

隐式表面上的 Mumford-Shah 模型*

端金鸣, 潘振宽⁺, 何啸川, 魏伟波, 刘存良

(青岛大学 信息工程学院, 山东 青岛 266071)

Mumford-Shah Model on Implicit Surfaces

DUAN Jin-Ming, PAN Zhen-Kuan⁺, HE Xiao-Chuan, WEI Wei-Bo, LIU Cun-Liang

(College of Information Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

+ Corresponding author: E-mail: zkpan@qdu.edu.cn

Duan JM, Pan ZK, He XC, Wei WB, Liu CL. Mumford-Shah model on implicit surfaces. *Journal of Software*, 2012, 23(Suppl. (2)): 53-63 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/12024.htm>

Abstract: The Mumford-Shah model for planar image segmentation has been extended to variational models for image segmentation on implicit surfaces in this paper. The closed surfaces are denoted as zero-level set of signed distance functions, and the open surfaces are expressed as interaction sets of zero-level set and binary functions. With the use of intrinsic gradients and intrinsic divergences, the Mumford-Shah model for image segmentation on implicit surfaces is formulated. In order to improve their generality, the paper uses a generalized smoothness term which can be exemplified for different types. In order to improve computation efficiency, the study designs the Split Bregman algorithms via introducing auxiliary variables and Bregman iterative parameters for the proposed models. Numerical examples validate the models and algorithms finally.

Key words: image segmentation; variational methods; Mumford-Shah model; Split Bregman algorithm

摘要: 将平面图像变分分割的 Mumford-Shah 模型推广于隐式表面上图像分割问题. 封闭曲面用符号距离函数的零水平集来表达, 开式曲面用符号距离函数的零水平集与二值标记函数的交集来表达, 借助内蕴梯度、内蕴散度等概念首先建立了隐式表面上图像分割的 Mumford-Shah 模型. 为了提高通用性, 所提出的 Mumford-Shah 模型的光滑项采用通用形式, 可适用于总变差等多种形式的光滑项模型. 此外, 还通过引进辅助变量和 Bregman 迭代参数设计所提出模型的 Split Bregman 算法. 多个数值实验对所提出的模型和算法的可行性进行了验证.

关键词: 图像分割; 变分方法; 隐式曲面; Mumford-Shah 模型; Split Bregman 算法

Mumford-Shah 模型^[1]是变分图像分割研究的基础. 该模型将原图像等效为分段光滑图像和最小分割线. 由于图像和分割线维数不同, 造成优化计算上的困难, 为此, Chan 和 Vese^[2,3]基于退化的 Mumford-Shah 模型, 借助于水平集方法^[4]提出了两相(Chan-Vese 模型)与多相图像分割的变分水平集模型. Ambrosio 等人^[5]则通过引入辅助变量和近似椭圆函数构造了在 Gamma 收敛意义下的等效能量泛函极值问题, 并被应用于图像修复^[6]、彩色图像分割^[7,8]、彩色纹理图像恢复^[9]、图像配准^[10]等. 本文研究的目的是将 Mumford-Shah 模型应用于隐式表面上的图像分割问题.

* 基金项目: 国家自然科学基金(61170106)

收稿时间: 2012-05-30; 定稿时间: 2012-09-29

隐式表面上的图像处理变分方法的研究始于 Bertalmio 等人^[11]关于曲面上图像恢复的问题.该问题与一般图像恢复的区别在于,表面上的图像特征依赖于其定义的曲面的局部几何特征,图像强度的变化依赖于曲面的变化.借助于文献[11]定义的内蕴梯度、内蕴散度的定义,文献[12-14]将文献[2,3]推广到隐式表面上的两相、多相图像分割问题.表面上的图像分割、分类对于基于曲面的资源分类、统计具有重要意义,本文将文献[5]中提出的基于 Gamma 收敛的 Mumford-Shah 模型推广到表面上的图像分割问题,但与文献[5]的区别在于,本文采用通用的光滑项形式,与文献[12-14]的区别在于,本文不仅研究闭曲面且研究开曲面上的分段光滑图像分割问题,而且为了提高计算效率,本文还为所提出的模型设计了简单快速的 Split Bregman 算法^[15,16].

本文第 1 节介绍传统 Mumford-Shah 模型及表面上两相图像分割的 Chan-Vese 模型基础.第 2 节提出闭/开曲面上图像分割的 Mumford-Shah 模型,并设计相应的 Split Bregman 算法.第 3 节为数值算例.第 4 节为结束语.

1 Mumford-Shah 模型及封闭隐式表面上的两相图像分割问题

对于定义于矩形开区域 Ω 上的灰度图像 $f(x): \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \in \Omega$, Mumford-Shah 模型^[1]

$$\text{Min}_{u,K} \left\{ E(u,K) = \int_{\Omega/K} (u-f)^2 dx + \alpha \int_{\Omega/K} |\nabla u|^2 dx + \beta H^{N-1}(K) \right\} \quad (1)$$

用边缘点集 K 将原图像分割为光滑图像区域 $u(x), x \in \Omega / K$. 式(1)右端第 1 项为数据项,表示在光滑区域近似图像与原图像的逼近程度,第 2 项为对分段图像光滑程度的惩罚项, $H^{N-1}(K)$ 为图像中边缘点构成的分割线长度,后者两项统称为规则项, α, β 为惩罚参数, α 越大,分段图像越光滑; β 越大,由边缘点构成的分割线越短.为了避免不同维空间变量共存造成的优化问题的困难,文献[5]将 u 定义为特殊有界变差函数空间 $SBV(\Omega)$ 中的函数,将式(1)改写为

$$\text{Min}_u \left\{ E(u) = \int_{\Omega} \left((u-f)^2 + \alpha |\nabla u|^2 \right) dx + \beta H^{N-1}(S_u) \right\} \quad (2)$$

其中, S_u 为 u 的不连续的点的集合.该模型的近似求解主要有变分水平集方法、二值标记函数方法、椭圆函数近似方法.

Vese 等人^[2]用符号距离函数 $\phi(x)$ 零水平集表达区域划分的连续轮廓线采用变分水平集方法将式(2)近似为

$$\text{Min}_{u_1, u_2, \phi} \left\{ E(u_1, u_2, \phi) = \gamma_1 \int_{\Omega} \left((u_1 - f)^2 + \alpha_1 |\nabla u_1|^2 \right) H(\phi) dx + \right. \\ \left. \gamma_2 \int_{\Omega} \left((u_2 - f)^2 + \alpha_2 |\nabla u_2|^2 \right) (1 - H(\phi)) dx + \beta \int_{\Omega} |\nabla H(\phi)| dx \right\} \quad (3)$$

用 Ω_1 表示分割图像的前景, $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ 则表示分割图像的背景, Γ 表示二者的分割轮廓线.当用 u_1, u_2 表示前景与背景的分段光滑图像时,其前两项为分段光滑图像估计的数据项,第 3 项则为式(2)中第 3 项的近似, $\alpha_1, \alpha_2,$

$\gamma_1, \gamma_2, \beta$ 为相应项的惩罚参数.其中,采用符号距离函数定义的水平集函数 $\phi(x)$ 为 $\phi(x) = \begin{cases} d(x, \Gamma), & x \in \Omega_1 \\ 0, & x \in \Gamma \\ -d(x, \Gamma), & x \in \Omega_2 \end{cases}$

$d(x, \Gamma)$ 为图像空间中任意点到轮廓线的最小距离. $H(\phi) = \begin{cases} 1, & \phi \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ 为 Heaviside 函数.

文献[17]则直接用二值标记函数 $\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_1 \\ 0, & x \in \Omega_2 \end{cases}, \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, 将式(3)改写为如下约束优化问题:

$$\text{Min}_{u_1, u_2, \phi \in \{0,1\}} \left\{ E(u_1, u_2, \phi) = \gamma_1 \int_{\Omega} \left((u_1 - f)^2 + \alpha_1 |\nabla u_1|^2 \right) \phi dx + \gamma_2 \int_{\Omega} \left((u_2 - f)^2 + \alpha_2 |\nabla u_2|^2 \right) (1 - \phi) dx + \beta \int_{\Omega} |\nabla \phi| dx \right\} \quad (4)$$

Chan-Vese 模型(3)采用零水平集表示的动态轮廓线划分区域,模型(4)采用标记函数来区分不同的区域.

文献[5]基于 Gamma 收敛的概念,采用椭圆函数将(2)表达为 Gamma 收敛意义下的近似模型:

$$E_\varepsilon(u, v) = \int_\Omega (u - f)^2 dx + \alpha \int_\Omega v^2 |\nabla u|^2 dx + \beta \int_\Omega \left(\varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{(v-1)^2}{4\varepsilon} \right) dx \quad (5)$$

α, β 为光滑项和长度项的惩罚参数, ε 为正的小参数, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $E_\varepsilon(u, v) \rightarrow E(u)$, 且 $u_\varepsilon \rightarrow u, v(x) \rightarrow \begin{cases} 0, & x \in S_u \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$. 从而, $v(x) \rightarrow 0$ 的点对应区域分割的边缘点, $v(x) \rightarrow 1$ 的点对应光滑区域.

基于文献[11]定义的内蕴梯度、内蕴散度等概念, 文献[12]用固定符号距离函数的零水平集 $\Psi(x) = 0$ 表达隐式曲面 S , 用该固定零水平集与另一动态符号距离函数 $\phi(x)$ 的零水平集的交集表达曲面上图像分割的动态轮廓线, 设计了如下隐式曲面上分段常值两相图像分割的变分水平集模型:

$$\text{Min}_{u_1, u_2, \phi} \left\{ E(u_1, u_2, \phi) = \gamma_1 \int_\Omega (u_1 - f)^2 H(\phi) |\nabla H(\Psi(x))| dx + \gamma_2 \int_\Omega (u_2 - f)^2 (1 - H(\phi)) |\nabla H(\Psi(x))| dx + \beta \int_\Omega |P_{\nabla \Psi} \nabla H(\phi)| |\nabla H(\Psi(x))| dx \right\} \quad (6)$$

文献[13]研究了与文献[12]相同的问题, 其区别在于, 曲面上区域的划分采用动态二值标记函数法, 相应的变分模型为

$$\text{Min}_{u_1, u_2, \phi \in \{0, 1\}} \left\{ E(u_1, u_2, \phi) = \gamma_1 \int_\Omega (u_1 - f)^2 \phi |\nabla H(\Psi(x))| dx + \gamma_2 \int_\Omega (u_2 - f)^2 (1 - \phi) |\nabla H(\Psi(x))| dx + \beta \int_\Omega |P_{\nabla \Psi} \nabla \phi| |\nabla H(\Psi(x))| dx \right\} \quad (7)$$

在式(6)、式(7)中, f 为定义于曲面 $\Psi(x) = 0$ 上的灰度图像, 内蕴梯度为 $P_{\nabla \Psi} \nabla \phi = \left(I - \frac{\nabla \Psi \otimes \nabla \Psi}{|\nabla \Psi|^2} \right) \nabla \phi$, 梯度投影算子为 $P_{\nabla \Psi} = I - \frac{\nabla \Psi \otimes \nabla \Psi}{|\nabla \Psi|^2}$, 其作用是将三维空间中的矢量投影到零水平集切平面上. 本文拟将基于式(5)的相关模型推广到隐式开/闭曲面上灰度图像分段光滑图像分割.

2 隐式曲面上灰度图像变分分割的 Mumford-Shah 模型及算法

根据不同的图像光滑惩罚项定义, 灰度图像分割的 Mnmford-Shah 模型还有其他推广形式, 如 Shah^[18]受 TV 模型^[19]启发, 提出了基于 TV 光滑项的模型:

$$\text{Min}_{u, v} \left\{ E_\varepsilon(u, v) = \int_\Omega (u - f)^2 dx + \alpha \int_\Omega v^2 |\nabla u| dx + \beta \int_\Omega \left(\varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{(v-1)^2}{4\varepsilon} \right) dx \right\} \quad (8)$$

文献[20]则提出了基于黎曼几何的光滑项的推广形式 $\int_\Omega v^2 \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$. 为了提高模型的通用性, 本文的研究基于如下通用模型:

$$\text{Min}_{u, v} \left\{ E_\varepsilon(u, v) = \int_\Omega (u - f)^2 dx + \alpha \int_\Omega v^2 \varphi(|\nabla u|) dx + \beta \int_\Omega \left(\varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{(v-1)^2}{4\varepsilon} \right) dx \right\} \quad (9)$$

其中, $\varphi(|\nabla u|)$ 为图像强度梯度模的凸函数. 当 $\varphi(|\nabla u|) = |\nabla u|^2, \varphi(|\nabla u|) = |\nabla u|, \varphi(|\nabla u|) = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$ 时, 式(9)分别称为 MSH1, MSTV, MSG 模型.

设拟分割的灰度图像 f 定义于封闭曲面 S 上, 分割后曲面上分段光滑图像用 u 表达, 则与(9)对应的曲面 S 上图像分割的广义 Mumford-Shah 模型为

$$\text{Min}_{u, v} \left\{ E(u, v) = \int_S (u - f)^2 ds + \alpha \int_S v^2 \varphi(|\nabla_S u|) ds + \beta \int_S \left(\varepsilon |\nabla_S v|^2 + \frac{(v-1)^2}{4\varepsilon} \right) ds \right\} \quad (10)$$

式(10)与式(9)的区别在于积分区域为曲面而非平面图像, 其中, 图像强度的梯度为内蕴于曲面的梯度, 即欧

氏空间的梯度在曲面 S 的切平面上的投影.当用连续符号距离函数 $\Psi(x)$ 的零水平集 $\Psi(x)=0$ 表达 S 时, $\nabla_s u = P_{\nabla\Psi} \nabla u = \left(I - \frac{\nabla\Psi \otimes \nabla\Psi}{|\nabla\Psi|^2} \right) \nabla u$, 相应地,内蕴 Laplace 算子为 $\Delta_s u = \frac{1}{|\nabla\Psi|} \nabla \cdot (P_{\nabla\Psi} \nabla u |\nabla\Psi|)$. 曲面上 v 的内蕴梯度、内蕴 Laplace 算子形式相同.由余面积(co-area)公式可知,零水平集上积分微元为 $ds = |\nabla H(\Psi)| dx = |\nabla\Psi| \delta(\Psi) dx$, 其中,Dirac 函数 $\delta(\Psi) = \frac{dH(\Psi)}{d\Psi}$ 为 Heaviside 函数 $H(\Psi)$ 的广义导数.从而可将式(10)改写为隐式闭曲面上图像分割的广义 Mumford-Shah 模型:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{u,v} \left\{ E(u,v) = \int_{\Omega} (u-f)^2 |\nabla\Psi(x)| \delta(\Psi(x)) dx + \alpha \int_{\Omega} v^2 \varphi(|P_{\nabla\Psi} \nabla u|) |\nabla\Psi(x)| \delta(\Psi(x)) dx + \right. \\ \left. \beta \int_{\Omega} \left(\varepsilon |P_{\nabla\Psi} \nabla v|^2 + \frac{(v-1)^2}{4\varepsilon} \right) |\nabla\Psi(x)| \delta(\Psi(x)) dx \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

当 $\varphi(|P_{\nabla\Psi} \nabla u|) = |P_{\nabla\Psi} \nabla u|^2$, $\varphi(|P_{\nabla\Psi} \nabla u|) = |P_{\nabla\Psi} \nabla u|$, $\varphi(|P_{\nabla\Psi} \nabla u|) = \sqrt{1 + |P_{\nabla\Psi} \nabla u|^2}$ 时,式(11)分别实例化为隐式闭曲面上的 MSH1, MSTV, MSG 模型.

对含有两个变量的能量泛函极值问题(11),通常采用交替优化方法求解,即临时固定一个变量,采用变分方法求关于另一个变量的极值问题.由此可推出关于 u, v 的 Euler-Lagrange 方程和对应的梯度降方程分别为

$$\begin{cases} 2(u-f) - \frac{\alpha}{|\nabla\Psi(x)} \nabla \cdot \left(v^2 \varphi'(|P_{\nabla\Psi} \nabla u|) \frac{P_{\nabla\Psi} \nabla u}{|P_{\nabla\Psi} \nabla u|} |\nabla\Psi(x)| \right) = 0, & \text{in } \Omega \\ \frac{P_{\nabla\Psi} \nabla u}{|P_{\nabla\Psi} \nabla u|} \cdot \bar{n} = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (12.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -2(u-f) + \frac{\alpha}{|\nabla\Psi(x)} \nabla \cdot \left(v^2 \varphi'(|P_{\nabla\Psi} \nabla u|) \frac{P_{\nabla\Psi} \nabla u}{|P_{\nabla\Psi} \nabla u|} |\nabla\Psi(x)| \right), & \text{in } \Omega \\ \frac{P_{\nabla\Psi} \nabla u}{|P_{\nabla\Psi} \nabla u|} \cdot \bar{n} = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (12.2)$$

$$\begin{cases} 2\alpha v \varphi(|P_{\nabla\Psi} \nabla u|) + \beta \frac{(v-1)}{2\varepsilon} - \frac{2\varepsilon\beta}{|\nabla\Psi(x)} (\nabla \cdot (P_{\nabla\Psi} \nabla v) |\nabla\Psi(x)|) = 0, & \text{in } \Omega \\ P_{\nabla\Psi} \nabla v \cdot \bar{n} = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (13.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -2\alpha v \varphi(|P_{\nabla\Psi} \nabla u|) - \frac{\beta}{2\varepsilon} (v-1) + \frac{2\varepsilon\beta}{|\nabla\Psi(x)} (\nabla \cdot (P_{\nabla\Psi} \nabla v) |\nabla\Psi(x)|) = 0, & \text{in } \Omega \\ P_{\nabla\Psi} \nabla v \cdot \bar{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (13.2)$$

在采用差分方法计算时,式(12)导致曲面上二阶导数的复杂差分格式,也导致较低的计算效率.本文为所提出的模型(11)设计简单、快速的 Split Bregman 算法.该方法由 Goldstein, Osher^[15]针对图像恢复提出,并在文献[16]中被推广于平面图像两相分割的变分模型的快速计算.其基本思想是通过引进辅助变量将原非线性模型转化为简单的线性化模型,并通过引进 Bregman 迭代参数以修正线性化模型的结果.为此,以下通过引入辅助变量 w 和 Bregman 迭代参数 b ,将式(11)改写为如下迭代优化格式:

$$(u^{k+1}, w^{k+1}, v^{k+1}) = \text{ArgMin}_{u,w,v} \left\{ \begin{aligned} E(u,w,v) = \int_{\Omega} (u-f)^2 |\nabla\Psi(x)| \delta(\Psi(x)) dx + \alpha \int_{\Omega} v^2 \varphi(|w|) |\nabla\Psi(x)| \delta(\Psi(x)) dx + \\ \beta \int_{\Omega} \left(\varepsilon |P_{\nabla\Psi} \nabla v|^2 + \frac{(v-1)^2}{4\varepsilon} \right) |\nabla\Psi(x)| \delta(\Psi(x)) dx + \\ \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} (w - P_{\nabla\Psi} \nabla u - b^{k+1})^2 |\nabla\Psi(x)| \delta(\Psi(x)) dx \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

以使式(14)取得极小值时, $w \approx \nabla u$. 其中, $b^{k+1} = b^k + P_{\nabla\psi} \nabla u^k - w^k$, $b^0 = w^0 = 0, u^0 = f$. 对式(14)采用交替优化方法得关于 u 的 Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{cases} \frac{\theta}{|\nabla\psi(x)|} \nabla \cdot ((w^k - P_{\nabla\psi} \nabla u - b^{k+1}) |\nabla\psi(x)|) + (u - f) = 0, & \text{in } \Omega \\ (w^k - P_{\nabla\psi} \nabla u - b^{k+1}) \cdot \bar{n} = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (15.1)$$

关于 w^{k+1} 的近似广义软阈值公式为

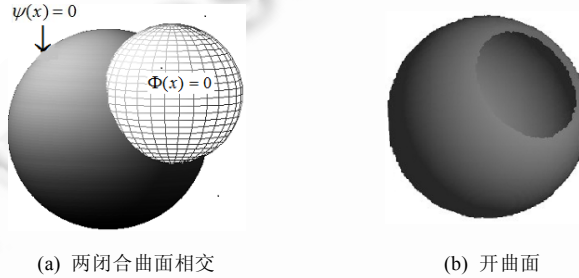
$$w^{k+1} = \text{Max} \left(\left| P_{\nabla\psi} \nabla u^{k+1} + b^{k+1} \right| - \frac{\alpha}{\theta} (v^k)^2 \varphi'(|w^k|), 0 \right) \frac{P_{\nabla\psi} \nabla u^{k+1} + b^{k+1}}{|P_{\nabla\psi} \nabla u^{k+1} + b^{k+1}|} \quad (15.2)$$

关于 v 的 Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{cases} 2\alpha v \varphi(|w^{k+1}|) + 2\beta \left(-\varepsilon \frac{1}{|\nabla\psi(x)|} \nabla \cdot (P_{\nabla\psi} \nabla v |\nabla\psi(x)|) + \frac{(v-1)}{4\varepsilon} \right) = 0, & \text{in } \Omega \\ P_{\nabla\psi} \nabla v \cdot \bar{n} = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (15.3)$$

其中,式(15.1)、式(15.3)可采用固定点迭代求解,式(15.2)为解析形式的近似广义软阈值公式.

当曲面 S 为开曲面时,其上图像分割的广义 Mumford-Shah 模型仍为式(10).但仅用 1 个水平集函数无法表达开曲面.本文再引入一个固定的二值标记函数 $\Phi(x) \in \{0,1\}$, 其取值为 1 的点与连续符号距离函数 $\Psi(x)$ 的零水平集 $\Psi(x)=0$ 的交集 $\{x: \Phi(x)=1, \Psi(x)=0\}$ 表达开曲面,如图 1(b)所示.



(a) 两闭合曲面相交 (b) 开曲面

Fig.1 Implicit function expression of open surface

图 1 开曲面的隐函数表达

在 $\{x: \Phi(x)=1, \Psi(x)=0\}$ 上,图像强度的内蕴梯度与内蕴散度的定义与隐式闭曲面上相同,但零水平集上积分微元为 $ds = |\nabla H(\Psi)| \Phi(x) dx = |\nabla\psi| \delta(\Psi) \Phi(x) dx$. 相应地,与式(10)对应的隐式开曲面上图像分割的广义 Mumford-Shah 模型为

$$\text{Min}_{u,v} \left\{ \begin{aligned} E(u,v) &= \int_{\Omega} (u-f)^2 |\nabla\psi(x)| \delta(\Psi(x)) \Phi(x) dx + \alpha \int_{\Omega} v^2 \varphi(|P_{\nabla\psi} \nabla u|) |\nabla\psi(x)| \delta(\Psi(x)) \Phi(x) dx + \\ &\beta \int_{\Omega} \left(\varepsilon |P_{\nabla\psi} \nabla v|^2 + \frac{(v-1)^2}{4\varepsilon} \right) |\nabla\psi(x)| \delta(\Psi(x)) \Phi(x) dx \end{aligned} \right. \quad (16)$$

当 $\varphi(|P_{\nabla\psi} \nabla u|) = |P_{\nabla\psi} \nabla u|^2$, $\varphi(|P_{\nabla\psi} \nabla u|) = |P_{\nabla\psi} \nabla u|$, $\varphi(|P_{\nabla\psi} \nabla u|) = \sqrt{1 + |P_{\nabla\psi} \nabla u|^2}$ 时,式(16)分别实例化为隐式开曲面上的 MSH1, MSTV, MSG 模型.

同样地,引入辅助变量 w 和 Bregman 迭代参数 b ,采用 Split Bregman 算法^[15]将式(16)改写为如下迭代格式:

$$(u^{k+1}, w^{k+1}, v^{k+1}) = \underset{u, w, v}{\text{ArgMin}} \left\{ \begin{aligned} E(u, w, v) &= \int_{\Omega} (u - f)^2 |\nabla \Psi(x)| \delta(\Psi(x)) \Phi(x) dx + \\ &\alpha \int_{\Omega} v^2 \varphi(|w|) |\nabla \Psi(x)| \delta(\Psi(x)) \Phi(x) dx + \\ &\beta \int_{\Omega} \left(\varepsilon |P_{\nabla \Psi} \nabla v|^2 + \frac{(v-1)^2}{4\varepsilon} \right) |\nabla \Psi(x)| \delta(\Psi(x)) \Phi(x) dx + \\ &\frac{\theta}{2} \int_{\Omega} (w - P_{\nabla \Psi} \nabla u - b^{k+1})^2 |\nabla \Psi(x)| \delta(\Psi(x)) \Phi(x) dx \end{aligned} \right. \quad (17)$$

其中, $b^{k+1} = b^k + P_{\nabla \Psi} \nabla u^k - w^k, b^0 = w^0 = 0, u^0 = f$. 采用交替优化方法得到:

$$\begin{cases} \frac{\theta}{|\nabla \Psi(x)|} \nabla \cdot \left((w^k - P_{\nabla \Psi} \nabla u - b^{k+1}) |\nabla \Psi(x)| \Phi(x) \right) + (u - f) \Phi(x) = 0, & \text{in } \Omega \\ (w^k - P_{\nabla \Psi} \nabla u - b^{k+1}) \cdot \vec{n} = 0, & \text{on } \partial \Omega \end{cases} \quad (18.1)$$

$$w^{k+1} = \text{Max} \left(P_{\nabla \Psi} \nabla u^{k+1} + b^{k+1} - \frac{\alpha}{\theta} (v^k)^2 \varphi'(|w^k|), 0 \right) \frac{P_{\nabla \Psi} \nabla u^{k+1} + b^{k+1}}{|P_{\nabla \Psi} \nabla u^{k+1} + b^{k+1}|} \quad (18.2)$$

$$\begin{cases} 2\alpha v \varphi(|w^{k+1}|) \Phi(x) + 2\beta \left(-\varepsilon \frac{1}{|\nabla \Psi(x)|} \nabla \cdot (P_{\nabla \Psi} \nabla v |\nabla \Psi(x)| \Phi(x)) + \frac{(v-1)}{4\varepsilon} \Phi(x) \right) = 0, & \text{in } \Omega \\ P_{\nabla \Psi} \nabla v \cdot \vec{n} = 0, & \text{on } \partial \Omega \end{cases} \quad (18.3)$$

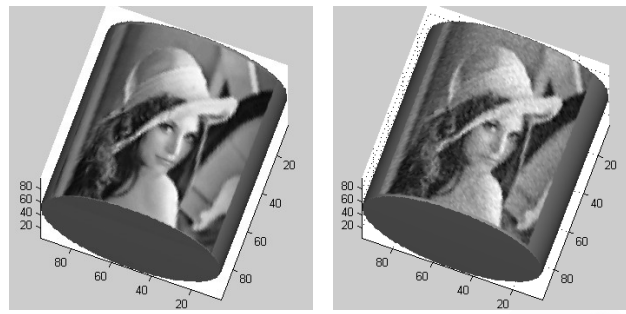
其中, 式(18.2)同式(15.2), 式(18.1)、式(18.2)的计算分别同式(15.1)、式(15.2).

3 数值算例

本文实验在微机(Intel(R) Pentium(R) 4 CPU 2.66GHz, 1.99 GB 内存)上实现, 采用的编程环境为 matlab R2010b. 针对隐式封闭曲面和隐式开曲面上的 Mumford-Shah 模型, 设计了实验, 其中图 2~图 4 是封闭曲面上的数值实验, 图 5~图 7 是开曲面上实验. 图 3、图 4 是为了观察 Mumford-Shah 模型对封闭曲面上的分段常值和分段光滑图像分割的结果, 图 5~图 7 是为了测试 Mumford-Shah 模型对开曲面上的分段常值和分段光滑图像的分割效果. 图 2 说明 Mumford-Shah 模型分割的同时也可以达到去噪的效果.

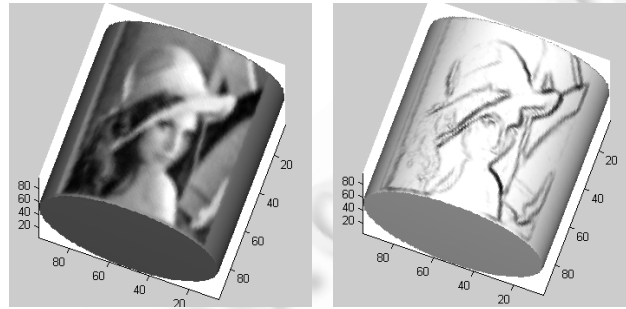
图 2 给出的是采用 MSH1, MSTV 和 MSG 这 3 种方法处理隐式封闭曲面上 lena 图像. 其中, 图 2(a)为 lena 图像在圆柱闭曲面上的原图像, 而图 2(b)为加入噪音的图像. 图 2(c)为采用 MSH1 方法处理后同时得到的恢复图像和分割图像, 所用参数 $\alpha = 0.01, \beta = 10, \theta = 0.2, \varepsilon = 0.03$. 图 2(d)为采用 MSTV 方法处理后同时得到的恢复图像和分割图像, 所用参数为 $\alpha = 0.01, \beta = 10, \theta = 0.2, \varepsilon = 0.1$. 图 2(e)为采用 MSG 方法处理后同时得到的恢复图像和分割图像, 所用参数为 $\alpha = 0.01, \beta = 10, \theta = 0.2, \varepsilon = 0.1$. 图 2 说明了 Mumford-Shah 模型不仅可以对闭曲面上的图像进行分割, 同时也可以实现去噪. 而采用 MSH1 得到的恢复图像比 MSTV 和 MSG 处理的图像模糊些, 其原因在于其光滑项采用的 $|\nabla u|^2$, 这种形式的光滑项对边缘保持并没有 MSTV 和 MSG 中的 $|\nabla u|, \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$ 光滑项边缘保持的效果好.

图 3(a)是隐式闭曲面上的分段常值原图像, 图 3(b)是采用了 MSTV 方法分割完的图像, 所用参数为 $\alpha = 0.02, \beta = 0.0015, \theta = 0.01, \varepsilon = 0.001$. 图 3(b)为采用 Chan-Vese 模型分割前初始化水平集, 而图 3(d)则为 Chan-Vese 模型的分割结果. 从图 3(b)、图 3(d)不难看出, 无论是 Mumford-Shah 模型还是 Chan-Vese 模型, 都正确地图像进行了分割, 但 Mumford-Shah 模型只能检测出图像的轮廓而不能对图像区域进行划分. 而 Chan-Vese 模型则可以得到任意想要的区域. 对于复杂的多相图像如图 2(a)、图 6(b)所示, Chan-Vese 模型往往不能得到较好的结果, 而 Mumford-Shah 模型则可以很好地提取图像的边缘.

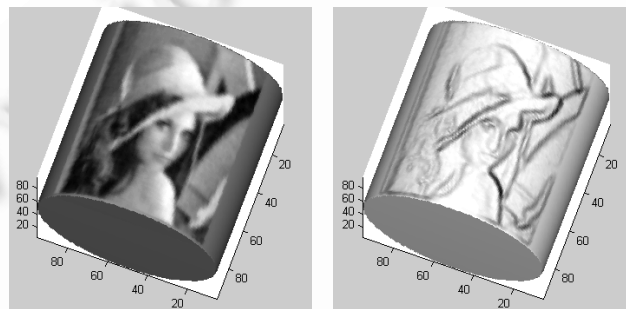


(a) 闭曲面上的 Lena 原图像

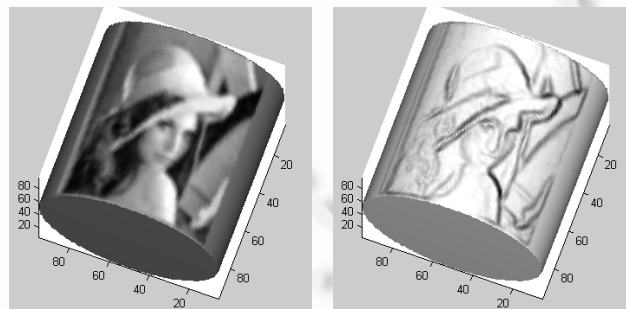
(b) 闭曲面上噪声图像



(c) 采用 MSH1 处理后得到曲面恢复图像和分割图像



(d) 采用 MSTV 处理后得到曲面恢复图像和分割图像



(e) 采用 MSG 处理后得到曲面恢复图像和分割图像

Fig.2 Restoration and segmentation image on closed surface

图 2 闭曲面上的图像恢复与分割

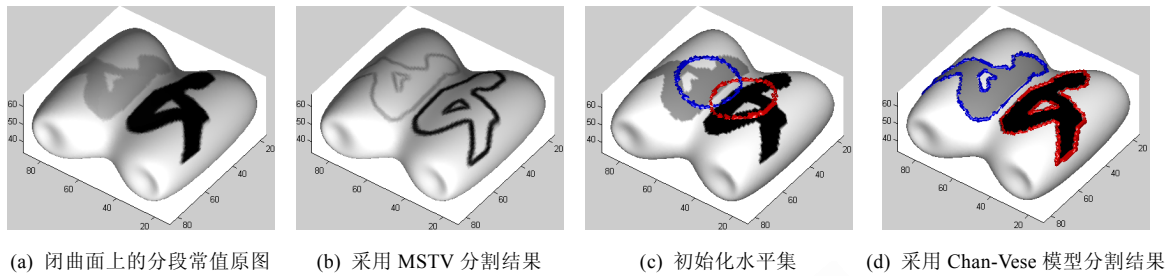


Fig.3 Segmentation of the piecewise constant image on closed surface

图 3 闭曲面上的分段常值图像分割

图 4(a)为曲面上灰度均匀变化的分段光滑原图像,图 4(b)则是采用了 MSTV 分割后得到的图像,所用参数 $\alpha = 0.05, \beta = 0.3, \theta = 0.01, \varepsilon = 0.02$. 图 3、图 4 反映了 Mumford-Shah 模型不仅能对封闭曲面上分段常值图像进行分割而且分段光滑的图像也能得到很好的分割结果.

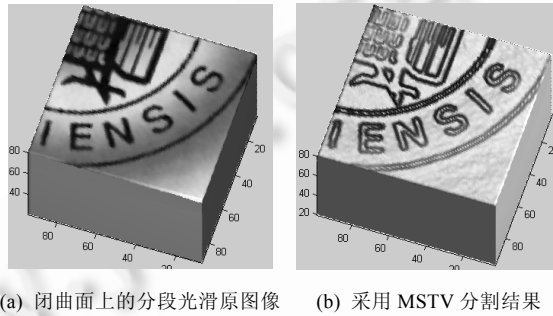


Fig.4 Segmentation of the piecewise smooth image on closed surface

图 4 闭曲面上的分段光滑图像分割

图 5、图 6 给出的是隐式开曲面上的分段常值图像分割数值实验.图 5(a)给出的是形状为兔子的隐式闭曲面,图 5(b)为经过截取后的隐式开曲面.图 5(c)是开曲面上的分段常值原图,5(d)是采用 MSG 分割开曲面上的图像,所用参数为 $\alpha = 0.01, \beta = 0.03, \theta = 0.1, \varepsilon = 0.01$. 图 6(a)为处理后的开曲面,图 6(b)为开曲面上的分段常值原图,图 6(c)为 MSH1 处理后开曲面上的图像,所用参数 $\alpha = 0.008, \beta = 0.15, \theta = 0.1, \varepsilon = 0.001$. 图 6(d)为 MSTV 处理后开曲面上的图像,所用参数为 $\alpha = 0.01, \beta = 0.05, \theta = 0.1, \varepsilon = 0.01$. 图 6(e)为 MSG 分割之后的结果,所用参数为 $\alpha = 0.01, \beta = 0.05, \theta = 0.1, \varepsilon = 0.01$. 从图 5、图 6 不难看出,Mumford-Shah 模型对多相图像分割也有很好的效果.

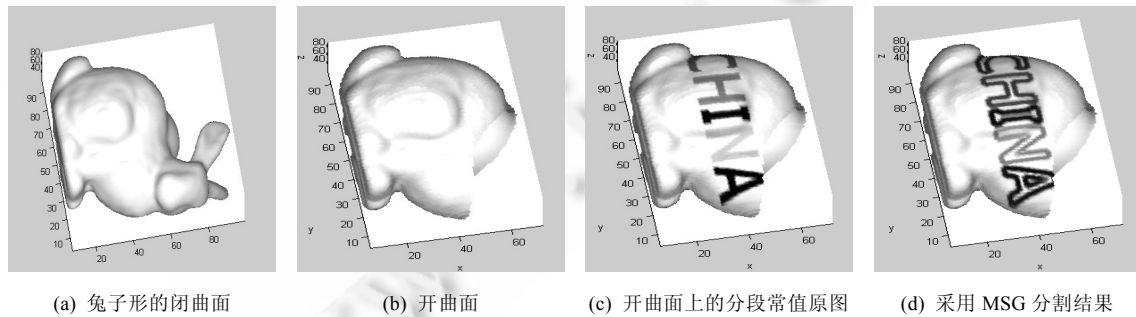


Fig.5 Segmentation of piecewise constant image on open surface

图 5 开曲面上分段常值图像分割

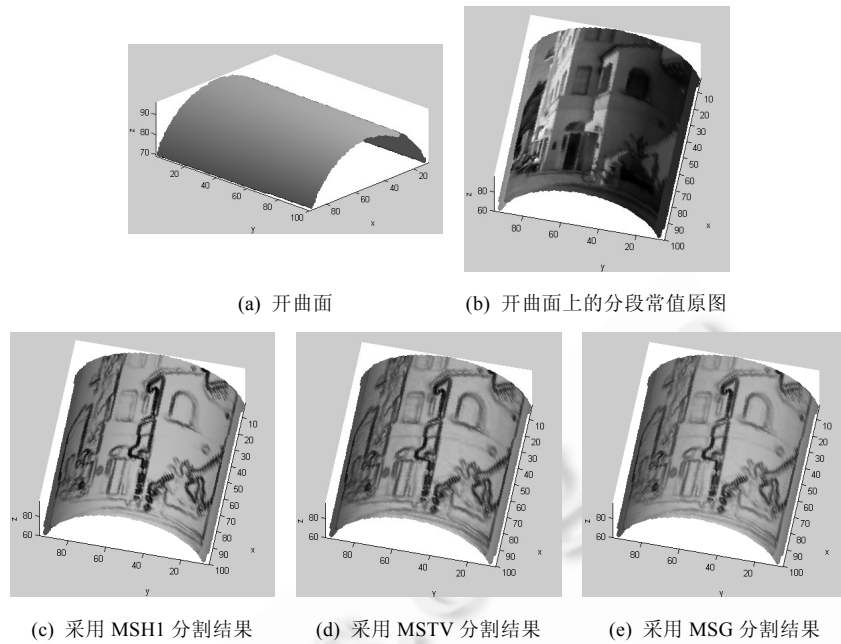


Fig.6 Segmentation of piecewise constant image on open surface

图 6 开曲面上分段常值图像分割

图 7 给出的是开曲面上的分段光滑的图像分割.其中,图 7(a)是瓶子形状的隐式闭曲面,图 7(b)是截取后的隐式开曲面,图 7(c)是隐式开曲面上的分段光滑图像,图 7(d)为采用 MSH1 分割之后的开曲面上的图像,所用参数为 $\alpha = 0.005, \beta = 0.5, \theta = 0.2, \varepsilon = 0.002$. 图 7 说明, Mumford-Shah 模型对于隐式开曲面上的分段光滑图像分割也能达到理想效果.

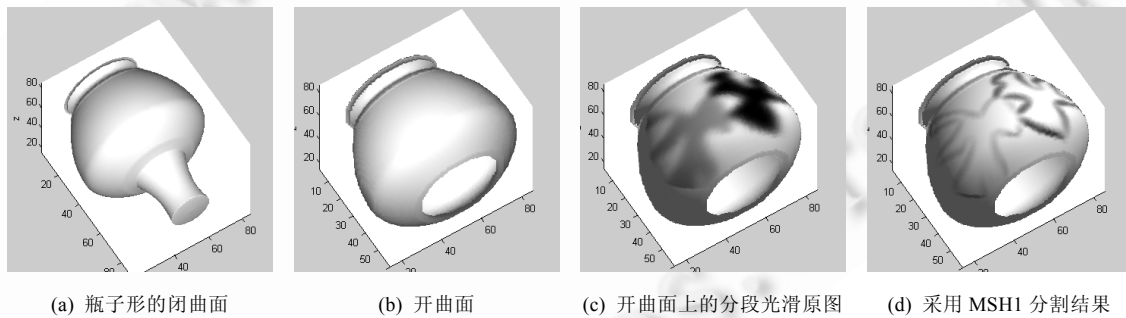


Fig.7 Segmentation of piecewise smooth image on open surface

图 7 开曲面上分段光滑图像分割

4 总结与展望

对封闭曲面用符号距离函数的零水平集表达,开式曲面用符号距离函数的零水平集与二值标记函数的交集表达,本文借助内蕴梯度、内蕴散度等概念将平面图像变分分割的 Mumford-Shah 模型推广于隐式曲面上图像分割问题.为了提高通用性,本文采用了通用的光滑项形式,可适用于总变差等多种形式的平滑项模型.为了提高计算机效率,本文通过引进辅助变量和 Bregman 迭代参数设计为所提出模型设计了 Split Bregman 算法.相关成果为曲面上彩色、彩色纹理图像分割 Mumford-Shah 模型的研究奠定了基础.

References:

- [1] Mumford D, Shah J. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1989,42:577–685.
- [2] Chan TF, Vese LA. Active contours without edges. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2001,10(2):266–277.
- [3] Vese LA, Chan TF. A multiphase level set framework for image segmentation using the Mumford and Shah model. *Int'l Journal of Computer Vision*, 2002,50(3):271–293.
- [4] Osher S, Sethian JA. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 1988,79(1):12–49.
- [5] Ambrosio L, Tortorelli VM. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Gamma-convergence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1990,43:999–1036.
- [6] Esedoglu S, Shen J. Digital inpainting based on the Mumford-Shah-Euler image model. *European Journal of Applied Mathematics*, 2002,13:353–370.
- [7] Brook A, Kimmel R, Sochen N. Variational restoration and edge detection for color images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2003,18(3):247–268.
- [8] Brown ES, Chan TF, Bresson X. A convex relaxation method for a class of vector-valued minimization problems with applications to Mumford-Shah segmentation. *UCLA CAM Report*, 2010. 10–43.
- [9] Jung M, Bresson X, Chan TF, Vese LA. Nonlocal Mumford-Shah regularizers for color image restoration. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2011,20(6):1583–1598.
- [10] Droske M, Ring W. A Mumford-Shah level-set approach for geometric image registration. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 2006,66(6):2127–2148.
- [11] Bertalmio M, Cheng L, Osher S, Sapiro G. Variational problems and partial differential equations on implicit surface. *Journal of Computational Physics*, 2001,174(2):759–780.
- [12] Li JG, Pan ZK, Wei WB, Shi J, Li H. A variational level set method for image segmentation on implicit surfaces. *Journal of Image and Graphics*, 2010,15(5):808–813 (in Chinese with English abstract).
- [13] Wang Q, Pan ZK, Wei WB. Variational image segmentation on implicit surface using dual method. *ACTA ELECTRONICA SINICA*, 2011,39(1):207–212 (in Chinese with English abstract).
- [14] Wang Q, Pan ZK, Wei WB. Variational level set methods for multiphase image segmentation on implicit surfaces. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2010,22(12):2202–2208 (in Chinese with English abstract).
- [15] Goldstein T, Osher S. The split Bregman algorithm for L1 regularized problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009,2(2):323–343.
- [16] Goldstein T, Bresson X, Osher S. Geometric applications of the split Bregman method: Segmentation and surface reconstruction. *Journal of Scientific Computing*, 2010,45:272–293.
- [17] Bresson X, Esedoglu S, Vandergheynst P, Thiran JP, Osher S. Fast global minimization of the active contour/snake model. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2007,28(2):151–167.
- [18] Shah J. A common framework for curve evolution, segmentation and anisotropic diffusion. In: *Proc. of the IEEE Computer Society Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'96)*. 1996. 136–142.
- [19] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 1992,60(1-4):259–268.
- [20] Sochen N, Kimmel R, Malladi R. A geometrical framework for low level vision. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1998,7(3):310–318.

附中文参考文献:

- [12] 李建国,潘振宽,魏伟波,石洁,李华.隐式曲面上两相图像分割的变分水平集方法. *中国图像图形学报*,2010,15(5):808–813.
- [13] 王琦,潘振宽,魏伟波.隐式曲面两相图像分割的变分水平集模型及对偶方法. *电子学报*,2011,39(1):207–212.
- [14] 王琦,潘振宽,魏伟波.隐式曲面多相图像分割的变分水平集方法. *计算机辅助设计与图形学学报*,2010,22(12):2202–2208.



端金鸣(1989-),男,江苏南京人,硕士,主要研究领域为图像处理,高三维程序设计.



潘振宽(1966-),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为动力学与控制,图像处理,虚拟现实.



何啸川(1989-),男,硕士,主要研究领域为图像处理,光流计算.



魏伟波(1981-),男,博士,副教授,主要研究领域为图像处理,目标识别与跟踪,虚拟仿真技术.



刘存良(1977-),男,讲师,主要研究领域为虚拟现实与可视化技术,变分图像处理.

www.jos.org.cn

www.jos.org.cn