# 示例式学习某些理论的研究*

李红斌 王开铸

(哈尔滨工业大学计算机科学系)

郭克俭

(黑龙江省电力局)

# RESEARCH ON SOME THEORIES OF LEARNING FROM EXAMPLES

Li Hongbin and Wang Kaizhu

*(Department of Computer Science, Harbin Institute of Technology)*

Guo Kejian

*(Heilongjiang Electrical Power Bureau)*

## ABSTRACT

In this paper, an initial study of learning from examples is made. After the rule-space of solutions is enlarged from normal formula solutions to all general formula solutions, the following conclusions are got:

1. Discussing the change of corresponding rules set, with the change of examples set. 2. There are no solutions when positive-examples set intersets negative-examples set. 3. If the union of positive-examples set and negative-examples set equals to the space which consists of all examples, the rule-solution is unique. 4. If the solutions exist, there must be two basic solutions, and these two solutions are maximum and minimum, under the relation of partial-order"$\Longrightarrow$". 5. The rule set for the operate $\vee$, $\wedge$ forms a bounded distributive lattice, and the two basic solutions are the upper bound and the lower bound of this lattice respectively. 6. GS theorem corresponding to GS algorithm is given.

* 1989年5月9日收到, 1989年8月15日定稿。

## 摘　要

本文对示例式学习的理论进行了初步的研究。首先，扩充了解的规则空间，由范式解扩充到任意公式解。然后，得到了如下结果：(1) 讨论了随着例子集合的变化，相应规则解集合的变化情况；(2) 正例集与反例集相交时，规则解不存在；(3) 若正例集与反例集之并等于全部例子构成的空间，则规则解唯一；(4) 在有解情况下，必然存在两个基础解，在半序关系“$\Longrightarrow$”下，这两个解分别为最小元，最大元。(5) 规则集合关于运算$\wedge, \vee$作成一个有界分配格。两个基础解是此格的上，下界。(6) 对应于GS算法的GS定理。

## §1. 引　言

机器学习一直是人工智能的重要领域。近年来，它变得越来越引人注目，并成为人工智能研究的一个热点。目前世界上已建成了许多学习系统并且成功地应用于专家的自动知识获取及其他领域，然而对学习的理论和方法却缺少研究。作者对示例式学习的理论基础进行了初步的探讨。在文[1]中，作者提出了研究机器学习理论的新观点：知识之间的映射。并且用此观点对著名的学习方法——STAR以及求star的析取扩张矩阵方法进行了原理上的分析；进而平行地给出了学习方法：NSTAR以及求nstar的合取扩张矩阵方法。本文仍使用映射观点对示例式学习的理论基础进行广泛的探讨和分析。首先，扩充了解的规则空间，由范式解扩充到任意公式解。然后对示例式学习理论进行了如下讨论：(1) 随着例子集合的变化，相应规则集合的变化情况；(2) 无解定理；(3) 唯一解定理；(4) 基础解定理；(5) (COVS(PE|NE), $\wedge, \vee, \theta$, I) 是有界分配格；(6) GS定理。

## §2. 概念及问题描述

定义1. 设S是知识的源表达集合，T是知识的目标表达集合，定义映射$L: S \rightarrow T$，则称L是从S到T的学习过程。S与T的表达形式决定了学习的类型，L的定义决定了相应的学习方法(算法)。这里我们只介绍示例式学习中的S与T的一种表达形式。

定义2. 设$S_1 = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$是一个n维离散的有穷向量空间，其中$D_j$是一个有穷离散符号集，$1 \leq j \leq n$。

定义3. $S_1$中的一个元素e，叫做一个例子，记为$e = < v_1, v_2, \cdots, v_n >$。其中$v_j \in D_j$，

$1 \le j \le n$。

定义4. 选择子是形为$[X_j \# A_j]$的关系语句, 其中$X_j$是第j个变元, $A_j \subseteq D_j$, $\# \in \{=, \neq\}$。选择子$[X_j \# A_j]$是真的, 当且仅当该关系成立, 即$[X_j = A_j]$为真, 当且仅当$X_j \in A_j$;$[X_j \neq A_j]$为真, 当且仅当$X_j \in D_j \backslash A_j$。显然$[X_j \neq A_j]$为真, 当且仅当$[X_j = D_j \backslash A_j]$为真。

定义5. (公式的递归定义)

1. 选择子是公式。
2. 若P, Q是公式, 则$P \wedge Q$, $P \vee Q$都是公式。
3. 公式都是通过有限次使用1, 2定义的。

以下我们使用F表示所有公式组成的集合。

定义6. (示例式学习)

设$S = 2^{S_1} \times 2^{S_1}, T = 2^F, L: S \to T$。如果对任何$PE \in 2^{S_1}$, $NE \in 2^{S_1}$, $PE \cap NE = \phi$, $R \in T$, $L(PE, NE) = R$, 都有1) 对任何$r \in R$, $PE$中每一个例子都使公式r成立。2) 对任何$r \in R$, NE中每一个例子使公式r不成立, 那么称L为示例式学习。R亦被记为COVS (PE|NE), 特别$NE = \{e^-\}$时记成COVS(PE|$e^-$); $PE = \{e^+\}$时记成$COVS(e^+|NE)$。且称正例集PE在反例集NE背景下满足公式r或r在反例集NE背景下复盖正例集PE。

## §3. 示例式学习理论

定理1. 若$PE1 \supseteq PE2$, $NE1 \supseteq NE2$, 则

$$COVS(PE1|NE1) \subseteq COVS(PE2|NE2)$$

证明: 若$r \in COVS(PE1|NE1)$, 则r满足PE1中任何正例且不满足NE1中任何反例。显然r满足PE1子集PE2中任何正例且不满足NE1子集NE2中任何反例。故$r \in COVS(PE2|NE2)$, 由r的任意性, $COVS(PE1|NE1) \subseteq (PE2|NE2)$。

定理1 说明1) 随着例子集PE, NE的增大, 相应的规则集COVS (PE|NE) 变小。这充分体现了在人的学习过程中, 随着人们关于某事物知识的增加, 人们对此事物的认识逐步加深, 渐近地认识到事物的本质。2) 对于渐近学习, 新规则存在于原规则集。体现了人们循序渐近的学习过程, 随着人们关于某事物知识的增加, 人们对事物的再认识与了解是在人们对事物原有认识与了解基础之上的。

定理2. 设$PE = \{e_1^+, e_2^+, \cdots, e_k^+\}$, $NE = \{e_1^-, e_2^-, \cdots, e_l^-\}$, 则$\forall 1 \le i \le k$, $1 \le j \le l$, $COVS(PE|NE) \subseteq COVS(e_i^+|e_j^-)$

证明: 由于$PE \ni e_i^+$, $NE \ni e_j^-$, 由定理1知此定理成立。

此定理说明了$COVS(e_i^+|e_j^-)$是我们要求的规则所在的极大解集。

定理3 (无解定理)

若$PE\cap NE\neq\phi$, 则$COVS(PE|NE)=\phi$

证明: 因为$PE\cap NE=\phi$, 设$e\in PE\cap NE$, 若$COVS(PE|NE)\neq\phi$, 则设有$r\in COVS(PE|NE)$, 那么, $e\in PE$, e 使r为真, 又$e\in NE$, e 使r为假。故矛盾。

**定义7.** 正例集PE反例集NE是相容的, 如果它们没有公共的例子(这样的例子叫做噪音), 否则, 如果它们具有噪音, 称它们是不相容的。

**定理3.** (无解定理) 说明, 在示例式学习中, 正反例是相容的要求是必要的。因此, 在定义6(示例式学习) 中, 我们总是假定PE与NE是相容的。

**定理4.** (唯一解定理)

若$PE\cup NE=S_1$, 则$\forall r_1,r_2\in COVS(PE|NE)$, 有$r_1=r_2$。

证明: 要证$r_1=r_2$, 即证$\forall e\in S_1$, e 使规则$r_1,r_2$有相同真假值, 因为$PE\cup NE=S_1$, 故$e\in PE\cup NE$, 设$e\in PE$, 则因为$r_1,r_2\in COVS(PE|NE)$, 故e使$r_1,r_2$皆为真, 又设$e\in NE$, 则因$r_1,r_2,\in COVS(PE|NE)$, 故e使$r_1,r_2$皆为假。故$r_1=r_2$。

定理4说明当我们得到了关于某事物的全部知识后, 我们将会认识到事物的本质。

**定理5.** (基础解定理)

$$\text{若}PE=\{e_1^+,e_2^+,\cdots,e_k^+\},NE=\{e_1^-,e_2^-,\cdots,e_l^-\}$$

$$e_1^+=<v_{11}^+v_{12}^+\cdots,v_{1n}^+> \quad e_1^-=<v_{11}^-v_{12}^-\cdots v_{1n}^->$$

$$\vdots$$

$$e_k^+=<v_{k1}^+v_{k2}^+\cdots v_{kn}^+> \quad e_l^-=<v_{l1}^-v_{l2}^-\cdots v_{ln}^->$$

$$\Theta=\bigwedge_{j=1}^{k}\bigvee_{i=1}^{n}[x_i=v_{ji}^+],\quad I=\bigwedge_{j=1}^{l}\bigvee_{i=1}^{n}[x_i\neq vji^-]$$

则$\Theta$, $I\in COVS(PE|NE)$ 并且$\Theta$复盖且只复盖PE, I不复盖且只不复盖NE。若$r\in COVS(PE|NE)$, 则$\Theta\Longrightarrow r$, $r\Longrightarrow I$, 即规则关于关系"$\Longrightarrow$"作成半序关系, $\Theta, I$分别为最小, 最大元。(证明略)。

定理5说明规则解集$COVS(PE|NE)$关于蕴含关系$\Longrightarrow$存在最小元, 最大元, 因而 $COVS(PE|NE)$ 是有界的。

**定理6.** $(COVS(PE|NE),\wedge,\vee,\Theta,I)$ 是有界分配格。

证明: 显然$(F,\wedge,\vee)$是分配格, $COVS(PE|NE)\subseteq F$ 且$COVS(PE|NE)=\phi$。又$\forall r_1,r_2\in COVS(PE|NE)$, 据$COVS(PE|NE)$定义知有$r_1\wedge r_2,r_1\vee r_2\in COVS(PE|NE)$, 即$COVS(PE|NE)$关于运算$\wedge,\vee$封闭。又据定理5, 我们有$COVS(PE|NE),\wedge,\vee,\Theta,I)$是有界分配格。

定理6说明$(COVS(PE|NE),\wedge,\vee,\Theta,I)$是有界分配格, 这是十分令人激动和高兴的。这样我们就将示例式机器学习的理论和格论建立了紧密的联系。由于所要进一步分析和讨论的规则解集关于运算$\wedge,\vee$作成了一个有界分配格, 所以关于有界分配格的知识就可以应用到规则集$COVS(PE|NE)$上了。这样为示例式学习理论提供了坚实的代数基础。

**定理 7**

$$COVS(PE1\cup PE2|NE)=\{r_1\vee r_2|r_1\in COVS(PE1|NE),r_2\in COVS(PE2|NE)\}$$

证明: 若 $r\in COVS(PE1\cup PE2|NE)$, 则 $r$ 在NE下复盖 $PE1\cup PE2$, $r$ 在NE下复盖PE1, PE2, 故 $r\in COVS(PE1|NE)$, $r\in COVS(PE2|NE)$, 那么 $r=r_1\vee r_2\in\{r_1\vee r_2|\ r_1\in COVS(PE1|NE),\ r_2\in COVS(PE2|NE)\}$。又设 $r=r_1\vee r_2$, 其中 $r_1\in COVS(PE1|NE)$, $r_2\in COVS(PE2|NE)$, 则 $r$ 在背景NE下复盖 $PE1\cup PE2$, 故 $r\in COVS(PE1\cup PE2|NE)$。

**定理 8**

$$COVS(PE|NE1\cup NE2)=\{r_1\wedge r_2|\ r_1\in COVS(PE|NE1),r_2\in COVS(PE|NE2)\}$$

(证明类似定理7)

**定理 9. (GS 算法)**

$$\begin{aligned}COVS(PE1\cup PE2|NE1\cup NE2)=\{&(r_1\wedge r_2)\vee(r_3\wedge r_4)|\\&r_1\in COVS(PE1|NE1),r_2\in COVS(PE1|NE2),\\&r_3\in COVS(PE2||NE1),r_4\in COVS(PE2|NE2)\}\end{aligned}$$

(综合定理7, 8 可证)

GS 定理解释: $r_1$ 不仅复盖了 $PE1$ 中的正例, 还可能复盖了NE2 中的反例, 这表明太普遍化了(G), 它复盖的范围越出了正例集PE, 因此下一步要通过特化(S) 缩小范围, 即扩张 $r_1$, 以便排除一切被复盖的反例。而 $r_2$ 不仅复盖了 $PE1$ 中的正例且不复盖NE2 中的反例, 那么 $r_1\wedge r_2$ 不仅复盖PE1 中的正例且不复盖NE 中的反例。

**定理 10. (SG 算法)**

$$\begin{aligned}COVS(PE1\cup PE2|NE1\cup NE2)=\{&(r_1\vee r_2)\wedge(r_3\vee r_4)|\\&r_1\in COVS(PE1|NE1),r_2\in COVS(PE2|NE1),\\&r_3\in COVS(PE1|NE2),r_4\in COVS(PE2|NE2)\}\end{aligned}$$

## 参考文献


[1] 李红斌, 洪家荣, 孙希文, 合取范式的归纳, 暨南理医学报, 全国首届智能科学研讨会论文专辑, 1988. 10 广州。

[2] 洪家荣, GS—一个新的示例式学习算法, 全国首届知识工程研讨会论文, 1987。