

# Bézier 三角曲面片生成显示与求交算法

田 捷

(中科院自动化所国家模式识别实验室)

## THE GENERATION AND DISPLAY ALGORITHM AND INTERSECTION ALGORITHMS OF TRIANGULAR BÉZIER SURFACES

Tian Jie

(Institute of Automation, Academia Sinica)

### ABSTRACT

In this article, the convergent property of midpoint subdivision Bézier nets of triangular Bézier surfaces are proved. On the basis of the property, the generation and display algorithm and intersection algorithms of triangular Bézier surface are given according to midpoint subdivision algorithm.

### 摘 要

本文在证明了 Bézier 三角曲面片的中点剖分网格收敛性质的基础上, 通过中点剖分算法给出了 Bézier 三角曲面片的生成显示算法与求交算法。

### § 1. 引 言

曲面造型是 CAD/CAM 技术的核心, 目前 Bézier 矩形曲面片即张量积 Bézier 曲面已成为曲面造型的主要方法, 并且成功地应用于计算机辅助外形设计的实用系统<sup>[1]</sup>。然而, 从构造曲面的区域来看, 尽管张量积曲面可以描述实际应用中的很多曲面, 但是对于实际应用中的许多问题是 Bézier 矩形片难以胜任的, 例如汽车车身约有二十多块呈三角形的曲面, 如果用退化张量积曲面来描述这些三角曲面片就会导

致一些不良后果<sup>[2]</sup>。所以直接在三角域上构造 Bézier 三角曲面片无论在理论上还是在实用上都具有重要意义。近年来, Barnhill 和 Farin 等人把 Coons 曲面片的思想推广到三角域, 采用重心坐标导出三角域上的 Bézier 曲面, 从而增加了曲面构造区域的灵活性和实用性, 引起了大家的重视和研究<sup>[2]</sup>, 目前 Bézier 三角曲面片的理论很丰富, 但要使其在实用系统中得以应用还需要给出一些实用算法, 如生成显示算法与求交算法, 以及解决 Bézier 三角曲面片与 Bézier 矩形曲面片的光滑拼接问题。本文通过证明三角域上 Bézier 曲面中点剖分后的网格收敛性质, 在剖分网格收敛性的保证下, 利用中点剖分算法导出 Bézier 三角曲面片的生成显示算法与求交算法。至于 Bézier 三角片与 Bézier 矩形片的拼接算法已在另文<sup>[7]</sup>中给出。

## §2. 中点剖分的网格收敛性质

Farin 和 Goldman 等人都讨论过 Bézier 三角曲面片的剖分算法<sup>[2,3]</sup>, Farin 给出的是中心剖分(剖分成三片), Goldman 给出了中点剖分(剖分成四片), 虽然中心剖分比中点剖分所得的三角片数目少, 从而计算量也少, 但是中心剖分后所得的三角片的三边之一为原曲面片的边, 即中心剖分后的边长不是一致地减少的, 这将给 CAM 过程中的后置加工处理带来严重的数值误差<sup>[4]</sup>, 而中点剖分后的边长则是一致地减少的, 所以权衡利弊, 我们采用中点剖分来导出 Bézier 三角曲面片的生成显示算法与求交算法。

记  $T = \Delta T_1 T_2 T_3$  为基域三角形,  $T$  上的  $n$  次 Bézier 曲面可以表示为:

$$b^n(p) = \sum_{i+j+k=n} b_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(p) \quad p \in T \quad (2.1)$$

其中:

$b_{i,j,k} (i+j+k=n) \in \mathbb{R}^3$  称为(2.1)式的 Bézier 点,

$B_{i,j,k}^n(p) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k$  是  $n$  次 Bernstein 基函数,

$(u, v, w)$  是点  $p$  关于  $T$  的重心坐标。

由  $\{b_{i,j,k}, i+j+k=n\}$  构成的 Bézier 网(分片线性函数)记为  $b_n(p)$ , 由(2.1)式易见, 曲面(2.1)式插值于  $b_n(p)$  的三个角点, 且整个曲面位于  $b_n(p)$  的凸包之中<sup>[2]</sup>。

定理1. 设  $p_i (i=1, 2, 3)$  是基域三角形  $T$  的三边的中点, 则中点剖分后的 4 个  $n$  次 Bézier 三角片相应的 Bézier 点分别为:

在  $\Delta T_3 p_1 p_2$  上为:

$$b_{0,0,k}^{r,s,0} \quad (k+r+s=n, 0 \leq r, s, k \leq n) \quad (2.2)$$

在  $\Delta T_1 p_2 p_3$  上为:

$$b_{i,0,0}^{r,s,t} \quad (i+t+s=n, 0 \leq i, s, t \leq n) \quad (2.3)$$

在  $\Delta T_2 p_1 p_3$  上为:

$$b_{0,j,0}^{r,t,0} \quad (j+r+t=n, 0 \leq r, t, j \leq n) \quad (2.4)$$

在  $\Delta p_1 p_2 p_3$  上为:

$$b_{0,o,o}^{r,s,t} \quad (r+s+t=n, 0 \leq r,s,t \leq n) \quad (2.5)$$

其中:

$$\begin{aligned} b_{i,j,k}^{r+1,s,t} &= (b_{i,j+1,k}^{r,s,t} + b_{i,j,k+1}^{r,s,t})/2 \\ b_{i,j,k}^{r,s+1,t} &= (b_{i+1,j,k}^{r,s,t} + b_{i,j,k+1}^{r,s,t})/2 \\ b_{i,j,k}^{r,s,t+1} &= (b_{i+1,j,k}^{r,s,t} + b_{i,j+1,k}^{r,s,t})/2 \\ i+j+k &= n-r-s-t-1 \end{aligned}$$

这里的  $b_{i,j,k}^{r,s,t}$  ( $i+j+k=n-r-s-t$ ) 为 de Casteljau 点<sup>[2]</sup>。

定理1的证明由 Goldman 给出<sup>[3]</sup>, 由定理1 我们可以得到下面的中点剖分算法。

算法1:  $n$  次 Bézier 三角曲面片的中点剖分

输入:  $b = \{b_{i,j,k}, i+j+k=n\} \quad (n \geq 1)$

输出:  $S = \{S_{i,j,k}, i+j+k=n\}$

$Q = \{Q_{i,j,k}, i+j+k=n\}$

$P = \{P_{i,j,k}, i+j+k=n\}$

$T = \{T_{i,j,k}, i+j+k=n\}$

Procedure subsub ( $b, S, Q, P, T, n$ )

begin

step 1. [Initialize]

$$S_{n,o,o} \leftarrow b_{n,o,o}$$

$$Q_{o,n,o} \leftarrow b_{o,n,o}$$

$$P_{o,o,n} \leftarrow b_{o,o,n}$$

step 2. [Compute Bezier points]

for  $0 \leq l \leq n-1$

for  $0 \leq i \leq n-l-1, 0 \leq j \leq n-l-i-1, k = n-l-i-j-1$

for  $0 \leq r \leq l, 0 \leq s \leq l-r, t = l-r-s$

$$b_{i,j,k}^{r+1,s,t} \leftarrow (b_{i,j+1,k}^{r,s,t} + b_{i,j,k+1}^{r,s,t})/2$$

$$b_{i,j,k}^{r,s+1,t} \leftarrow (b_{i+1,j,k}^{r,s,t} + b_{i,j,k+1}^{r,s,t})/2$$

$$b_{i,j,k}^{r,s,t+1} \leftarrow (b_{i+1,j,k}^{r,s,t} + b_{i,j+1,k}^{r,s,t})/2$$

$$P_{r+1,s,k} \leftarrow b_{o,o,k}^{r+1,s,o}$$

$$P_{r,s+1,k} \leftarrow b_{o,o,k}^{r,s+1,o}$$

$$Q_{r+1,j,t} \leftarrow b_{o,j,o}^{r+1,o,t}$$

$$Q_{r,j,t+1} \leftarrow b_{o,j,o}^{r,o,t+1}$$

$$S_{i,s+1,t} \leftarrow b_{i,o,o}^{o,s+1,t}$$

$$S_{i,s,t+1} \leftarrow b_{i,o,o}^{o,s,t+1}$$

$$T_{r+1,s,t} \leftarrow b_{o,o,o}^{r+1,o,t}$$

$$T_{r,s+1,t} \leftarrow b_{o,o,o}^{r,s+1,t}$$

$$T_{r,s,t+1} \leftarrow b_{o,o,o}^{r,s,t+1}$$

result:  $S, Q, P, T$   
end

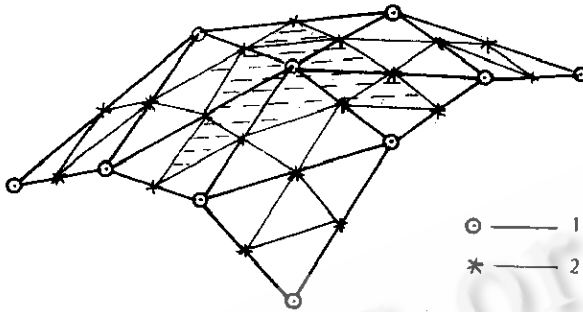


图 1 三次 Bézier 曲面的中点剖分(剖分一次)

其中: 1. 分别为原曲面的网格点与网格线;

2. 分别为剖分后曲面的网格点与新产生的网格线。

为了得到 Bézier 三角曲面片的生成显示与求交算法, 我们必须要有中点剖分后网格收敛性质并估计其收敛速度。

原曲面的 Bézier 网  $b_n(p)$  在剖分一次后, 由剖分后的相应 4 片曲面的 Bézier 点  $P, Q, S, T$  构成相应于这 4 片上的 Bézier 网再组合成原曲面的 Bézier 网记为  $b_n^{(1)}(p)$ , 第  $m$  次剖分后曲面被剖分成  $4^m$  片相应于原曲面的 Bézier 网记为  $b_n^{(m)}(p)$ 。

引理 1: 设  $p, q$  为原曲面(2.1)式未剖分前的任意相邻的两个 Bézier 点, 则有

$$|p - q| \leq M/2 \tag{2.6}$$

其中:

$$M = \max_{i+j+k=n-1} \{ |b_{i+1,j,k} - b_{i,j+1,k}|, |b_{i,j+1,k} - b_{i,j,k+1}|, |b_{i+1,j,k} - b_{i,j,k+1}|, i+j+k = n-1 \}$$

证明: 由  $b_n^{(1)}(p)$  的构造知, 只须证明剖分后相应的 4 片曲面各自的 Bézier 点均满足(2.6)式, 下面我们仅对  $\Delta p_1 p_2 p_3$  上的网格来证明, 其余均可同理得到。

由(2.5)式知  $\Delta p_1 p_2 p_3$  上的 Bézier 点为  $T_{0,0,0}^{r,s,t} (r+s+t=n)$ , 其相邻 Bézier 点为:

$$T_{0,0,0}^{r+1,s,t}, T_{0,0,0}^{r,s+1,t}, T_{0,0,0}^{r,s,t+1}, (r+s+t = n-1)$$

剖分的 de Casteljau 点为:

$$T_{i,j,k}^{r,s,t} \quad (r+s+t=l, i+j+k = n-l)$$

对  $l$  用数学归纳法,

当  $l=1$  时, 引理显然成立,

设当  $l < n$  时引理亦真,

则当  $l = n$  时, 由于  $r + s + t + 1 = n$  且  $0 \leq r, s, t \leq n - 1$ , 不失一般性, 不妨设  $r \geq 1$ , 由剖分点为中点可知:

$$\begin{aligned}
 |T_{o,o,o}^{r+1,s,t} - T_{o,o,o}^{r,s+1,t}| &= (|T_{o,1,o}^{r,s,t} + T_{o,o,1}^{r,s,t} - T_{o,1,o}^{r-1,s+1,t} - T_{o,o,1}^{r-1,s+1,t}|)/2 \\
 &\leq (|T_{o,1,o}^{r,s,t} - T_{o,1,o}^{r-1,s+1,t}| + |T_{o,o,1}^{r,s,t} - T_{o,o,1}^{r-1,s+1,t}|)/2
 \end{aligned}$$

于是由归纳假设即知

$$|T_{o,o,o}^{r+1,s,t} - T_{o,o,o}^{r,s+1,t}| \leq M/2$$

同理可得

$$|T_{o,o,o}^{r+1,s,t} - T_{o,o,o}^{r,s,t+1}| \leq M/2, |T_{o,o,o}^{r,s,t+1} - T_{o,o,o}^{r,s+1,t}| \leq M/2$$

引理2: 设  $s, t$  为曲面(2.1) 式在  $m$  次剖分后任意相邻的两个Bezier 点, 则有

$$|s - t| \leq M/2^m \quad (m \geq 1) \tag{2.7}$$

引理2 的证明易由对剖分次数使用归纳法而得到, 由引理2 可得下面的中点剖分的网格收敛定理。

定理2. 随着中点剖分次数的增加, 剖分网格收敛于原曲面, 即:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_n^{(m)}(p) = b^n(p) \tag{2.8}$$

证明: 对于  $m$  次剖分后的 Bézier 网  $b_n^{(m)}(p)$ , 由其构造易证 Bezier 三角曲面片插值于网格角点的插值性和曲面位于  $b_n^{(m)}(p)$  的凸包之中的凸包性仍然成立, 由引理2 知, 随着剖分次数的增大,  $b_n^{(m)}(p)$  的网格边长趋于零, 故由曲面对  $b_n^{(m)}(p)$  的凸包性和角点插值性可知, 随着剖分次数  $m$  趋于无穷,  $b_n^{(m)}(p)$  在  $T$  上一致地收敛于曲面  $b^n(p)$ 。

### §3. 生成显示算法与求交算法

由(2.7) 式可知中点剖分后的网格收敛于曲面的速度为  $1/2^m$  ( $m$  为剖分次数), 而利用升阶公式得到升阶后的网格收敛于原曲面的速度仅为  $1/k$  ( $k$  为升阶次数)<sup>[6]</sup>, 因此用中点剖分的方法进行曲面的离散化比用升阶的方法要快得多, 下面我们给出基于中点剖分的 Bézier 三角曲面片的生成显示算法与求交算法。

定理2 表明, 只要中点剖分次数足够多, 则相应的 Bézier 网离曲面就足够近, 从而可以用显示过剖分后相应各小片 Bézier 网的三个角点的平面片(三角形) 来代替显示曲面, 而(2.7) 式表明, 剖分后的 Bezier 网与原曲面的接近程度(取决于剖分次数) 可以用网上相邻两点间的距离小于容差(取决于显示器的分辨率) 来度量, 这称之为收敛性检验, 等价地也可以用剖分后各个小曲面片的相应 Bezier 网上任一个 Bezier 点到

由其三个角点构成的平面上的距离小于容差来检验, 这种检验称为平坦性检验, 一旦平坦性条件满足就可以用小平面片来代替剖分后的小曲面片

记  $\pi(A, B, C)$  为由  $A, B, C$  三点决定的平面,  $l(A, B)$  为  $A, B$  两点的连线,  $d(A, B)$  为  $A, B$  间的欧氏距离,  $d(\pi, A)$  为点  $A$  到平面  $\pi$  的欧氏距离。

算法 2:  $n$  次 Bézier 三角曲面片的生成显示算法

输入:  $b = \{b_{i,j,k}, i+j+k=n\}, n,$

输出:  $b^n(p) p \in T$

Procedure surgen ( $b, n$ )

begin

step1. [Flatness testing]

for  $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n-i, k = n-i-j$

if  $d(\pi(b_{n,o,o}, b_{o,n,o}), b_{i,j,k}) < \text{Tolerance}$

$d(l(b_{n,o,o}, b_{o,n,o}), b_{i,n-i,o}) < \text{Tolerance}$

$d(l(b_{n,o,o}, b_{o,o,n}), b_{i,o,n-i}) < \text{Tolerance}$

$d(l(b_{o,n,o}, b_{o,o,n}), b_{o,i,n-i}) < \text{Tolerance}$

then output triangle  $\Delta b_{n,o,o} b_{o,n,o} b_{o,o,n}$  and return

step2. [Subdivision and retest]

subsur ( $b, S, Q, P, T, n$ )

surgen ( $S, n$ )

surgen ( $Q, n$ )

surgen ( $P, n$ )

surgen ( $T, n$ )

return

end

曲面的求交问题是几何造型系统的关键问题之一, 曲面的求交方法归纳起来主要有剖分方法、解析方法、数值方法和混合方法这四类。与解析方法和数值方法相比, 剖分方法具有不需初值条件、可靠性好(当两曲面相贯, 必能求出交线, 而解析方法与数值方法则不然)、精度高(可以由剖分次数控制精度)等优点, 但剖分方法必须要有剖分网格的收敛性做理论保证<sup>[5]</sup>, 所以由定理 2 我们给出 Bézier 三角曲面片的剖分求交算法, 其主要步骤为:

Step1. 利用最大最小盒作相交性判断, 即由曲面的 Bézier 网沿  $x, y, z$  方向的最大最小值构成一个最大最小盒(长方体), 由凸包性易知曲面含于此长方体内, 故若两曲面的最大最小盒不交, 则两曲面必不相交, 从而没必要再做剖分。

Step2. 根据相交性判断结果, 在相交的情况下进行平坦性检验, 由(2.7)式可见给定一定的剖分次数就可以满足一定的收敛性或平坦性条件, 所以采取事先给出一定的剖分次数以满足相应的精度条件, 这样就可以把平坦性检验简化为剖分次数是否达到预定数目的检验, 从而减少了许多计算量。

Step3. 根据平坦性检验结果, 在平坦性不满足的情况下剖分曲面, 直至平坦性条件满足。

Step4. 根据平坦性检验结果, 在平坦性满足的情况下, 对替代曲面的小平面片求交, 得到离散的交点。

Step5. 将所得交点排序, 得到交线并输出交线。

上述剖分求交算法对于两曲面近似相切的特殊情况, 往往由于难以选择适当的容差而导致求交失败, 为此我们再给出 Bézier 三角曲面片的混合求交算法, 即剖分方法与数值方法相结合的方法, 其主要步骤为:

Step1. 利用最大最小盒作相交性判断。

Step2. 将一张曲面按一定次数进行中点剖分, 以得到后续数值求交的初值。

Step3. 在另一曲面上取等参线并剖分等参线得到初值。

Step4. 用曲线与曲面求交的数值方法求出交点参数。

混合求交算法在一般情况下, 具有求交速度快、精度高的优点, 其缺点在于所求交点的密度不能随曲率大小而变化, 因此在曲率变化大的情况下, 求出的交点数目不能满足要求。不过这两种求交算法已足以解决一般情况下, Bézier 三角曲面片的求交问题。再结合前面给出的生成显示算法以及文<sup>[7]</sup>中给出的 Bézier 三角片与 Bézier 矩形片光滑拼接的算法, 可见这些实用算法为 Bézier 三角曲面片进入实用造型系统提供了保证。

### 参考文献

- [1] Böehm, W., Farin, G., and Kahmann, J., "A Survey of Curve and Surface Methods in CAGD", Computer Aided Geometric Design. Vol.1, No.1, (1984), 1-60.
- [2] Farin, G., "Triangular Bernstein-Bézier Patches", Computer Aided Geometric Design. Vol.3, No.1, (1986), 83-127.
- [3] Goldman, R., "Subdivision Algorithms for Bézier Triangles", Computer-Aided Design. Vol.15, No.3, (1983).
- [4] Filip, D., "Adaptive Subdivision Algorithms for A Set of Bézier Triangles", Computer-Aided Design. Vol.18, No.2, (1986), 74-78.
- [5] Lane, J., and Riesenfeld, R., "A Theoretical Development for the Computer Generation of Piecewise Polynomial Surface", IEEE, Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence. Vol.2, No.1, (1980).
- [6] Fong, Y. Y., "Rates of Convergence of Bézier Net Over Triangles", Computer Aided Geometric Design Vol. 4, No. 3, (1987), 245-249.
- [7] Tian Jie, "Geometric Continuity for Rational Bézier Triangular Patches", 《Proceeding of Second International Conference on Computer-Aided Drafting, Design and Manufacturing Technology》1989, Hangzhou.