基于广义归结的定理机器证明系统*

程晓春 孙吉贵 刘叙华

(吉林大学计算机科学系,长春 130023)

(吉林大学符号计算与知识工程开放实验室,长春 130023)

摘要 本文使用C-PROLOG语言在SUN工作站上设计实现了基于广义归结和基于归结的两个定理机器证明系统GRM,RM,证明了《数学原理》中Part 1: mathematical logic中Section A与Section B中全部定理(350个).讨论GRM和RM的时、空复杂性,并在实现设计中提出新的全局调度策略及归结式的化简、排序策略,以单子句恒真、恒假的判断代替了广义归结中的自归结,实现了带OCCUR检查的模式匹配.

关键词 广义归结,NC归结,OCCUR检查,调度策略.

1956年,Simon、Newell首先提出并讨论命题逻辑的机器推理系统,开辟了定理机器证明领域.1959年,王浩在IBM704上使用类人法设计实现了3个有效的定理机器证明程序,引起了很大的兴趣[1].1965年,Robinson提出了处理子句形式公式集的归结方法[2].由于归结方法中推理规则简单,机器上容易实现,发展很快,至今仍是最有效的自动推理方法之一.由William McCune完成的带支架集策略的归结器OTTER有较多应用.为了进一步提高归结推理的效率,很多学者对归结方法进行了研究,先后提出了锁归结、语义归结、有序归结、线性归结、输入归结和单元归结等局部策略[2],以减少无用子句的生成;还提出了包含删除策略[2],各种子句化简策略[3]等多种全局策略,尽可能多地删除冗余子句.归结方法的另一发展是将其推广到非子句公式集.1982年,王湘浩、刘叙华[4]和Murray[5]分别提出广义归结和NC-归结.这两种方法很相似,都是以不含量词的一般公式为处理对象,且都是完备的.文献[4]中还讨论了广义子句归结的各种策略.

本文以广义归结[4]为基础,在SUN工作站上用易理解、易重用、易维护的C-PROLOG语言实现了定理证明系统GRM,证明了《数学原理》[6]中的命题逻辑、一阶逻辑公式的全部定理,并证明了群、环、布尔代数中的一些简单定理,并在设计实现中提出了新的全局调度策略及归结式的化简、排序策略,以单子句的恒真、恒假判断代替了广义归结中的自归结[4],实现了带OCCUR检查的模式匹配,并实现了与NC-归结中REDUCING-RULE类似的布

* 本文1994-01-24收到,1994-03-14定稿

本研究受国家自然科学基金、863计划和国家攀登计划的支持.作者程晓春,1973年生,博士生,主要研究领域为非标准逻辑的自动推理.孙吉贵,1962年生,副教授,主要研究领域为定理机器证明和自动推理.刘叙华,1937年生,教授,博士导师,主要研究领域为自动推理和人工智能.

本文通讯联系人:程晓春,长春 130023,吉林大学计算机科学系

尔化简规则.同时,设计实现了以经典归结为基础的定理机器证明器,通过实例,比较和分析了广义归结方法的优劣及效率.

1 基本算法

PROLOG 子句是 HORN 子句,HORN 集正单文字有序归结完备[7],但 C—PROLOG 模式匹配未做 OCCUR 检查(即变量冲突判断),影响了完备性.

算法 1:带 OCCUR 检查的合一算法 UNIFYALG

(1)去掉待合一集合 S 的重复元,替换 $SS=[\,]$.

(2)若 S 中只有一个元素,则 S 可合一,且合一替换为 SS,成功结束.

(3)若 S 可合一,Dss 为 S 的差异集;若 S 不可合一(例如有变量冲突 $f(x)/x$),Dss 返回值为[(nil,nil)].

(4)Dss 中有元素(nil,nil),则 S 不可合一,结束.否则取 Dss 中任一差异对(t,x),(x 是变元).$S=S^{t/x}$,$SS=SS\cdot\{t/x\}$,去掉重复元,GOTO(2).

定理 1. 集合 S 可合一,当且仅当 UNIFYALG 终止且返回 SS 为 S 的最一般合一替换.

归结改进时,把考虑包含在双亲子句中信息的限制称为局部策略;在整个子句集中如何选择、化简归结子句称为全局策略.广度优先全局调度结合局部删除策略是完备的,适于求全解及最优解,但搜索复杂度是指数级.因此,许多实用系统为避免组合爆炸采用带回溯策略的深度优先搜索求解难题,适于求单解.

算法 2:深广度优先相结合的全局调度 FP

(1)若子句集中有恒假子句,成功结束.

(2)若子句集中只有一个子句(不恒假),失败结束.

(3)若第一个子句不可与其余子句归结,将其换到最后.

(4)若第一个子句可与其余某子句归结:

(4.1)归结式不出现在子句集中,也非恒真、恒假子句,加入第一个子句前.(深度优先).

(4.2)归结式恒假,成功结束.

(4.3)归结式出现在子句集中或恒真.

(4.3.1)将第一个子句与其余所有可归结子句生成的归结式形成一个集合 $S1$.(广度优先)

(4.3.2)将 $S1$ 中所有已出现当前子句集中的子句、恒真子句删去,若 $S1$ 变空,将第一个子句置于最后.(回溯换序)

(4.3.3)将 $S1$ 中子句加入到当前子句集 S 的前面.(深度优先)

(4.3.4)GOTO (1).

定理 2. 不可满足子句集在 FP 调度下必可成功结束.

通过比较水平渗透法与 FP 的演绎树可证明本定理.

2 广义归结效率的比较分析

基于广义归结的系统 GRM 和基于经典归结的系统 RM 结构为图 1,分别证明了《数学

原理》[6]第一卷中 Part 1—— mathematical logic 中 Section A 的 210 道命题逻辑公式与 Section B中 140 道一阶逻辑公式,实验(表 1)表明:对于经典命题逻辑,广义归结明显优于经典归结,但对于一阶逻辑,实验结果不很理想,广义归结耗时更多.

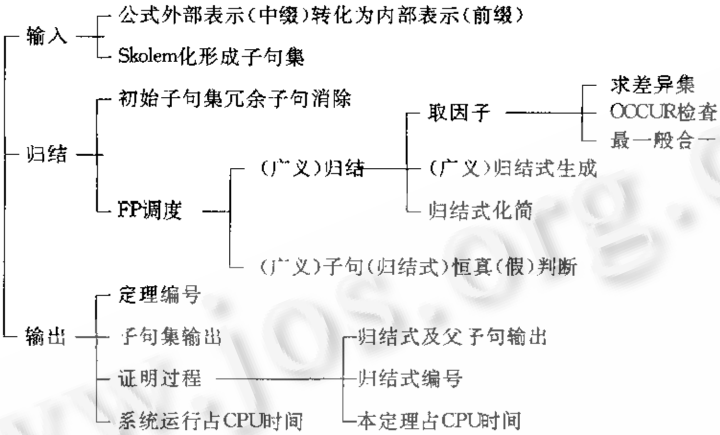

图1 (G)RM结构

表 1 《数学原理》中定理的证明结果

算法	证明定理	环境	CPU 时间	终端时间	归结步
GRM	140 道一阶逻辑公式	sun475	285.48 秒	22 分 2 秒	2185
GRM	210 道命题逻辑公式	sun475	13.32 秒	2 分 18 秒	286
RM	140 道一阶逻辑公式	sun475	102.35 秒	5 分 38 秒	916
RM	210 道命题逻辑公式	sun475	48.62 秒	4 分 5 秒	710

以上结果决非偶然,经典归结方法把要证明的定理化为合取范式,范式化要大量地使用分配律,从而使原公式中文字的单次出现变为多次出现,形成冗余.此外,使用范式方法的推导由于去掉了原命题中表达蕴含关系的联接词→,⇔,演绎过程不自然.广义归结对广义子句进行操作,不必使用分配律,而且可保留原命题的蕴含关系,使演绎过程更接近自然推导.因为命题公式就是广义子句,不需 SKOLEM 化,广义归结明显优于经典归结.

归结方法在一阶逻辑情形比命题逻辑情形复杂度剧增是由于变元替换合一、取因子等操作.经典子句的子句内冗余极易判断,在 RM 里的简单子句中同一文字只出现一次,且无互补文字,恒假子句也只有空子句,从而不需自归结.广义子句则不然,恒假子句很复杂,不使用自归结的广义归结对于推出零子句是不完备的[8],由于自归结式与亲本子句等价,子句集中占多数的非恒假子句执行自归结是冗余的,而且这种子句间冗余随归结过程呈指数级增加;因为不使用自归结的广义归结对于推出恒假广义子句是完备的[8],增加语义树方法单子句恒假性判断,广义归结过程中便同经典归结一样不需自归结,选取归结子句的全局调度只需将广义子句集看作集合而不是多重集,减少了冗余,降低了复杂度.由于广义子句结构复杂,恒假广义子句判断仍很复杂;另外广义子句中同名谓词不同例的复杂出现使得广义子句的取因子操作机械性差,在求最一般合一、取因子、生成归结式时复杂度大,且生成的归结式同样易引入冗余谓词,特别明显地,广义子句对纯的同极性文字归结,归结式必被父子句

蕴含(从而应被删除),而这种归结过程及归结式的生成增大了子句集,增加了时、空开销.

文献[6]在 Section B 中的一阶逻辑公式常常成组出现,形如

$$G1 \rightarrow G2 \qquad G2 \rightarrow G1 \qquad G1 \Leftrightarrow G2$$

等价式证明耗时常常远大于两个蕴涵式证明耗时.观察证明过程,发现等价式公式的子句集有更多形如 $p(a) \vee Gr(x,y) \vee \sim p(x)$ 或 $(p(x) \wedge Gr1(x,y)) \rightarrow (p(a) \vee Gr2(x,y))$ 的重言式,重言式与其他公式的归结式都不会是零子句,甚至仍为重言式,于是这种冗余子句随归结过程以指数级增加,大大影响了效率.

系统 GRM 中为了减少冗余,广义子句中不夹杂常子句 0,1,实施了同 NC—归结相似的化简过程.广义子句中谓词的冗余判断复杂,若作象 NC—归结那样的极性判断[5]也需对子句做逻辑联接符的结构分解,因此广义归结的冗余判断、删除更值得进一步研究.在没有低复杂度的方法判断子句间冗余及子句内谓词冗余时,系统在限制中间结论冗余的判断复杂度与保存中间结论的存储开销、搜索空间扩大的调度复杂化开销之间寻找折中.GRM 由于全局调度的强化,从而在大多数情形,不采用每步归结做极性判断能更有效求解.

对于一个特定问题,有的证明策略行之有效,另外一些策略表现很差;对于另一个问题,情况可能正好相反.虽然大量实例的统计结果反映事实,但各种全局策略、局部策略的效率分析及最佳配合仍是待解决的问题.

参考文献

1 王浩.数理逻辑通俗讲话.北京:科学出版社,1981.

2 Chang C L, Lee R C T. Symbolic logic and mechanical theorem proving. Academic Press, 1973.

3 Eisinger N, Ohlbach H J, Prachlein A. Reduction rules for resolution based systems. Artificial Intelligence, 1991, **50**(1):141—181.

4 王湘浩,刘叙华.广义归结.计算机学报,1982,**5**(2):81—92.

5 Murray N V. Completely noncausal resolution theorem proving. Artificial Intelligence, 1982, **18**(1):67—85.

6 Alfred N W. Bertrand Russell FRS. Principia mathematica. 2nd ed. Cambridge, 1957.

7 陆汝钤.Horn 集上的消解定理.中国科学(A 辑),1981,**11**(7):869—903.

8 刘叙华.关于归结原理的删除策略.吉林大学学报,1982,(**2**):97—106.

A AUTOMATIC THEOREM PROVING SYSTEM BASED ON GENERALIZED RESOLUTION

Cheng Xiaochun Sun Jigui Liu Xuhua

(Department of Computer Science, Jilin University, Changchun 130023)

(Open Laboratory for Symbolic Computation and Knowledge Engineering, Jilin University, Changchun 130023)

Abstract The authors prove *350* theorems of "Principia Mathematica" by a theorem proving system based on generalized resolution. Compared it with traditional resolution, they complement new strategy, avoid self—resolution, and discuss its time and space complexity.

Key words Generalized resolution, NC resolution, OCCUR check, schedule strategy.