义为 $\neg A\vee B$. 注意到,若把以上定义中的后一部分条件去掉,就是经典命题逻辑. * 我们记 $\pi(A)=1$,若在 π 下公式 A 为真且仅真,$\pi(A)=0$,若在 π 下公式 A 为假且仅假,$\pi(A)=01$,若在 π 下公式 A 为即真又假. 这样,LP 是一种三值语义,但不同于经典(三值)逻辑;它使得某些命题的赋值既真又假. 下文中,我们称一个赋值为一个公式 A(公式集 S)的模型,若 A(S 中每个成员)在该赋值下为真.

LP 的语义后承类似于经典逻辑定义如下.

定义 1. 令 S 是一个公式集,A 为一个命题. A 是一个 S 的语义后承,记为 $S\models_{LP}A$,当且仅当 A 在所有 S 的模型中都为真.

LP 的逻辑性质容易通过如下典型例子看出.

例 1:令 p 与 q 是 2 个不同的原子命题. 不难看出,$p\wedge\neg p\models_{LP}p$;但 $p\wedge\neg p\not\models_{LP}q$,因为在赋值 π 下使得 $\pi(p)=01$ 与 $\pi(q)=0$,$p\wedge\neg p$ 为真(实际上为既真又假)但 q 不是真.

发展超协调逻辑的目的之一是使得从矛盾不可能推出任何命题,如上例所示,LP 能破坏经典逻辑的平凡性,作为一个超协调逻辑,它确实可以使矛盾局部化,但是,LP 为此付出了一个代价:如果 S 是一个协调的公式集,A 在经典逻辑中可由 S 推出,那么在 LP 中可能从 S 推不出 A. 显然,反证律在 LP 中无效,实际上,也就是假言推理:$A,\neg A\vee B/B$,在 LP 中无效,这只要取一个赋值 π 使得 A 为既真又假而 B 为假且仅假就马上看出,如果把假言

* 根据定义,我们容易给出 LP 的真值表(这里略去),它们其实就是 Kleene 强三值逻辑的真值表,但注意到,LP 和标准三值逻辑(如 Kleene 系统)对真值的定义不同.

推理加进 LP,那么 LP 就脱变成经典逻辑[6],在这个意义上,假言推理是唯一在经典逻辑中有效但在 LP 中无效的规则.发展极小悖论逻辑 LP_m 的目的之一就是为了解决这个问题.

LP 导致假言推理无效的情况是由于某个命题的取值既真又假,为此我们可以考虑非协调(矛盾)情形作为缺省假设,LP_m 扩充 LP 基于这样的直观想法:通常矛盾总是稀少的,我们赋既真又假值(01)予某个命题,仅当这个命题确实是个矛盾.事实上,LP_m 是一种极小非协调逻辑.[13,14]

定义 2. 令 S 是一个公式集,一个 S 的模型 π 是极小非协调的(Minimally Inconsistent),当且仅当不存在 S 的其它模型 π' 使得 $\pi' \prec \pi$,这里偏序关系 $\prec$ 定义如下:令 π 与 π' 是 2 个赋值,$\pi' \prec \pi$ 若对任一原子命题 p,如果 $\pi'(p)=01$ 则 $\pi(p)=01$,并且存在一个原子命题 p 使得 $\pi(p)=01$ 但 $\pi'(p)\neq 01$.

换句话说,$\pi' \prec \pi$ 当且仅当 π 包含比 π' 更多的矛盾,mi 模型就是那些矛盾极小化的模型.

语义上,我们定义 LP_m 的极小后承,记为 $\models_{LP_m}$,如下.

定义 3. 令 S 是一个公式集,A 是一个公式,$S \models_{LP_m} A$ 当且仅当 A 在 S 所有的极小非协调模型(mi 模型)中都为真.

同样地,LP_m 的逻辑性质容易通过如下简单例子看出.

例 2:令 p 与 q 是 2 个不同的原子命题,不难看出,$p, \neg p \vee q \models_{LP_m} q$,因为赋值 π 使得 $\pi(p)=01$ 不是 $\{p, \neg q \vee q\}$ 的 mi 模型(其实赋值 π 使得 $\pi(q)=1$ 与 $\pi(p)=1$ 是它的唯一 mi 模型),但 $\neg p \vee q, p, p \wedge \neg p \not\models_{LP_m} q$,因为赋值 π 使得 $\pi(p)=01$ 与 $\pi(q)=0$,则 π 是 $\{\neg p \vee q, p, p \wedge \neg p\}$ 的 mi 模型,但 $\{\neg p \vee q, p, p \wedge \neg p\}$ 为真(实际上为既真又假)而 q 不为真.

LP_m 具有一些良好的性质,当前提协调时,它能作出所有经典有效的结论[4],这是由于协调前提的 mi 模型实际上就是经典逻辑的模型,即没有赋值 01 给协调前题的任何命题,进一步,即便在一些非协调情况下,LP_m 也使假言推理有效,例如,$p, \neg p \vee q, r \wedge \neg r \models_{LP_m} q$,换句话说,当矛盾没有直接影响时,$LP_m$ 可使所有经典推理有效.另一个有趣的事实是,$\models_{LP_m}$ 具有与 $\models_{LP}$ 一样的超协调性能力(参见附录中定理 3).[3,4]

2 LP 的表演算

从 LP 的语义我们知道,由于允许一个命题既真又假,LP 破坏了经典逻辑的平凡性,即矛盾不会推出任何命题.从证明论角度看,我们可以寻找各种方法来破坏从矛盾推出任一命题的证明从而绕过平凡性问题,最简单而有效的方法也许是使用反证律.根据反证律,对任一命题 B,A 推出 B 当且仅当我们能从 $A \wedge \neg B$ 推出一个矛盾,这样,如果 A 已经是一个矛盾,那么对任何 B 我们肯定能推出矛盾,也就有 A 可推出任一 B.可是,反证律在 LP 中是无效的.我们将在本文中看到,一种使平凡性的证明不成立的办法是限定反证律的使用,直观上,这种限定的反证规则可描述如:A 推出 B 当且仅当我们能从 A 与 $\neg B$ 推出一个矛盾,但使用一些 B 中的相关信息.我们将根据 LP 语义的性质形式地说明如何使用所谓的相关信息.

如所知,反证律是表演算的基础.粗略地说,在 LP 中,超协调性的体现可这样理解:如

果 A 是一个矛盾 $p\wedge\neg p$,那么我们只能推出与矛盾有关方面的命题 p 与(或)$\neg p$,因为我们想使从一个矛盾 A 可推出任何 B 不成立,可以从 B 使用一些相关的信息改变表演算的封闭条件,即检查 B 是否为矛盾的有关方面.由此想法,我们可以使用经典逻辑中标准的表演算规则但修改其封闭准则来排除平凡性问题.这就是我们下面要做的工作.

定义 4. 在 $\mathscr{L}$ 中引入 2 个记号 T 与 F,一个记号公式是形如 TA 或 FA 的公式,其中 $A\in\mathscr{L}$.我们扩充赋值 π 到记号公式如下:对任一公式 A,

(1)$\pi(TA)=1$ 当且仅当 $\pi(A)=1$;$\pi(TA)=01$ 当且仅当 $\pi(A)=01$.

(2)$\pi(FA)=1$ 当且仅当 $\pi(\neg A)=1$;$\pi(FA)=01$ 当且仅当 $\pi(\neg A)=01$.

可见,TA 与 A(FA 与 $\neg A$)具有相同的可满足性.下面,我们给出(记号)表(Tableau)的定义,它与标准逻辑的表定义一致[12],但我们给出更紧致的定义形式.

定义 5. 一个表是一棵其结点为公式集的树,令 ψ 是一个记号公式(集),对 ψ 的记号表根据下面规则归纳地定义如下:

(1)只有 ψ 为唯一结点的表是一个对 ψ 的记号表.

(2)令 T 是一个对 ψ 的记号表,令 b 是 T 的一个分支.

(a)若 $T\neg\neg\alpha$ 是 b 的一个结点,则由 T 通过伸展 b 到 $T\alpha$ 的表也是对 ψ 的记号表;若 $F\neg\neg\alpha$ 是 b 的一个结点,则由 T 通过伸展 b 到 $F\alpha$ 的表也是对 ψ 的记号表;

(b)若 $T(\alpha\wedge\beta)$ 是 b 的一个结点,则由 T 通过伸展 b 到 $T\alpha$ 与 $T\beta$ 的表也是对 ψ 的记号表;若 $F\neg(\alpha\wedge\beta)$ 是 b 的一个结点,则由 T 通过伸展 b 到 $F\neg\alpha$ 与 $F\neg\beta$ 的表也是对 ψ 的记号表.

(c)若 $T\neg(\alpha\wedge\beta)$ 是 b 的一个结点,则由 T 通过增加 $T\neg\alpha$ 与 $T\neg\beta$ 作为 b 的 2 个子结点的表也是对 ψ 的记号表;若 $F(\alpha\wedge\beta)$ 是 b 的一个结点,则由 T 通过增加 $F\alpha$ 与 $F\beta$ 作为 b 的 2 个子结点的表也是 ψ 的记号表.

(d)若 $T(\alpha\vee\beta)$ 是 b 的一个结点,则由 T 通过增加 $T\alpha$ 与 $T\beta$ 作为 b 的 2 个子结点的表也是对 ψ 的记号表;若 $F\neg(\alpha\vee\beta)$ 是 b 的一个结点,则由 T 通过增加 $F\neg\alpha$ 与 $F\neg\beta$ 作为 b 的 2 个子结点的表也是 ψ 的记号表.

(e)若 $T\neg(\alpha\vee\beta)$ 是 b 的一个结点,则由 T 通过伸展 b 到 $T\neg\alpha$ 与 $T\neg\beta$ 的表也是对 ψ 的记号表;若 $F(\alpha\wedge\beta)$ 是 b 的一个结点,则由 T 通过伸展 b 到 $F\alpha$ 与 $F\beta$ 的表也是对 ψ 的记号表.

对其它联词的记号表定义如常.我们称一个公式是标记的,如果至少有一条规则施加其上;否则,就称为未标记的.

定义 6. 一个分支 b 是完全的,当且仅当 b 中未标记的记号公式都是首字(形如 $Tp,T\neg p,Fp,F\neg p$ 的记号公式,其中 p 为原子公式),亦即,能用来伸展 b 的每一条规则都至少施加一次;一个对 ψ 的记号表是完全的,当且仅当 T 的每个分支都是完全的.

为了获得能够捕捉 LP 语义的表演算,我们的基本思想是保持标准表演算规则但改变封闭性条件,这比起重新引入新的适合超协调逻辑的表演算规则要简单而优美.

定义 7. 一个记号表 T 的一个分支 b 被称为封闭,若它满足如下条件之一:

(1)对某一公式 A,$TA\in b$ 且 $FA\in b$;

(2)对某一公式 A,$FA\in b$ 且 $F\neg A\in b$.

一个记号表 T 是封闭的,当且仅当 T 中的每个分支都是封闭的.

与经典逻辑中的标准表演算比较,如果我们增加一个分支包含 TA 与 $T\neg A$ 作为封闭条件之一,那么记号表关于经典逻辑是反证完全的,即对任意记号公式(集)ψ,ψ 为矛盾当且仅当存在一个对于 ψ 的记号表,使得它的每个分支都是封闭的,这样,根据反证法,A 推出 B 当且仅当我们能有一个对于 $\{TA,FB\}$ 的封闭记号表. 注意,我们以上给出一种新的记号表定义,它等价于标准表系统的树结构图。

如上所述,一种获得超协调逻辑的方法是使用限定的反证规则,对 LP 而言,我们仅需弱化经典逻辑中标准表演算的封闭性条件,如定义 7 所示. 下面是对于 LP 语义的记号表演算的可靠与完全性定理.

定理 1. 令 S 是一个公式集,A 为一个公式,$S\models_{LP}A$ 当且仅当对 $\{TS,FA\}$ 的记号表是封闭的.

定理 1 的证明将在附录中给出,基于 LP 的逻辑性质,我们将采用一种比较直接的方法证明定理 1.

我们记 $S\vdash_{LP}A$ 表示对 $\{TS,FA\}$ 的记号表为封闭的.

例 1:(续)令 p,q 如例 1,不难验证,$p\wedge\neg p\vdash_{LP}p$,但 $p\wedge\neg p\nvdash_{LP}q$,因为对 $\{T(p\wedge\neg p),Fp\}$ 的记号表只有一个封闭的分支 $\{Tp,T\neg p,Fq\}$,而对 $\{T(p\wedge\neg p),Fq\}$ 的记号表只有一个非封闭的分支 $\{Tp,T\neg p,Fq\}$.

3　$\mathbf{LP}_m$ 的表演算

如上所述,LP_m 是一种极小后承逻辑,为了用表演算表达 LP_m,证明 A 是 S 的极小后承,我们必须修改记号表的构造使得能消除 S 中的不为极小非协调模型满足的分支. LP_m 能通过在完全记号表上消除可略分支的极小表完全地表达.

令 t 为一个完全记号表的任一分支,我们记 $\Pi(t)=\{Tp\mid p$ 是一个原子命题,$Tp\in t$ 且 $T\neg p\in t\}$.

定义 8. 一个分支 b 是可略的,当且仅当 b 是完全的,且存在另一个分支 b' 使得 $\Pi(b')\subset\Pi(b)$;一个不可略的分支亦称为极小的. 对 ψ 的记号表的极小(记号)表 T_m 是由 T 通过删除 T 的每个可略分支获得的.

我们将看到,极小记号表完全地刻画极小非协调模型,基于此,我们定义 LP_m 的封闭性条件.

定义 9. 一个对 ψ 的记号表是极小封闭的,若 T 的每个不可略分支都是封闭的,即对 ψ 的极小表 T_m 是封闭的.

并行于定理 1,我们有下面对于 LP_m 语义的极小表演算的可靠与完全性定理.

定理 2. 令 S 是公式集,A 为公式,$S\models_{LP_m}A$ 当且仅当对 $\{TS,FA\}$ 的记号表是极小封闭的.

定理 2 的证明也在附录中给出.

我们记 $S\vdash_{LP_m}A$ 表示对 $\{TS,FA\}$ 的记号表是极小封闭的.

例 3:令 p,q,r 是 3 个不同的原子命题,不难验证,$p,\neg p\vee q\vdash_{LP_m}q$,因为对 $\{T(\{p,\neg p$

$\vee q\}),Fq\}$的记号表有2个分支,一个可略的分支 $b_1=\{Tp,T\neg p,Fq\}$ 与一个封闭的分支 $b_2=\{Tp,Tq,Fq\}$;$p,\neg p\vee q,p\wedge\neg p\nvdash_{LP_m}q$,因为对$\{T(\{p,\neg p\vee q,p\wedge\neg p\}),Fq\}$的记号表有2个分支,1个不可略的分支 $b_1=\{Tp,T\neg q,Fq\}$ 不是封闭的,另1个分支 $b_2=\{Tp,Tq,T\neg p,Fq\}$ 是可略的,因为 $T(b_1)\subset T(b_2)$;$p,\neg p\vee q,r\wedge\neg r\vdash_{LP_m}q$,因为对$\{T(\{p,\neg p\vee q,r\wedge\neg r\}),Fq\}$的记号表有2个分支,1个分支 $b_1=\{Tp,T\neg p,Fq,Tr,T\neg r\}$ 是可略的,另1个分支 $b_2=\{Tp,Tq,Fq,Tr,T\neg r\}$ 是封闭的.

4 结 论

综上所述,悖论逻辑LP作为一个超协调逻辑,通过破坏平凡性来形式化非协调推理,但它由于使得一些经典推理无效而显得太弱;极小悖论逻辑 LP_m 由于在超协调逻辑中引入非单调性,能克服超协调逻辑存在的弱性,这在逻辑学上具有非常重要的意义,由于 LP_m 是一个非单调的超协调逻辑,它是一类非单调超协调逻辑的基础,而非单调超协调逻辑是在不完全与非协调知识下推理的形式基础,它在计算机科学与人工智能中具有广泛的应用前景.[5,6]因而,解决 LP_m 的证明论问题具有重要的意义.本文的主要贡献包括2个方面:给出一种LP的表演算,解决了 LP_m 的证明论问题.

令人惊奇的是,本文所给出的LP和 LP_m 的表演算可极大地保留经典逻辑的技术,显得非常直观而简单,这使我们看到,一些非经典逻辑的问题通过对它们的性质的深入理解可在一定程度上采用经典逻辑的技术来解决,特别地,在附录中的定理证明,我们基于LP和 LP_m 的性质使得证明极大地简化了.实际上,大多数超协调逻辑都具有与LP类似的性质,LP_m 的技术可以用到其他超协调逻辑和相干逻辑,特别地,一个基于四值语义的超协调逻辑的记号表容易通过稍微改变封闭条件获得,并可以获得一种它的非单调形式.[6]本文的技术也能作为非单调超协调逻辑的证明论基础,例如,文献[4]提出一种限制悖论逻辑,它同时具有 LP_m 和限制的非单调逻辑能力,是一个非单调超协调逻辑,基于本文技术,我们可给出一个限制悖论逻辑的表演算证明论.[15]

由于我们已有LP与 LP_m 的表演算,就不难给出基于归结(子句)的证明方法,由此给出一种LP与 LP_m 的自动推理系统,例如在一个Prolog环境中实现.*类似地,我们可以得到一种LP与 LP_m 的自然推理系统,在此不作更多的讨论.

本文的一个直接的进一步工作是如何推广本文的结果到一阶逻辑情形,我们不难获得一种一阶LP的记号表演算和它的可靠与完全性定理,令人惊奇的是,虽然大多数一阶非单调逻辑都只有部分完全性定理[16],但一阶 LP_m 的极小表演算的可靠与完全性定理也可能获得.

参考文献

1 Priest G. Logic of paradox. J. of Philosophical Logic, 1979,**8**:219~241.

2 Priest G *et al* (Ed.). Paraconsistent logic: essays in the inconsistency. Philosophia Verlag, 1989.

3 Priest G. Reasoning about truth. Artificial Intelligence, 1989,**39**:231~244.

* 事实上,我们可在一个Prolog的扩展环境,称为Common Prolog中直接实现了LP与 LP_m 的表演算系统.

4 林作铨. 一个在弗协调逻辑中的限制. 软件学报, 1995, **6**(**5**): 290～295.

5 林作铨. 超协调限制逻辑. 计算机学报, 1995, **18**: 667～670.

6 林作铨, 李未. 超协调逻辑(一, 二, 三, 四). 计算机科学, 1994, **5**.

7 Lin F. Reasoning in the presence of inconsistency. In: Proceedings of AAAI－87, Morgan Kaufmann, 1987. 139～143.

8 Dunn, M. Intuitive semantics for first－order entailments and "coupled tree". Philosophical Studies, 1976, **29**: 149～168.

9 Dunn M. A sieve for entailments. J. of Philosophical Logic, 1980, **9**: 41～57.

10 Anderson R, Belnap N. Entailment. Princeton, 1975.

11 Lin Z. Proof theories of logic of paradox. In: Proceedings of ISMIS－94, 1994.

12 Smullyan M. First－order logic. Springer Verlag, 1968.

13 Ginsberg M Ed. Readings in nonmonotonic reasoning. Morgan Kaufmann, 1987.

14 林作铨, 石纯一. 非单调推理十年进展. 计算机科学, 1990, **6**: 15～31.

15 Lin Z. Paraconsistent circumscription: extended results. In: The 3rd International Symposium on Artificial Intelligence and Mathematics, Florida, 1994.

16 林作铨. 常识推理的逻辑基础[博士论文]. 北京航空航天大学, 1994.

附录:定理的证明

定理 1. 令 S 是一个公式集, A 为一个公式, $S\models_{LP}A$ 当且仅当 $S\vdash_{LP}A$, 即对 $\{TS,FA\}$ 的记号表是封闭的.

证明:假设对 $\{TS,FA\}$ 的记号表 T 是封闭的,我们证明 $S\models_{LP}A$. 令 π 是 S 的一个模型,需证明 π 也是 A 的模型. 设若否则, π 不是 A 的模型,则 $\pi(\neg A)=1$, 即 $\pi(FA)=1$, 又因为 T 是对 TS 和 FA 的记号表,通过对 T 的结构施加归纳,易知,有一个完全 T 的分支 b, 使得 π 是 b 中每个公式的模型且 $\pi(FA)=1$, 但这是不可能的,因为记号表 T 是封闭的,由封闭条件,就有 b 中命题 p 使得 $Tp\in b$ 和 $Fp\in b$, 即有 $\pi(Tp)=1$ 和 $\pi(Fp)=1$; 或者有 b 中命题 p 使得 $Fp\in b$ 和 $F\neg p\in b$, 即有 $\pi(Fp)=1$ 和 $\pi(F\neg p)=1$, 这是一个矛盾,由此矛盾我们证得 π 是一个 A 的模型.

相反地,假设 $S\models_{LP}A$, 我们证明存在对 $\{TS,FA\}$ 的记号表 T 使得 T 是封闭的. 我们主张 T 是封闭的,设若否则,则有一个完全 T 的分支 b 使得 b 不是封闭的. 构造一个赋值 π 如下:对任一原子命题 p,

(1)若 $Tp, Fp\in b$, 则 $\pi(p)=01$;

(2)若 $Tp\in b$ 但 $T\neg p\notin b$, 则 $\pi(p)=1$;

(3)若 $F\neg p\in b$ 但 $Fp\notin b$, 则 $\pi(p)=0$;

(4)否则, $\pi(p)$ 赋值不变.

通过对公式的结构施加归纳,易知, π 是每一个公式的模型(包括 S), 且对任一公式 ψ(包括 $\neg A$), $\pi(\psi)=1$, 这样 π 是一个 S 的模型,但不是 A 的模型,这与 $S\models_{LP}A$ 的假设矛盾,由此我们证得 T 必是封闭的. □

作为以上证明的一个推论,我们有下面的命题.

推论 1. 令 S 是一个公式集, $S\models_{LP}A$ 对任意公式 A 成立,当且仅当对任一 TS 的完全记号表 T, 任一原子命题 p 与 T 的任一分支 b, p 与 $\neg p$ 都在 b 中.

定理 2. 令 S 是一个公式集, A 为一个公式, $S\models_{LP_m}A$ 当且仅当 $S\vdash_{LP_m}A$, 即对 $\{TS,FA\}$ 的记号表是极小封闭的.

证明:假设存在一个对 $\{TS,FA\}$ 的记号表 T 使得 T 是极小封闭的,我们证明 $S\models_{LP_m}A$. 令 π 是一个 S 的极小非协调模型,需证明 π 是一个 A 的模型. 设若否则, π 不是 A 的模型,则 $\pi(\neg A)=1$, 即 $\pi(FA)=1$,

又因为 T 是对 TS 和 A 的记号表,通过对 T 的结构施加归纳,易知,有一个完全 T 的分支 b 使得 π 是 b 中每个公式的模型且 $\pi(FA)=1$. 我们主张 b 不是封闭的,否则,如定理 1 的证明,这是不可能的,因为由封闭条件,就有 b 中命题 p 使得 $Tp\in b$ 和 $Fp\in b$,即有 $\pi(Tp)=1$ 和 $\pi(Fp)=1$,或者有 b 中命题 p 使得 $Fp\in b$ 和 $F\neg p\in b$,即有 $\pi(Fp)=1$ 和 $\pi(F\neg p)=1$,这是一个矛盾;我们主张 b 不是可略的,否则,对某个原子命题 $p\in b$,就有 T 的另一个分支 b' 使得 $\Pi(b')\subset\Pi(b)$,定义一个赋值 π' 如下:对任一原子命题 p,

(1)若 $Tp,T\neg p\in b'$,则 $\pi'(p)=01$;

(2)若 $Tp\in b'$ 但 $T\neg p\notin b'$,则 $\pi'(p)=1$;

(3)若 $Fp\in b'$ 但 $F\neg p\notin b'$,则 $\pi'(p)=0$;

(4)否则,$\pi'(p)$赋值不变.

通过对公式的结构施加归纳,易知,π' 是一个 S 的模型,若 $\pi'(p)=01$,则 $Tp,T\neg p\in b'$,而由于 $\Pi(b')\subset\Pi(b)$,就有 $Tp,T\neg p\in b$,亦即 $\pi(p)=01$,再由 $\Pi(b')\subset\Pi(b)$,存在一个原子命题 q 使得 $Tq,T\neg q\in b$ 但 $Tq,T\neg q\notin b'$,亦即 $\pi(q)=01$ 但 $\pi'(q)\neq 01$,因此 $\pi'<\pi$,这与 π 的极小性假设矛盾. 这样,对 TS 和 FA 的任一记号表 T 都存在一个既不封闭又不可略的分支 b,由此矛盾我们证得 π 是一个 A 的模型.

相反地,假设 $S\models_{LP_m}A$,我们证明存在一个对 $\{TS,FA\}$ 的记号表 T 使得 T 是极小封闭的. 我们主张 T 是极小封闭的,假若否则,则有一个完全 T 的分支 b 使得 b 既不封闭也不可略. 如果 b 是不封闭的,构造一个赋值 π 如下:对任一原子命题 p,

(1)若 $Tp,T\neg p\in b$,则 $\pi(p)=01$;

(2)若 $Tp\in b$ 但 $T\neg p\notin b$,则 $\pi(p)=1$;

(3)若 $Fp\in b$ 但 $F\neg p\notin b$,则 $\pi(p)=0$;

(4)否则,$\pi(p)$赋值不变.

通过对公式的结构施加归纳,易知,π 是每一个公式的模型(包括 S),且对任一公式 ϕ(包括$\neg A$),$\pi(\phi)=1$,这样 π 是一个 S 的模型,但不是 A 的模型;我们主张 π 必是极小的,否则,存在一个 S 的模型 π' 使得 $\pi'<\pi$,则存在一个完全 T 的分支 b' 使得 π' 是 b' 中每个公式的模型,令 $Tp,T\neg p\in b'$,则 $\pi'(p)=01$,由于 $\pi'<\pi$,就有 $\pi(p)=01$,即有 $Tp,T\neg p\in b$;类似地,存在一个原子命题 q 使得 $\pi(q)=01$ 但 $\pi'(\neg q)\neq 01$,因此有 $Tq,T\neg q\in b$ 但 $Tq,T\neg q\notin b'$,这样,我们证有 $\Pi(b')\subset\Pi(b)$,这与 b 不是可略的矛盾. 因此,π 是一个 S 的极小非协调模型但不是 A 的模型,这与 $S\models_{LP_m}A$ 的假设矛盾,由此我们证得 T 是极小封闭的. □

作为定理 1 与定理 2 的一个结果,我们可证明下面在文献[3]中未加证明的测量定理.

定理 3. 对一个公式集 S,如果存在一个 S 的极小非协调模型,且 $S\models_{LP}A$ 对任一公式 A 都成立,当且仅当 $S\models_{LP_m}A$ 对任一公式 A 都成立;即$\models_{LP_m}$具有与$\models_{LP}$同样的超协调性.

证明:我们仅需证明如果存在一个 S 的极小非协调模型,且 $S\models_{LP_m}A$ 对任一公式 A 都成立,则 $S\models_{LP}A$ 对任一公式 A 都成立,这由推论 1 与定理 2 立即可得. □

TABLEAUX FOR LOGIC OF PARADOX

Lin Zuoquan Li Wei

(*Institute of Computer Science Shantou University Shantou* 515063)

Abstract The LP(logic of paradox) is a paraconsistent logic. One of the motivations behind paraconsistent logic, namely LP, is that it should not allow that everything follows from a single contradiction. However it has one important drawback: that some classical inferences would be invalid in LP. The LP_m (logic of minimal paradox) can overcome this drawback, such that paraconsistent logic would be equivalent to classical logic when there was not direct effect of a contradiction. Originally, LP and LP_m were only defined in semantic. Although some proof theories for LP were introduced, it has left open how to obtain a satisfactory proof theory for LP_m. This paper propose the sound and completes tableaux with respect to the semantics of LP and LP_m, respectively.

Key words Tableaux, paraconsistent logic, logic of paradox, logic of minimal paradox, minimally inconsistent models.