第4卷第3期
1993年6月
软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE
Vol. 4, No. 3
Jun. 1993

# 形式化模糊量词及推理

石生利　　刘叙华
(吉林大学计算机科学系,长春 130023)

# FORMALIZING FUZZY QUANTIFIERS AND REASONING

Shi Shengli and Liu Xuhua
(*Department of Computer Science, Jilin University, Changchun* 130023)

**Abstract** The reasoning with fuzzy quantifiers has much importance in computer science. In this paper we deal with fuzzy quantifiers and reasoning from the view point that fuzzy quantifiers have 'statistical' property. The results may have applications in expert systems and other intelligence systems.

**摘要** 带有模糊量词的推理在计算机科学特别是人工智能中十分重要. 模糊量词具有"统计"的性质. 本文将从此角度讨论模糊量词的形式化及带有模糊量词的推理. 本文的结果可应用在专家系统等智能系统中.

## §1. 引 言

在模糊逻辑中形式地引入模糊量词,并进行带有模糊量词的模糊推理,在计算机自动推理中十分重要.

自然语言中关于一命题的量化陈述,往往具有模糊性,例如:

(1)Most birds can fly.

(2)Nearly ten students are tall.

其中的 Most 和 Nearly ten 具有模糊量化的特性.

很早就有人注意到自然语言中的这种特性,例如 Montague 等人的工作[1][2] Barwise 和 Cooper 引入了表达 most 和 many 这样量化限定的"广义量词"概念,并从数理逻辑角度对这种量词和自然语言的关系进行了研究[3]. 而 Zadeh 的一系列工作,深入地分析了自然语言中量词的表现性质,形式地讨论了模糊量词的计算特性[4][5],为在模糊逻辑中形式地引入模糊量词奠定了基础. 事实上,本文的工作就是建立在 Zadeh 工作的基础上.

### 1.1 Zadeh 的模糊量词理论

按照自然语言中模糊量词的表现性质,Zadeh 将模糊量词分成如下的三种类型[5]:

(1)绝对型量词. 这类量词的例子有:

several, few, many, nearly ten, close to six 等.

(2)相对型量词. 这类量词的例子有:

most, many, much of, almost all, a large fraction 等.

本文1990年9月27日收到,1991年4月11日定稿. 本课题受国家自然科学基金,国家教委博士点基金,863计划和国家基础性研究重大项目支持. 作者石生利,1990年博士毕业于吉林大学,主要研究领域为非标准逻辑中自动推理. 刘叙华,所长,教授,博士导师,主要研究领域为定理机器证明与自动推理.

(3)比例型量词. 这类量词的例子是专家系统中的置信因子[6]等.

量化命题都是在一特定的集合(或者类)上陈述的，称此集合(或者类)为泛域. 绝对型量词是对泛域的特定子集的“大小”限定. 而相对型量词则是特定的泛域子集与整个泛域的相对比较.(有些自然语言中的量化命题既可以表现为绝对型量词，也可以表现为相对型量词，如 many 等).

Zadeh 将模糊量词看成是一“模糊数”，但又不与模糊数有相同的外延. 由于模糊数实际上是限定了一模糊集合，因此模糊数间的运算就可以作为模糊量词间的运算. 例如，Zadeh 定义了如下的三段论推理：

$$\frac{Q_1.\,\varphi(x) \qquad Q_2.\,(\varphi(x)\rightarrow\psi(x))}{Q_1\otimes Q_2.\,\psi(x)}$$

其中 $Q_1\otimes Q_2$ 为模糊量词 $Q_1$ 和 $Q_2$ 的内积.

Zadeh 的理论注重从模糊集合角度讨论模糊量词的性质，因此掩盖了量词所具有的统计性质. 此外，他的理论未能将模糊量词形式化引入模糊逻辑系统中.

### 1.2 概率量词

由量词所限定的命题实际表达了命题在泛域上的“可能”分布，即量词具有统计性质. H. J. Keisler 和 D. N. Hoover 最先研究了具有统计性质的量词理论——概率量词理论[7]. 概率量词理论以传统的概率论为基础.

非形式上，具有概率量词的公式(一阶情形)形为$(Px\geqslant r).\varphi(x)$，其中 $r\in[1,0]$. 公式$(Px\geqslant r).\varphi(x)$为真，如果有模型 $\mu$，使得 $\varphi(a)$ 在 $\mu$ 中为真的 a 组成的集合是可测的且其测度大于等于 r. 泛域作为完全事件，其测度为 1. 因此，适当的测度定义可以表达使一命题成立的元素组成的泛域子集的“统计性质”.

本文以 Keisler 的概率量词理论为基础，研究模糊量词的性质. 所基于的模糊逻辑系统是取值在格上的算子模糊逻辑 OFL[8]. 本文给出的形式化模糊量词的结果，可应用于专家系统的不精确推理中.

## §2. 基本概念

### 2.1 算子格与算子模糊逻辑(OFL)

算子模糊逻辑是一种具有较好形式化的系统. 本文给出 OFL 的基本结果，详细见[8]. 为方便讨论，假定 OFL 中不含有量词.

**定义 1**：设$<L,\leqslant>$为一有余完全分配格. $\circ$为 L 上一二元代数运算. 如果对于 L 中任意的 a,b,c，如下的公理成立，则称$<L,\leqslant,\circ>$为一算子格：

(1)$a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c)$

(2)$a\circ(b\oplus c)=(a\circ b)\oplus(a\circ c)$

(3)$(a\circ b)'=a'\circ b'$

其中的 $*$，$\oplus$和 $'$ 分别是格$<L,\leqslant>$中的下，上确界运算和余运算.

例 1：闭区间[0,1]在如下运算下构成算子格：

(1)$a'=1-a$

(2)$a*b=\min\{a,b\}$

(3)$a\oplus b=\max\{a,b\}$

(4)$a\circ b=(a+b)/2$

其中 $a,b\in[0,1]$. 特别此算子格是线性的. 以下讨论将在此算子格下进行.

**定义 2**：OFL 的语言由如下的符号组成：

(1)变元符号：x,y,z,…

(2)常量符号：a,b,c,…

(3)函数符号：f,g,h,…

(4)谓词符号：A,B,C,….

(5)逻辑连接词：$\wedge,\vee,\sim,\rightarrow$

(6)模糊因子集：$\lambda,\lambda_1,\dots\in[0,1]$算子格

(7)辅助符号：(,),·

**定义 3**：OFL 的项，原子公式和模糊原子公式定义如下：

(1)变元符号和常量符号是项.

(2)若 f 为 n 元函数符号, $t_1,\cdots,t_n$ 是项,则 $f(t_1,\cdots,t_n)$是项.

(3)若 A 为 n 元谓词符号($n\geqslant 0$), $t_1,\cdots,t_n$ 是项,则 $A(t_1,\cdots,t_n)$是原子公式.

(4)若 A 为原子公式, $\lambda\in[0,1]$,则 $\lambda A$ 是模糊原子公式.

**定义** 4:OFL 的公式定义如下:

(1)模糊原子公式是公式.

(2)若 $\varphi,\psi$ 是公式,则:

$\sim\varphi,\varphi\wedge\psi,\varphi\vee\psi,\varphi\rightarrow\psi$

是公式.

(3)若 $\varphi$ 是公式, $\lambda\in[0,1]$,则 $\lambda\varphi$ 是公式.

**定义** 5:OFL 模型 $\mu$ 为如下的结构:

$$\mu=\langle M,I\rangle$$

其中 M 为解释域,I 为一解释.对常量符号,函数符号和谓词符号给出如下的赋值:

(1)若 a 为常量符号,则 $I(a)\in M$

(2)若 f 为 n 元函数符号,则 $I(f):M^n\rightarrow M$

(3)若 A 为 n 元谓词符号,则 $I(A):M^n\rightarrow\{0,1\}$

**定义** 6:OFL 的公式在 OFL 的模型 $\mu=\langle M,I\rangle$ 下的真值定义如下:(公式 $\varphi$ 的真值记为 $\mu(A)$)

(1)若 $\lambda A$ 为一模糊原子公式,则

$$\mu(\lambda A)=\begin{cases}\lambda, & 若\ I(A)=1\\ \lambda', & 若\ I(A)=0\end{cases}$$

(2)若 $\varphi,\psi$ 是公式,则

$$\mu(\sim\varphi)=(\mu(\varphi))'$$

$$\mu(\varphi\wedge\psi)=\mu(\varphi)*\mu(\psi)$$

$$\mu(\varphi\vee\psi)=\mu(\varphi)\oplus\mu(\psi)$$

$$\mu(\varphi\rightarrow\psi)=\mu(\sim\varphi\vee\psi)$$

$$\mu(\lambda\varphi)=\lambda\circ\mu(\varphi)$$

### 2.2 概率模型

本节将 OFL 的模型扩充为概率模型.概率模型用于解释量词.

**定义** 7:设 M 为一非空集合.S 为由 M 的子集组成的域(field). $\mu:S\rightarrow[0,1]$是 S 上的测度,对于任意的 $X\in S$ ,X 是 $\mu$ 可测的,且 $\mu(M)=1$.如果对于任意的 $X,Y\in S$, $\mu$ 满足:

$$\mu(X\cup Y)=\mu(X-Y)+\mu(Y-X)+\mu(X\cap Y)$$

则称 $\mu$ 是有限可加概率测度. $\langle M,S,\mu\rangle$称为有限可加概率空间.进一步,如果 S 为一子域且 $\mu$ 是可数可加的,即对于 S 中任意的序列: $x_0\subset x_1\subset\cdots$,有:

$$\mu(\bigcup_n X_n)=\lim_n\mu(X_n)$$

则称$\langle M,S,\mu\rangle$为可数可加概率空间.

**定义** 8:设 $\mu=\langle M,I\rangle$为 OFL 的模型.定义 $\mu$ 的扩充概率模型 $\mu^P$ 如下:

$$\mu^P=\langle M,I,S,\mu\rangle$$

其中$\langle M,S,\mu\rangle$为一可数可加概率空间,M 是单点 $\mu$ 可测的.

$\mu^P$ 对于 OFL 的公式解释与 $\mu$ 相同.将用 $\mu^P$ 解释模糊量词.在以下讨论中, $\mu^P$ 简记为 $\mu$.

## §3. 模糊量词

### 3.1 基本定义

**定义** 9:设 $\mathscr{L}$ 为 OFL 的语言, $Q=\{\mathbf{F},\mathbf{F}_1,\cdots\}$为一新的可数符号集,定义模糊量词语言 $\mathscr{L}_Q=\mathscr{L}\cup Q$,Q 中的元素称为模糊量词.

**定义** 10:模糊量词是实数区间[0,1]到算子格上的函数.

**定义** 11: $\mathscr{L}_Q$ 的公式定义如下:

(1)~(4)同定义 4 的(1)~(4);

(5)若 $\varphi(x)$为公式,x 为一变元符号, $\lambda\in[0,1]$, $\mathbf{F}\in Q$,则$(\mathbf{F}x\geqslant\lambda).\varphi(x)$是公式,其中$\geqslant$是算子格中格序$\leqslant$的逆序.

**定义** 12: $\mathscr{L}_Q$ 的公式在概率模型 $\mu=\langle M,I,S,\mu\rangle$下的真值定义如下:

(1)~(2)同定义 6 的(1)~(2);

(3)若$(\mathbf{F}x\geqslant\lambda).\varphi(x)$为公式,则

$$\mu((\mathbf{F}x\geqslant\lambda).\varphi(x))=\mathbf{F}(\mu(\{a\mid\mu(\varphi(a))\geqslant\lambda\}))$$

**定义** 13：设 $\varphi$ 为 $\mathscr{L}_Q$ 的公式，$\lambda\in[0,1]$. 如果有模型 $\mu$ 使得 $\mu(\varphi)\geqslant\lambda(\mu(\varphi)\leqslant\lambda)$，则称 $\varphi$ 在 $\mu$ 中是 $\lambda$—真的（$\lambda$—假的）. 若 $\varphi$ 在所有模型中均是 $\lambda$—真的（$\lambda$—假的），则称 $\varphi$ 是 $\lambda$—恒真（$\lambda$—恒假）.

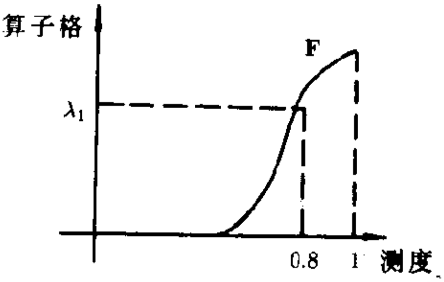


图 1

公式 $(\mathbf{F}x\geqslant\lambda).\varphi(x)$ 表示使 $\varphi(a)$ 为 $\lambda$—真的元素 a 所组成的集合在统计表现下的真假程度. 测度表达了一种统计性质，而模糊量词则给出了统计的真值限定.

例 2：设 **F** 为图 1 的模糊量词. $\mu$ 为一模型

$\mu(\{a\mid\mu(\varphi(a))\geqslant\lambda\})=0.8$

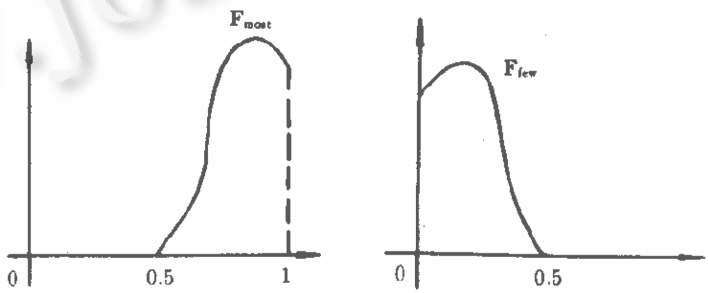
$\mathbf{F}(0.8)=\lambda_1$

则：$\mu((\mathbf{F}x\geqslant\lambda).\varphi(x))=\mathbf{F}(0.8)=\lambda_1$

即 $(\mathbf{F}x\geqslant\lambda).\varphi(x)$ 在 $\mu$ 下的真值为 $\lambda_1$.

例 3：设 M 为一有限集. 定义测度 $\mu:2^M\to[0,1]$ 为：$\mu(D)=|D|/|M|$，其中 $|D|$ 表示 D 的基数，则图 2(a) 可表达模糊量词 most，(b) 可表达 few.

### 3.2 模糊量词的基本性质



(a) (b)

图 2

**命题** 1：设 $\psi$ 中不含自由变元 x，则：

(1) $(\mathbf{F}x\geqslant\lambda).(\varphi(x)\vee\psi)=(\mathbf{F}x\geqslant\lambda).\varphi(x)\vee\psi$

(2) $(\mathbf{F}x\geqslant\lambda).(\varphi(x)\wedge\psi)=(\mathbf{F}x\geqslant\lambda).\varphi(x)\wedge\psi$

设 $\mu$ 为一模型，$\varphi,\psi$ 为公式，令：

$$D_1=\{a\mid\mu(\varphi(a))\geqslant\lambda\}\neq\varnothing$$
$$D_2=\{a\mid\mu(\psi(a))\geqslant\lambda\}\neq\varnothing$$

且 $D_1\cap D_2=\varnothing$. 显然

$$\mu(D_1\cup D_2)=\mu(D_1)+\mu(D_2)>\mu(D_1)\text{ 或 }\mu(D_2)$$

而 **F** 可看成是测度区间 $[0,1]$ 到算子格 $[0,1]$ 上的函数，则可经过适当选取，使得：

$$\mathbf{F}(\mu(D_1\cup D_2))\neq\mathbf{F}(\mu(D_1))\oplus\mathbf{F}(\mu(D_2))$$

故
$$\begin{aligned}&\mu((\mathbf{F}x\geqslant\lambda).(\varphi(x)\vee\psi(x)))\\&=\mathbf{F}(\mu(\{a\mid\mu(\varphi(a)\vee\psi(a))\geqslant\lambda\}))\\&=\mathbf{F}(\mu(D_1\cup D_2))\\&\neq\mathbf{F}(\mu(D_1))\oplus\mathbf{F}(\mu(D_2))\end{aligned}$$

即 $(\mathbf{F}x\geqslant\lambda).(\varphi(x)\vee\psi(x))\neq(\mathbf{F}x\geqslant\lambda).\varphi(x)\vee(\mathbf{F}x\geqslant\lambda).\psi(x)$

类似可证 $(\mathbf{F}x\geqslant\lambda).(\varphi(x)\wedge\psi(x))\neq(\mathbf{F}x\geqslant\lambda).\varphi(x)\wedge(\mathbf{F}x\geqslant\lambda).\psi(x)$

这表明，对于具有模糊量词的公式，不能进行直接转换得到某种范式表示.

### 3.3 对偶模糊量词

自然语言中许多模糊量词都具有“统计”上的对偶陈述. 例如 most 和 a few，almost 和 little 等. 称这种对偶性为测度对偶.

**命题** 2：设 $\mu$ 为一测度，$\mu(M)=1$，$D\subset M$. 则

$$\mu(M-D)+\mu(D)=1$$

**定义** 14：设 $\mathbf{F}$ 为一模糊量词. 定义 $\mathbf{F}$ 的测度对偶模糊量词 $\mathbf{F}^*$ 如下：$\mathbf{F}^*$ 为一模糊量词，且对于 $a \in [0,1]$，$\mathbf{F}(a)=\lambda \Leftrightarrow \mathbf{F}^*(1-a)=\lambda$.

命题 2 保证了上述定义的合理性. 测度对偶表达了模糊量词关于测度中点(0.5)的对称. 例如，most 和 a few 的测度对偶可表示如图 3 所示.

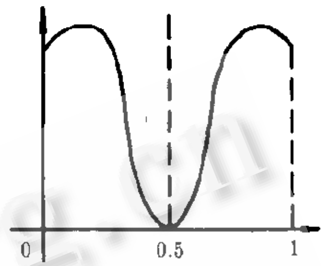



图 3

**定理** 1：公式 $(\mathbf{F}x \geqslant \lambda).\varphi(x)$ 和 $(\mathbf{F}^* x \geqslant \lambda').\sim\varphi(x)$ 等价.

证明：设 $\mu=\langle M,I,S,\mu\rangle$ 为一模型. $D=\{a \mid \mu(\varphi(a)) \geqslant \lambda\}$. 则由 $\{a \mid \mu(\sim\varphi(a)) \geqslant \lambda'\}=\{a \mid \mu(\varphi(a)) \leqslant \lambda\}=M-D$，故

$\mu(M-D)=1-\mu(D)$，　$\mathbf{F}(\mu(D))=\mathbf{F}^*(1-\mu(D))=\mathbf{F}^*(\mu(M-D))$　　证毕.

下面考虑模糊量词的另一种对偶形式——真值对偶性. 真值对偶性由算子格[0,1]是线性的保证了其对称性.

在自然语言中有如下的等价陈述：

(1)不是大部分人是年轻的；

(2)大部分人是不年轻的.

但这种等价性不能表示成如下的公式等价：

$$\sim(\mathbf{F}x \geqslant \lambda).\varphi(x) \neq (\mathbf{F}x \geqslant \lambda).\sim\varphi(x)$$

例 4：设 $\mu$ 为一模型. 令 $D=\{a \mid \mu(\varphi(a)) \geqslant \lambda\}$，$D'-\{a \mid \mu(\sim\varphi(a)) \geqslant \lambda\}=\{a \mid \mu(\varphi(a)) \leqslant \lambda'\}$. 设 $\mu(D)=0.8$，$\mu(D')=0.1$，$\mathbf{F}$ 为如图 4 所示的模糊量词，则：

$$(0.6)'=0.4 \neq \mathbf{F}(0.1)=0$$

即 $\sim(\mathbf{F}x \geqslant \lambda).\varphi(x) \neq (\mathbf{F}x \geqslant \lambda).\sim\varphi(x)$

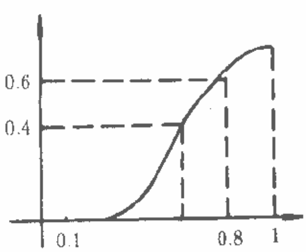



图 4

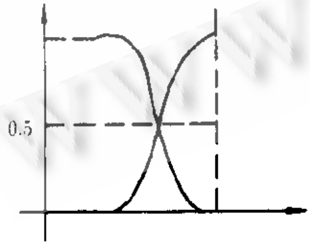



图 5

**定义** 15：设 $\mathbf{F}$ 为一模糊量词. 定义 $\mathbf{F}$ 的真值对偶模糊量词 $\overline{\mathbf{F}}$ 如下：$\overline{\mathbf{F}}$ 为一模糊量词，且对于 $a \in [0,1]$，$\mathbf{F}(a)=\lambda \Leftrightarrow \overline{\mathbf{F}}(a)=\lambda'$.

例如 most 的真值对偶模糊量词可表示为如图 5 所示.

**定理** 2：公式 $\sim(\mathbf{F}x \geqslant \lambda).\varphi(x)$ 和 $(\overline{\mathbf{F}}x \geqslant \lambda).\varphi(x)$ 等价.

证明：设 $\mu$ 为一模型. $D=\{a \mid \mu(\varphi(a)) \geqslant \lambda\}$. 由 $(\mathbf{F}(\mu(D)))'=\overline{\mathbf{F}}(\mu_1)$，可知定理成立.　　证毕.

由定理 1 和定理 2，可对公式中的“非”逻辑连接词进行化简.

## §4. 带有模糊量词的推理

本节讨论在 OFL 中进行带有模糊量词的推理，并给出推理规则.

**定义** 16：设 $\lambda_1 \geqslant 0.5$，$\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 为模糊量词.

(1)如果对于任意的 $a \in [0,1]$，$\mathbf{F}_1(a) \vee \mathbf{F}_2(a) \geqslant \lambda_1$，则称 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 是 $\lambda_1$ 真互补的；

(2)如果对于任意的 $a \in [0,1]$，$\mathbf{F}_1(a) \wedge \mathbf{F}_2(a) \leqslant \lambda'_1$，则称 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 是 $\lambda'_1$ 假互补的.

**命题** 3：设 $\lambda_1 \geqslant 0.5$. 则真值恒大于等于 $\lambda_1$ 的模糊量词与任何模糊量词 $\lambda_1$ 真互补；真值恒小于等于 $\lambda'_1$ 的模糊量词和任何模糊量词 $\lambda'_1$ 假互补.

例 5：图 6(a)中模糊量词将使(1)$\lambda_1$ 恒真；(b)中模糊量词将使(2)$\lambda'_1$ 恒假：

(1)$(\mathbf{F}_1 x \geqslant \lambda).\varphi(x) \vee (\mathbf{F}_2 x \geqslant \lambda).\varphi(x)$

(2)$(\mathbf{F}_1 x \geqslant \lambda).\varphi(x) \wedge (\mathbf{F}_2 x \geqslant \lambda).\varphi(x)$

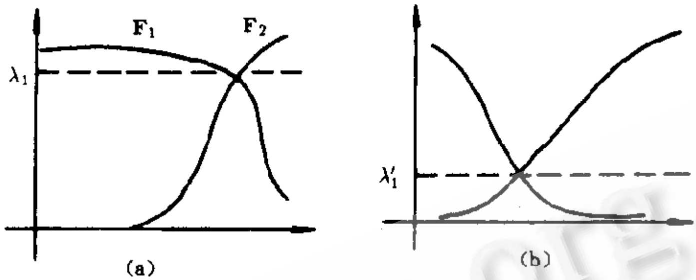



图 6

对于具有模糊量词的逻辑系统，由于公式不存在范式表示，也无法给出 Skolem 量词删除规则，因此不能直接应用象一阶逻辑中归结原理[9]一类的推导方法. 下面给出一种类似于 Gentzen 矢列演算和 Smullyan 的 Tableaux 方法的推导系统. 以下讨论中假设所有的模糊因子只在原子公式之前. 有关 λ－互补文字，λ－空子句等概念见[8].

**定义** 18：子句是公式的有限集合. 设 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ 是公式，子句记为$[\varphi_1,\cdots,\varphi_k]$. 子句集是子句的有限集合. 设 $C_1,\cdots,C_t$ 是子句，则子句集记为$[C_1,\cdots,C_t]$.

子句中的公式是析取关系，子句集中子句是合取关系. 用$[X|Y]$表示子句或子句集中含有 X 且余下成份是 Y 的集合，且 Y 中不含有 X.

推导方法仍是一种基于归结的方法. 设 $\lambda_1 \geqslant 0.5$，为证明公式 $\varphi$ 是 $\lambda_1$ 恒真的，去证明 $\sim\varphi$ 的子句集$[\sim\varphi]$是 $\lambda'_1$ 恒假的. 规则以推导的方式给出. 用 $\varphi \mapsto \psi$ 表示将 $\psi$ 加入到原来子句集中；用 $\varphi \Rightarrow \psi$ 表示用 $\psi$ 代替 $\varphi$.

**推理系统 FQ**：设 $\lambda_1 \geqslant 0.5$

(1)归结规则

$[L_1|X],[L_2|Y] \mapsto [X \cup Y]$

其中 $L_1$ 和 $L_2$ 是 $\lambda_1$ 互补文字；

(2)化子句规则

(a)$[\varphi \wedge \psi|X] \Rightarrow [\varphi|X],[\psi|X]$

(b)$[\varphi \vee \psi|X] \Rightarrow [\varphi,\psi|X]$

(c)$[\sim(\varphi \wedge \psi)|X] \Rightarrow [\sim\varphi,\sim\psi|X]$

(d)$[\sim(\varphi \vee \psi)|X] \Rightarrow [\sim\varphi|X],[\sim\psi|X]$

(e)$[\varphi \to \psi|X] \Rightarrow [\sim\varphi,\psi|X]$

(f)$[\sim(\varphi \to \psi)|X] \to [\varphi|X],[\sim\psi|X]$

(3)模糊量词规则

(a)设 **F** 是 $\lambda_1$ 恒真量词

$[[(\mathbf{F}x \geqslant \lambda).\varphi|X]|Y] \Rightarrow Y$

(b)设 **F** 是 $\lambda'_1$ 恒假量词

$[[(\mathbf{F}x \geqslant \lambda).\varphi|X]|Y] \Rightarrow [X|Y]$

(c)设 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 是 $\lambda_1$ 真互补量词

$[[(\mathbf{F}_1 x \geqslant \lambda).\varphi,(\mathbf{F}_2 x \geqslant \lambda).\varphi|X]|Y] \Rightarrow Y$

(d)设 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 是 $\lambda'_1$ 假互补量词

$[[(\mathbf{F}_1 x \geqslant \lambda).\varphi,(\mathbf{F}_2 x \geqslant \lambda).\varphi|X]|Y] \Rightarrow [X|Y]$

(e)$[\sim(\mathbf{F}x \geqslant \lambda).\varphi|X] \Leftrightarrow [(\overline{\mathbf{F}}x \geqslant \lambda).\varphi|X]$

$[(\mathbf{F}x \geqslant \lambda).\varphi|X] \Leftrightarrow [(\mathbf{F}^{*}x \geqslant \lambda').\sim\varphi|X]$

其中⇔表示可进行双向推导.

**定理** 3：上述推理规则是可靠的.

证明：易知(1)和(2)成立. (3)中(e)由定理 1 和定理 2 保证. (3)中(a)～(d)由相应定义可知成立.　　证毕.

例 6：公式

$$(\mathbf{F}_{most} x \geqslant \lambda).\varphi(x) \to (\mathbf{F}_{a\ few} x \geqslant \lambda').\sim\varphi(x)$$

可解释为：若"大部分"x，$\varphi(x)$是 λ 真的，则"小部分"x，$\sim\varphi(x)$是 $\lambda'$ 真的. 上式恒真性的证明如下：

$[[\sim((F_{most}x \geqslant \lambda).\varphi(x) \rightarrow (F_{a\ few}x \geqslant \lambda').\sim\varphi(x))]]$

$\Rightarrow [[(F_{most}x \geqslant \lambda).\varphi(x), \sim(F_{a\ few}x \geqslant \lambda').\sim\varphi(x)]]$ (2.f)

$\Rightarrow [[(F_{most}x \geqslant \lambda).\varphi(x), \sim(F^{*}_{a\ few}x \geqslant \lambda).\varphi(x)]]$ (3.e)

$\Rightarrow [[(F_{most}x \geqslant \lambda).\varphi(x), \sim(F_{most}x \geqslant \lambda).\varphi(x)]]$ (1)

$\Rightarrow \square$

上述系统并不是完备的.例如,如下的三段论推理模式:

80% students are male

60% male students are single

---

48% students are male and single

无法形式化到FQ系统中.原因是上述推理模式并不与OFL逻辑中推理模式:

80% x.m(x)

60% x.(m(x)→s(x))

---

80%⊗60% x.s(x)

相等价,其中⊗表示量词中的某种运算.事实上,上述推理模式需建立在可表达自然语言的逻辑上.

**讨论**:在人工智能中,形式处理模糊量词既是非常重要的,也是比较困难的.本文通过将模糊量词看成是统计上的限定到模糊真值上的映射,给出了处理模糊量词的一种方法,并得到了一些初步结果.推理系统FQ能在一定程度上处理人工智能系统中带有模糊量词的推理,进一步的工作有:

(1)模糊量词性质的研究.例如,本文处理量词统计特征方法是基于随机变量的特性.另一方面,应用积分理论代替随机变量方法可能会更深刻地刻划模糊量词的性质.

(2)基于模糊量词的逻辑系统的研究.自然语言的量化推理模式并不与通常的逻辑系统(带有模糊量词)的推理模式等价.这也是本文与Zadeh关于自然语言量化推理的区别.需要进一步研究在本文形式处理模糊量词基础上可表达自然语言量化推理的逻辑系统.

(3)有效的带有模糊量词完备推理系统的研究.本文给出的FQ系统既不是完备的而且效率也较低,需要进一步考虑更实用的推理系统.

## 参考文献

[1] R. Montague, Formal Philosophy, In: Selected Papers (Ed. by R. Thomason), Yale University Press (1974).

[2] D. R. Dowty, et al., Introduction to Montague Semantics, Reidel (1981).

[3] J. Barwise & R. Cooper, Generalized Quantifiers and Natural Language, Linguistics and Philosophy, 4(1981), 159—219.

[4] L. A. Zadeh, Fuzzy Logic and Approximate Reasoning, Synthese, 30(1975), 407—428.

[5] L. A. Zadeh, A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Language, Comp. and Maths. with Appls., 9 (1983), 149—184.

[6] E. H. Shortliffe, Computer—Based Medical Consultations: MYCIN, Elsevier, New York (1979).

[7] H. J. Keisler, Probability Quantifiers, In: Model—Theoretic Logic (Ed. by J. Barwise & S. Feferman), Springer—Verlag (1985).

[8] 刘叙华,《模糊逻辑与模糊推理》,吉林大学出版社,1989.

[9] 刘叙华,姜云飞,《机器定理证明》,科学出版社,1989.