第5卷第4期 1994年4月 | 软件学报 JOURNAL OF SOFTWARE | Vol. 5, No. 4 Apr. 1994

关于 p－m 度的分裂*

郑锡忠

(南京大学数学系，南京 210008)

摘要 本文讨论多项式时间多一可化归度(p－m 度)的分裂问题.主要结果是:存在非零的 p－m 度 **a**,对任何自然数 $n\geqslant 1$ 当 **a** 分裂成 n+1 个度 $\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n$ 的并时,其中至少有 n 对 $(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j)$($i\neq j;i,j\leqslant n$)不是极小对.从而推广了 Ambos－Spies 中关于存在非零 p－m 度 **a** 不能分裂成一个极小对的结果.

关键词 p－m 可化归度,极小对,分裂.

作为对递归论中 Turing 化归性与多一化归性在多项式时间界内的一种类比,Cook[4] 和 Karp[5]分别引进了两种十分重要的化归性概念——多项式时间 Turing 化归性(p－t 化归性)和多项式时间多一化归性(p－m 化归性).由此可以导出 p－t 度与 p－m 度及其相应的在度上的化归关系.对这两种多项式时间度在其化归关系的下的结构的理论研究首先由 Ladner[6,7]开始的.此后,Ambos－Spies[1]对此又进行了更为系统和广泛的讨论.在对度结构的众多讨论中,关于极小对的讨论是最重要和最基本的内容的一.两个度 **a**,**b** 构成极小对指它们的下确界为 **0**(多项式时间可计算集的度).Ladner[7]证明了多项式度极小对的存在性.Breidbart[3]则证明了任何一个非零的多项式度都囿界极小对.Ambos－Spies[1]证明了任何一个非零的多项式度都是某极小对的一支(从而都是可交的).作者在[8]中证明了不存在极大的多项式度极小对.另一个重要的否定性结论是 Ambos－Spies[1]证明的:有些 p－m 度不能分裂成一个极小对,即不能表成一个极小对的上确界的形式(对 p－t 度的相应结论尚不知).不过,作者在另文中证明了任何一个非零的多项式度都可分裂成两个或两个以上的极小对,也可以分裂成一个度与另一组两两互成极小对的度集的并.由此,人们很自然地要问:是否每个非零多项式度都可分裂成一组两两互成极小对的度的并?或者更确定一些,对 $n\geqslant 3$,是否每个非零多项式度都可分裂成 n 个两两成极小对的度的并?本文将就 p－m 度对上述第二个问题给出一个否定的回答.我们将证明,对 $n\geqslant 1$.总存在非零 p－m 度 **a**,使当 **a** 分裂成 $n+1$ 个度 $\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n$ 的并时,其中至少有 n 对 $(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j)$($i,j\leqslant n$ & $i\neq j$)不是极小对.从而可见,作者先前关于 p－m 度的极小对分裂结论已是最好的可能了.

我们的讨论主要限制在字母表 $\sum=\{0,1\}$的上.以 $\sum^*$ 表示全体$\{0,1\}$有穷串的集.对串 $x,y\in\sum^*$,以 xy 表示它们的毗连,$|x|$,$|y|$分别表示它们的长度.$<,>$表示一个

---

* 本文1991年9月12日收到,1991年12月21日定稿

本文是国家自然科学基金资助项目.作者**郑锡忠**,35岁,副教授,主要研究领域为递归论和计算复杂性理论.

本文通讯联系人:郑锡忠,南京 210008,南京大学数学系

从$\sum^* \times \sum^*$到$\sum^*$的多项式时间可计算的1—1配对函数,它的两个逆函数π_1,π_2,也假定是多项式时间可计算的(参见[2]).由于我们可以把$\sum^*$中的串与自然数的间建立起能行的1—1对应关系.因此,我们也常把$\sum^*$中的元素与自然数等同看待.而$\sum^*$也可与ω等同看待.这样一来,$<,>,\pi_1,\pi_2$也可作为自然数上的1—1递归配对函数组.

对两个集合$A,B\subseteq\sum^*$,称A为p−m可化归到B(记为$A\leqslant^p_m B$)指存在多项式时间可计算的函数f使$\forall x(f(x)\in B\leftrightarrow x\in A)$.$A,B$称为p−m等价的(记为$A\equiv^p_m B$)指$A\leqslant^p_m B\&B\leqslant^p_m A$.全体与$A$是p−m等价的集合构成A的p−m度$\deg(A)=\{B\subseteq\sum^* \mid A\equiv^p_m B\}$.p−m度常记为**a**,**b**,**c**,….本文讨论的都是p−m度.因此,"p−m"字样常可省略不写.称度**a**可化归到**b**(记为**a**$\leqslant$**b**)指存在$A\in$**a**,$B\in$**b**使$A\leqslant^p_m B$.设$\{P_n\}_{n\in\omega}$为全体多项式时间可计算集合的一种能行枚举.**0**为全体非平凡的多项式时间可计算集组成的度(我们忽略了Φ和$\sum^*$两种平凡情形).

如果度**b**,**c**的上确界**b**$\cup$**c**=**a**,则称**b**,**c**分裂**a**.一般地,如度集合$\mathscr{A}$的上确界为**a**,则称$\mathscr{A}$分裂**a**.一个数论函数f称为多项式纯正的指f为递归的并且存在多项式p使对任何$n\in\omega$,$f(n)$可以在$p(f(n))$步内计算出来.

其它没有解释的概念可参见[1,2].

为了得到我们的主要定理,先要证明几个引理,现在首先引进ω−剖分的概念.

定义 1. 自然数集$A_0,A_1,\cdots,A_n$称为一个ω−剖分指它们满足下列条件:

1. $A_i\cap A_j=\Phi \quad (i\neq j)$

2. $\bigcup\limits_{i\leqslant n}A_i=\omega$

3. 对任何i,A_i为无穷集

引理 2. 设$n\geqslant1$,$A_0,A_1,\cdots,A_n$为一个ω−剖分,则存在n个不同的数对(n_i,m_i) $(i=1,2,\cdots,n;n_i,m_i\leqslant n;n_i\neq m_i)$使得$\exists^\infty x(x\in A_{n_i}\&x+1\in A_{m_i}\ or\ x\in A_{m_i}\&x+1\in A_{n_i})$即$A_{n_i}$与$A_{m_i}$无穷多次"相邻".从而可以推得$\exists^\infty x(x\in A_{n_i}\&x+1\in A_{m_i})or\ \exists^\infty x(x\in A_{m_i}\&x+1\in A_{n_i})$.

证明:关于$n\geqslant1$归纳证明.$n=1$时的奠基部分是显见的.现考虑归纳推步如下.

由于诸$A_i(i\leqslant n+1)$均是无穷的,因此,A_{n+1}必定与某个$A_{i_0}(i_0\leqslant n)$无穷多次"相邻".现令$A'_{i_0}=A_{i_0}\cup A_{n+1}$并且$A'_j=A_j(j\neq i_0\&j\leqslant n)$.则$A'_0,\cdots,A'_n$为一个$\omega$−剖分.依归纳假设.存在$n$个不同的数对$(n_i,m_i)$使$A'_{n_i}$与$A'_{m_i}$无穷多次"相邻"(其中$i=1,2,\cdots,n;n_i\neq m_i;n_i,m_j\leqslant n$).如果$n_i$和$m_i$均不等于$i_0$,则令$n_{n+1}=i_0\&m_{n+1}=n+1$,即知$(n_i,m_i)(i=1,\cdots,n+1)$为所需的$n+1$个数对.如果某个$n_i=i_0$(对$m_i=i_0$也类似处理),则由于$A_{m_i}$与$A_{i_0}\cup A_{n+1}$无穷多次相邻,因此,$A_{m_i}$必与$A_{i_0}$或$A_{n+1}$无穷多项"相邻".现令

$$n'_j=\begin{cases}n_j & \text{如果 } 1\leqslant j\leqslant n\ \&\ (n_j\neq i_0)\vee(n_j=i_0\ \&\ A_{m_j}\text{与}A_{i_0}\text{无穷多项“相邻”})\\ n+1 & \text{如果 } 1\leqslant j\leqslant n\ \&\ n_j=i_0\ \&\ A_{m_j}\text{与}A_{n+1}\text{无穷多次“相邻”}\\ i_0 & \text{如果 } j=n+1\end{cases}$$

$$m'_j=\begin{cases}m_j & \text{如果 } 1\leqslant j\leqslant n\\ n+1 & \text{如果 } j=n+1\end{cases}$$

则易见，$(m'_j,n'_j)(1\leqslant j\leqslant n+1)$便是所需的 $n+1$ 个数对.

引理证毕.

定义 3. 称集合 $A_0,A_1,\cdots,A_n$ 为 p—分裂 A 的指存在多项式可计算集合 $D_0,D_1,\cdots,D_n$ 使它们成为一个 ω—剖分而且对 $i\leqslant n$，$A_i=A\cap D_i$.

引理 4. 设 A 为递归集，$\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n$ 为 $\deg(A)$的一组分裂. 即 $\mathbf{a}_0\cup\mathbf{a}_1\cup\cdots\cup\mathbf{a}_n=\deg(A)$. 则存在 A 的一组 p—分裂 $A_0,A_1,\cdots,A_n$ 使对任何 $i,j\leqslant n$

$$\mathbf{a}_i\cap\mathbf{a}_j=0\rightarrow\deg(A_i)\cap\deg(A_j)=\mathbf{0}$$

证明：设 $\mathbf{a}_0\cup\mathbf{a}_1\cup\cdots\cup\mathbf{a}_n=\deg(A)$. 取定无穷集 $B_i\in\mathbf{a}_i(i\leqslant n)$. 令 $\bar{i}$ 为自然数 i 的$[log_2(n+1)]$位二进制表示(如 $\bar{0}$ 为$[log_2(n+1)]$个 0，等等)，则有

$$A\equiv_m^p\bar{0}B_0\cup\bar{1}B_1\cup\cdots\cup\overline{(n-1)}B_{n-1}\cup cB_n$$

其中 $\bar{i}B_i=\{xy\mid x=\bar{i}\ \&\ y\in B_i\}\ (i\leqslant n-1)$

$$cB_n=\{xy\mid\forall\ i\leqslant n-1(x\neq\bar{i}\ \&\ |x|=[log_2(n+1)]\ \&\ y\in B_n\}$$

由此，可以取定多项式时间可计算函数 f 满足下式：

$$\forall\ x(x\in A\leftrightarrow f(x)\in\bar{0}B_0\cup\bar{1}B_1\cup\cdots\cup\overline{(n-1)}B_{n-1}\cup cB_n)$$

再令　$D_i=\{x\mid\exists\ y(f(x)=\bar{i}y\ \&\ y\in\sum^*)\}\qquad(i\leqslant n-1)$

$D_n=\sum^*\setminus\bigcup_{i\leqslant n-1}D_i.$

不难看出，$D_0,D_1,\cdots,D_n$ 都是多项式时间可计算的. 不妨假定诸 D_i 都是无穷的，从而它们构成一个 ω—剖分. 因此，若令 $A_i=A\cap D_i$，则可得到 A 的一个 p—分裂 $A_0,A_1,\cdots,A_n$. 而且，以 f 为化归函数可得

$$\forall\ i<n(A_i\leqslant_m^p\bar{i}B_i)\ \&\ A_n\leqslant_m^p cB_n.$$

从而有 $\deg(A_i)\leqslant\deg(B_i)=\mathbf{a}_i$. 由此即可得

$$\mathbf{a}_i\cap\mathbf{a}_j=\mathbf{0}\rightarrow\deg(A_i)\cap\deg(A_j)=\mathbf{0}.$$

引理证毕.

由上述证明过程我们实际上可得下列结论.

推论 5. 设 A 为递归集，$\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n$ 为 $\deg(A)$的一个度分裂，即 $\deg(A)=\mathbf{a}_0\cup\mathbf{a}_1\cup\cdots\cup\mathbf{a}_n$，则存在 A 的一个 p—分裂 $A_0,A_1,\cdots,A_n$ 使 $\deg(A_i)\leqslant\mathbf{a}_i(i\leqslant n)$. 当然此时还有 $\deg(A_0)\cup\cdots\cup\deg(A_n)=\deg(A)$.

引理 6. 存在能行可计算函数 f 满足下列条件：

Ⅰ. $f:\omega\rightarrow\omega\times\omega\cup\{\uparrow\}$.

Ⅱ. $f(0)=\uparrow$

Ⅲ. 如果 $f(m)\in\omega\times\omega$，则 $f(m+1)=\uparrow$

Ⅳ. 如果 $f(m)=(n,k)$，则 $0^m\in P_{\pi_1(n)}\ \&\ 0^{m+1}\in P_{\pi_2(n)}$.

Ⅴ. 如果 $\exists^\infty m(0^m\in P_{n_1}\ \&\ 0^{m+1}\in P_{n_2})$，则

$$\forall k\exists m(f(m)=(<n_1,n_2>,k))$$

证明：函数 f 可以递归定义如下

$f(0)=\uparrow$.

设 $f(m-1)$ 已有定义，若 $f(m-1)\in\omega\times\omega$，则令 $f(m)=\uparrow$. 现设 $f(m-1)=\uparrow$. 对 $<n_1,n_2>\leqslant m$，称 $<n_1,n_2>$ 为 m－正的指 $0^m\in P_{n_1}\ \&\ 0^{m+1}\in P_{n_2}$；称 $<n_1,n_2>$ 为 m－负的指 $0^{m+1}\in P_{n_1}\ \&\ 0^{m+2}\in P_{n_2}$.

如果不存在 $<n_1,n_2>\leqslant m$ 使的为 m－正的或 m－负的，则令 $f(m)=\uparrow$.

否则，令 $<<n_1,n_2>,k>$（以后记为 $<n_1,n_2,k>$）为满足下列条件的最小者：

(a) $<n_1,n_2>\leqslant m$

(b) $<n_1,n_2>$ 为 m－负的或 m－正的

(c) $\forall p<m(f(p)\neq(<n_1,n_2>,k))$

并令

$$f(m)=\begin{cases}(<n_1,n_2>,k) & \text{如}<n_1,n_2>\text{为 m－正的}\\ \uparrow & \text{此外}\end{cases}$$

下面来验证 f 满足引理中诸条件. 首先，由定义直接可以看出 f 是能行可计算的并且满足条件Ⅰ，Ⅱ. 进而，关于 m 进行归纳不难验证 f 也满足Ⅲ和Ⅳ. 为了证明 f 满足条件Ⅴ，我们先证明下列子引理.

子引理.

(1) $\forall m,n,k(f(m)=(n,k)\rightarrow\forall p<m(f(p)\neq(n,k)))$

(2) $\forall m,n,k(n\leqslant m\ \&\ n$ 为 m－正或 m－负的 $\&\ \forall p<m(f(p)\neq(n,k))\rightarrow$
$\exists k',m',n'(<n',k'>\leqslant<n,k>\ \&\ m\leqslant m'\ \&\ f(m')=(n',k')))$.

证明：(1) 关于 m 归纳并由 f 定义过程中的条件(c)立即可得.

(2) 关于 $<n,k>$ 进行强归纳证明（m 作为参数）.

归纳假设：对任何 m，及任何满足 $<n_1,k_1><<n,k>$ 的 n_1,k_1. (2)式关于 m,n_1,k_1 都成立.

归纳推步：对 m,n,k，不妨设它们满足(2)式的前提. 分两种情形：

情形 1. 如存在 m_1,k_1,n_1 使下式成立

(＊) $m\leqslant m_1\ \&\ <n_1,k_1><<n,k>\ \&\ n_1$ 是 m_1－正的或 m_1－负的，

则由归纳假设知存在 k',m',n' 使

$$<n',k'>\leqslant<n_1,k_1>\ \&\ m_1\leqslant m'\ \&\ f(m')=(n',k')$$

结合(＊)式便得

$$<n',k'>\leqslant<n,k>\ \&\ m\leqslant m'\ \&\ f(m')=(n',k').$$

即知(2)式对这种 m,n,k 成立.

情形 2. 如果使(*)式成立的 m_1,k_1,n_1 不存在，由于 m,n,k 满足(2)式的前提，故从 f 的构造过程知，$<n,k>$ 为满足条件(a)—(c)的最小者，从而当 n 为 m—正的时，$f(m)=(n,k)$；而当 n 为 m—负的时(此时 n 就是 $(m+1)$—正的)必有 $f(m+1)=(n,k)$. 可见，无论哪一种情形. (2)对这种 m,n,k 都成立.

依归纳原理，子引理得证.

现在可以证明 f 满足条件 V 如下. 反设不然，则一定有 k_0 使

(1)$\exists^{\infty} m(0^m\in P_{n_1} \,\&\, 0^{m+1}\in P_{n_2})$并且

(2)$\forall\, m(f(m)\neq(<n_1,n_2>,k_0))$

由于引理的(1)及上述(1)式，可以选定一个 $m\geqslant<n_1,n_2>$满足下列两式

(3)$0^m\in P_{n_1} \,\&\, 0^{m+1}\in P_{n_2}$

(4)$\forall\, k',n'_1,n'_2,m'(f(m')=(\langle n'_1,n'_2\rangle,k') \,\&\, \langle\langle n'_1,n'_2,k'\rangle\leqslant\langle\langle n_1,n_2\rangle,k_0\rangle\rightarrow m'<m-1)$

现在，再依引理(6)的 Ⅲ 知，$f(m-2)$和 $f(m-1)$中至少有一个取值“$\uparrow$”. 从而由(3)可得$<n_1,n_2>$是$(m-1)$负的或 m—正的. 再依上述(2)式及子引理的(2)知，存在 k',m',n'_1,n'_2 使 $m'\geqslant m-1 \,\&\, <<n'_1,n'_2>,k'>\leqslant<<n_1,n_2>,k_0> \,\&\, f(m')=(<n'_1,n'_2>,k')$. 这与(4)式矛盾.

至此，引理得证.

现在可以得到我们的主要结果如下.

定理 1. 存在非零的递归 p—m 度 **a**，对任何 n≥1，当 a 分裂成 n+1 个 p—m 度 $\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n$ 时，其中至少有 n 对$(\mathbf{a}_{r_i},\mathbf{a}_{s_i})(r_i,s_i\leqslant n;i=1,\cdots,n;r_i\neq s_i)$不是极小对.

证明：依引理 4，我们只要构作一个非多项式时间可计算的递归集合 A. 使得对 A 的任何一组 p—分裂 $A_0,A_1,\cdots,A_n$，总有 n 个数对$(r_i,s_i)(r_i,s_i\leqslant n \,\&\, r_i\neq s_i \,\&\, i\leqslant n)$使得$(\deg(A_{r_i}),\deg(A_{s_i}))$都不是极小对. 为此，令 f 为引理 3 中所给的函数. 选定 g 为多项式纯正的严格递增函数，使得对任何 x，$f(x)$的值可以在 $g(x)$步内计算出来(参见[1]). 进而，由于 g 的多项式纯正性，可以取定多项式 p_g 使得对任何 n，可以在 $p_g(n)$步内判定是否有 m 使 $g(m)=n$ 并且给出使的成立的 m 的值.

现在定义 $A\subseteq\{0\}^*$ 如下

$$A(\Lambda)=0 \qquad\text{(其中}\Lambda\text{表示空串)}$$

$$A(0^{m+1})=\begin{cases}A(0^m) & \text{如果 } f(m+1)=\uparrow\\ 1-p_k(0^{g(m+1)}) & \text{如有 } n_1,n_2 \text{ 使得 } f(m+1)=(<n_1,n_2>,k)\end{cases}$$

易见，由于 f 是递归函数，A 一定是递归集. 另外，由 f 所满足的性质 Ⅱ 知有

(5)$f(m)\in\omega\times\omega\rightarrow A(0^m)=A(0^{m+1})$

设 $A_0,A_1,\cdots,A_n$ 为 A 的任何一组 $n+1$ 元 p—分裂. 即有多项式时间可计算集合 $P_{i_0},P_{i_1},\cdots,P_{i_n}$使的构成一个 ω—剖分(此时把 0^n 看成自函数 n，从而$\{0\}^*$看成 ω)并且$\forall\, j\leqslant n(A_j=A\cap P_{i_j})$. 此时，如果有 $j\leqslant n$ 使 $A_j=A\cap P_{i_j}$为有穷集，则 $\deg(A_j)=0$，从而 $\deg(A_i)$

$(i\neq j, i\leqslant n)$与 $\deg(A_j)$都不构成极小对. 因此,不妨假设对任何 $j\leqslant n$, $|A\cap P_{i_j}|=\infty$由于 $A\subseteq\{0\}^*$. 因此有

(6)$j\leqslant n(|\{0\}^*\cap P_{i_j}|=\infty)$

再由 P_{i_j}的 ω 剖分性质知

(7)$(\{0\}^*\cap P_{i_s})\cap(\{0\}^*\cap P_{i_t})=\Phi$　　　$(s\neq t\ \&\ s,t\leqslant n)$

(8)$\bigcup\limits_{j\leqslant n}(\{0\}^*\cap P_{i_j})=\{0\}^*$.

由此根据引理 2 知,存在 n 个数对 $r_i,s_i\in\{i_0,i_1,\cdots,i_n\}$满足下式

(9)$\exists^\infty x(0^x\in P_{r_i}\ \&\ 0^{x+1}\in P_{s_i}$ or $0^{x+1}\in P_{r_i}\ \&\ 0^x\in P_{s_i})$

现任意固定一对(r_i,s_i),并定义相应的 递归集合 B_i 如下

(10)$x\in B_i\leftrightarrow\exists\ m,k(x=0^{g(m)}\ \&\ f(m)=<<r_i,s_i>,k>\ \&\ 0^m\in A\}$

又由(5)式可知

(11)$x\in B_i\leftrightarrow\exists\ m,k(x=0^{g(m)}\ \&\ f(m)=<<r_i,s_i>,k>\ \&\ 0^{m+1}\in A\}$

再由 f 的性质Ⅳ知

(12)$\forall\ m(\exists\ k(f(m)=<<r_i,s_i>,k>)\rightarrow 0^m\in P_{r_i}\&\ 0^{m+1}\in P_{s_i})$

现定义函数 $h_i^j(j=0,1\ \&\ i=1,2,\cdots,n)$如下

$$h_i^j(x)=\begin{cases}1 & \text{如不存在数 } m \text{ 和 } k \text{ 使得 } x=0^{g(m)}\ \&\ f(m)=<<r_i,s_i>,k> \\ 0^{m+j} & \text{此外,其中 } x=0^{g(m)}.\end{cases}$$

此时,由(10)—(12)易见

(13)$\forall\ x(x\in B_i\leftrightarrow h_i^0(x)\in A\cap P_{r_i}\leftrightarrow h_i^1(x)\in A\cap P_{s_i})$.

现在证明 h_i^j 是多项式时间可计算的. 对给定的 x,首先可以在 $p_g(|x|)$步内判知是否有 m 使 $x=0^{g(m)}$,并找出这样的 m. 如果这样的 m 不存在,则令 $h_i^j(x)=1$. 否则,设 $x=0^{g(m)}$,先在$|x|$ $(=g(m))$步内计算出 $f(m)$的值,然后当有 k 使 $f(m)=<<r_i,s_i>,k>$时,令 $h_i^j(x)=0^{m+j}$,否则令 $h_i^j(x)=1$.

由上可知,以 h_i^0,h_i^1 为化归函数有

$$B_i\leqslant_m^p A\cap P_{r_i}\qquad\text{和}\qquad B_i\leqslant_m^p A\cap P_{s_i}$$

为了证明 $A\cap P_{r_i}$和 $A\cap P_{s_i}$不具有极小对度,只要再证明 B_i 不是多项式时间可计算的. 为此要证明对任何 k,$B_i\neq P_k$. 对任何一个固定的 k,依(9)式及 f 的性质Ⅴ知

$$\forall\ k\exists\ m(f(m)=<<r_i,s_i>,k>)\quad\text{or}\quad\forall\ k\exists\ m(f(m)=<<s_i,r_i>,k>).$$

不妨设第一种情形出现,则可以选定 m 使 $f(m)=<<r_i,s_i>,k>$. 从而 $A(0^m)=1-P_k(0^{g(m)})$. 因此由(10)式知 $B_i(0^{g(m)})\neq P_k(0^{g(m)})$.

最后,我们证明 A 不是多项式时间可计算的. 为此令 $P_{n_i}=\{0^k|k\equiv i(\mathrm{mod}m)\}$. 则 P_{n_0}, $P_{n_1},\cdots,P_{n_{n-1}}$为一个 ω—剖分,并且 $P_{n_i}\in P(i\leqslant n)$. 而且易见 $r_i=n_0,s_i=n_1$ 满足(9)式,从而依上面的证明过程可知有 $B\notin P$ 使 $B\leqslant_m^p A\cap P_{n_0},A\cap P_{n_1}$,而又由于 $A\cap P_{n_0},A\cap P_{n_1}\leqslant_m^p A$.

故有 $\in P$.

定理证毕.

推论. 存在递归的非零 p—m 度 **a**,使之不能分裂成有限多个两两成极小对的度的并.

参考文献

1 Ambos—Spies K. On the structure of the polynomial time degrees of recursive sets. Lehrstuhl für Informatik II, Forschungsbericht Nr: 206, 1985.

2 Balcazar J L, Diaz J, Gabrro J. Structural complexity I, II. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, 1988,1990.

3 Breidbert S I. The structure of complexity classes and degrees. Ph. D. Dissertation of University of California, 1977.

4 Cook S A. The complexity of theorem proving procedure. Proc. Third Annual ACM Symp. on Theory of Comp., 1977:151—158.

5 Karp R M. Reducibility among combinatorial problems. In: Complexity ofi Computer Computation, R. E. Miller & J. W. Thatche de. Plenam, New York, 1972:85—103.

6 Ladner R E. Polynomial time reducibility. Proc. Fifth Annual ACM Symp. on Theory of Comp., 1973:122—129.

7 Ladner R E. On the structure of polynomial time reducibility. J. ACM, 1975;**22**:155—171.

8 郑锡忠.关于一些 p—t 度对的极大性.科学通报,1991;**36**(**22**):1755—1756.

ON THE SPLITTING OF p—m DEGREES

Zheng Xizhong

(*Department of Mathematics, Nanjing University, Naijing* 210008)

Abstract This paper discusses the splitting problem of the polynomial time bounded many one degrees. The main result is that: there exists a nonzero p—m degree **a** such that if **a** is splitted by n+1 degrees $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ for any natural number $n \geq 1$, then there exist at lesst n different pairs $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$ $(i \neq j \ \& \ i, j \leq n)$ which are not minimal paris. This generalizes Ambos—Spies' result of which asserts that there is a nonzero p—m degree which can not be splitted by any minimal pair.

Key words p—m reducibility degree, minimal pair, splitting.