

反射剖面精确拟合的次表面散射计算方法^{*}

梁仕宇^{1,2}, 高阳^{1,3}, 丛宇⁴, 郝爱民^{1,3}



¹(虚拟现实技术与系统国家重点实验室(北京航空航天大学), 北京 100191)

²(西安电子科技大学 计算机科学与技术学院, 陕西 西安 710071)

³(中国医学科学院 虚拟人体和虚拟手术技术创新单元, 北京 100032)

⁴(北京众绘虚拟现实技术研究院有限公司, 北京 101300)

通信作者: 高阳, E-mail: gaoyangvr@buaa.edu.cn; 郝爱民, E-mail: ham@buaa.edu.cn

摘要: 近年来, 随着电影、游戏、虚拟现实应用等对真实感要求的不断提高, 针对人体组织、牛奶等半透明材质的实时渲染变得越发重要. 针对当前大部分次表面散射计算方法难以正确估计散射范围的问题, 提出了一种全新的次表面散射计算方法用以精确表示最大散射距离. 首先, 针对暴力蒙特卡洛光子追踪结果进行模拟, 以得到反射剖面结果. 其次通过多项式模型进行反射剖面拟合, 计算精确着色点处的最大散射范围. 最后, 提出了一种新的重要性采样方案以减少蒙特卡洛所需的采样数, 进一步提高计算效率. 此外, 方法所需的参数仅由着色点上的反射率以及材质平均自由程提供, 以便于灵活调整渲染效果. 实验证明, 所提模型避免了之前对于散射范围的错误估计, 对材质反射率复杂的区域具有更好的渲染精度, 且渲染速率满足实时要求.

关键词: 次表面散射; 半透明材质; 真实感渲染; 函数拟合; 实时渲染

中图法分类号: TP391

中文引用格式: 梁仕宇, 高阳, 丛宇, 郝爱民. 反射剖面精确拟合的次表面散射计算方法. 软件学报, 2023, 34(8): 3757-3773. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/6545.htm>

英文引用格式: Liang SY, Gao Y, Cong Y, Hao AM. Subsurface Scattering Computation with Accurate Reflectance Profile Fitting. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2023, 34(8): 3757-3773 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/6545.htm>

Subsurface Scattering Computation with Accurate Reflectance Profile Fitting

LIANG Shi-Yu^{1,2}, GAO Yang^{1,3}, CONG Yu⁴, HAO Ai-Min^{1,3}

¹(State Key Laboratory of Virtual Reality Technology and Systems (Beihang University), Beijing 100191, China)

²(School of Computer Science and Technology, Xidian University, Xi'an 710071, China)

³(Reserch Unit of Virtual Body and Virtual Surgery Technologies, Chinese Academy of Medical Sciences, Beijing 100032, China)

⁴(Unidraw Virtual Reality Technology Research Institute Co. Ltd., Beijing 101300, China)

Abstract: Recently, with the continuous improvement of realism requirements of movies, games, virtual reality applications, etc., the real-time rendering of translucent materials such as human organs and milk has become more and more important. For most of the current subsurface scattering calculation methods, it is difficult to correct the scattering range. To tackle this estimation issue, a new subsurface scattering calculation formula is proposed to accurately represent the maximum scattering distance. First, the brute-force Monte Carlo photon tracking results are simulated to obtain the reflectance profile results. Second, the selected polynomial model is used to fit the reflectance profile to calculate the precise maximum scattering range at the shading point. To begin with, a new importance sampling scheme is proposed to reduce the number of Monte Carlo samples, thereby increasing the computational efficiency. In addition, the required parameters are only provided by the reflectance on the shading points and the mean free path of the material, so as to flexibly

* 基金项目: 国家自然科学基金(62002010); 北京市自然科学基金(4214066); 中国医学科学院医学科学创新基金(2019-I2M-5-016); 北京市生物医学工程高精尖创新中心(ZF138G1714)

收稿时间: 2021-08-24; 修改时间: 2021-09-30, 2021-10-20; 采用时间: 2021-11-16; jos 在线出版时间: 2022-09-30

CNKI 网络首发时间: 2022-11-15

adjust the rendering effect. Experiments results have shown that the proposed model can avoid the previous error estimation of the scattering range, and has more accurate rendering results of the complex reflectivity area of the material. Meanwhile, the rendering rate meets real-time requirements.

Key words: subsurface scattering; translucent material; physically-based rendering; function fitting; real-time rendering

在游戏、VR 交互等需要实时渲染的应用场景中,如何在更短的时间内进行更加精确的半透明渲染已经成为一个十分重要的研究问题.对于大多数真实感渲染模型,现有大多数双向反射分布函数 (bidirectional reflectance distribution function, BRDF) 算法往往只能考虑光在表面上的传输行为,而现实世界中的绝大部分半透明物体,材质往往由一个或多个半透明层组成.如牛奶、玉石、大理石、人体组织等涉及到光在介质内部传输的材质, BRDF 无法提供准确的渲染结果,这给逼真的半透明材质渲染带来了巨大挑战,次表面散射算法的引入是解决这类问题的首选.

次表面散射算法主要考虑光在介质内部的传输行为^[1].对于从入射点入射的光,在经过若干次散射之后会在距离入射点一定距离之外的出射点进行出射.对于光在材质内部的传输行为,通常可以使用光线追踪相关的方法进行准确模拟^[2-9].但由于光线追踪难以满足实时的要求,一部分研究将注意力放在了对于次表面散射的解析计算模型之上^[10-17],即双向次表面散射反射分布函数 (bidirectional surface scattering reflectance distribution function, BSSRDF).这类计算模型需要对物体进行一系列假设,如认为物体具有表面光滑、厚度无限的半平面等,尽管与现实世界物体有出入,但其能在提供相对准确渲染结果的同时极大缩短渲染时间.基于此类模型,可将次表面散射拓展到屏幕空间之上,通过简单的函数对反射剖面进行拟合以在图像空间上计算散射辐射,从而进一步提高渲染效率,满足实时渲染要求^[18-22].然而,现有模型大都面临最大散射距离难以明确定义,样本点无法精确评估的问题.屏幕空间次表面散射算法一般通过重要性采样或者直接固定最大散射距离来确定散射范围,然而前者可能会使样本点距离着色点距离过大,导致样本点的错误贡献计算^[23];而后者可能会使样本点分布不准确,导致模糊欠缺或过度模糊^[19].

针对上述问题,我们提出一种新的次表面散射蒙特卡洛拟合模型,在每个着色点上动态计算最大散射距离以精确评估样本点的分布范围.同时为了满足易用性的要求,我们对计算所需参数做出简化和转换,以允许使用简单的输入参数对渲染结果进行调整.除此以外,我们针对屏幕空间上的次表面散射计算,提出了一种新的重要性采样方案以实时生成样本点.

总结来说,我们的贡献包括:

- (1) 提出了一个总反射率向单散射率的转化模型,替代原先在两者之间的复杂的转化计算,以快速得到所需参数.
- (2) 提出了一个改进的反射剖面多项式计算模型以精确计算最大散射距离,避免了样本点的不正确分布,使渲染效果更加精确.
- (3) 提出了一个单散射率和平均自由程相关的材质累积分布函数 (cumulative distribution function, CDF) 反演近似式以进行重要性采样计算.该式不依赖于具体的累积分布函数,适用于任何形式的半透明材质反射剖面.

本文第 1 节介绍次表面散射的历史研究发展和研究现状.第 2 节介绍次表面散射的背景 BSSRDF.第 3 节介绍本文对于次表面散射的改进计算模型.第 4 节介绍屏幕空间上蒙特卡洛计算的新重要性采样方案.第 5 节介绍本文所提出的算法在具体应用中的实现过程.第 6 节介绍实验结果以及分析.第 7 节总结全文.

1 次表面散射相关工作

次表面散射计算模型一直是真实感渲染领域的研究热点,可大致细分为光线追踪模型、基于物理的解析模型、实时计算模型和捕获与重渲染模型 4 种.

1.1 光线追踪方法

在此领域下, Hanrahan 等人^[2]最初提出一种针对多层结构的次表面散射计算方法,使用解析式对单散射进行计算,并提出了一套介质内部的蒙特卡洛通用规则对光子进行模拟以计算多散射.之后 Wang 等人^[3]对其进行了

拓展,并使用C语言进行实现.之后,用于表面的光线追踪算法如光子映射^[5]和双向路径追踪算法^[4]被拓展到介质内部以计算内部的光传输行为,并在表面处计算次表面散射影响.随着Jensen等人^[1]提出偶极子的近似计算模型,基于光线追踪的方法逐渐与此类计算模型进行混合以提高计算效率,如Li等人^[24]的混合方法.黄学真等人^[25]使用光子映射并调整其分布概率以缩短计算时间.近年来,对于次表面散射的路径追踪逐渐趋向于零方差理论和路径引导方法.Křivánek等人^[6]提出了零方差理论,基本思想是在每一步均构建最佳路径,以此加快计算速度并消除由方差引起的图像噪声.Herholz等人^[7]对此理论进行拓展,并完善出一套完整的零方差采样方案.随后,d'Eon^[8]将零方差理论与广义辐射传输(generalized radiative transfer, GRT)结合,进一步阐述了零方差理论的准确性与优越性.而路径引导方法基于预先计算场景内光源分布情况,在构造路径时尽可能偏向光源以减小噪声,最新的代表性工作由Deng等人^[9]提出.尽管介质内部的体积传输是次表面散射理论上的最优解,但是由于计算复杂性导致的渲染耗时极高,以及需要介质内部参数的详细定义而导致数据集过于庞大,因此难以用于实时计算.相比之下,本文方法仅需要材质表面的简单参数而不需预计算,渲染时长可显著降低,能够完全满足实时渲染的需求.

1.2 基于物理的解析式模型

基于物理的解析模型最初由Jensen等人^[1]从辐射传输方程开始推导,基于对边界条件与扩散方程近似解的考虑提出了偶极子计算模型.由于其只适用于无限单层半平面,Donner等人^[10]加入了介质下边界的考虑,提出了可用于模拟多层介质的多极子模型.Jakob等人^[11]将之前对介质同质性的假设拓展到了异质性介质,提出了一个对异构介质的渲染框架以及对应的偶极子解决方案.由于偶极子模型无法精确模拟散射效果,d'Eon等人^[12]提出了一个量化扩散模型,并将虚拟点光源改进为扩展光源,极大消除了计算误差.随后,d'Eon^[13]同样对经典偶极子模型进行了改进,使其基本与作为ground truth的蒙特卡洛结果相匹配.Habel等人^[14]加入了对入射光倾斜度的考虑,并使用蒙特卡洛计算扩展光源的影响,进一步提升了单散射与多散射计算精度.Frisvad等人^[15]将偶极子模型中的点光源改进为射线源来提高其准确性.d'Eon^[16]在入射光的基础上加入了出射光以完善次表面散射的准确表述.近年来,Frederickx等人^[17]针对高前向散射介质计算其次表面散射.解析式模型在满足物理条件的基础上对光线追踪方法进行了简化,且无需介质内部体积参数,尽管其能将原本数小时的渲染时长缩减为数分钟,但相对于实时计算的要求仍有差距.本文拟提出方法虽不严格满足物理条件,但具有和解析式模型相似的渲染精确性.

1.3 实时计算模型

对于次表面散射的多数研究都集中在实时性方面.针对实时计算,又可细分为3个子方向:针对着色点信息的预计算;在图像上的快速滤波/蒙特卡洛;针对体积上的扩散方程求解.其中预计算的思想是,将场景内与视角信息无关的其他信息进行预计算,以避免在散射评估阶段的重复评估,代表性方法包括Jensen等人^[26]提出的样本层次树的构建,这类层次存储方法直至近年仍在使用^[27].

随后,基于3D的信息存储被拓展到2D空间,即Image-based方法,这种技术降低了存储要求,但引入了参数化等其他问题.对于图像空间上的散射评估,又有卷积计算以及基于蒙特卡洛的样本估计,两者有相似之处,但都需要某些方式对扩散剖面进行近似以使评估结果足够精确,其中比较有代表性的是d'Eon等人^[18]提出的高斯加权方法,Christensen等人^[20]提出的规范反射剖面方法以及Jimenez等人^[19]的可分离核方法.赵沁平等人^[21]将反射剖面进行分解,并在图像空间执行散射计算.当基于屏幕空间的SSSS方法^[22]被提出后,后续的图像空间计算大多集中于此以进一步提升效率并避免对原始渲染管线作过多的更改.Maisch等人^[28]着重考虑了大散射距离处的散射贡献,Yatagawa等人^[29]则使用两个高斯的组合对散射剖面进行近似表示.

针对体积上的扩散方程,求解方法多将物体体积表示为单个单元,并在GPU上使用松弛算法对扩散方程进行迭代求解直至收敛^[30-32].这类方法的计算精度较为准确,且满足介质的异质表示,但总体效率相对较差.

尽管现有的实时计算方法已能对次表面散射进行较为准确的估计,但如何对屏幕空间上样本点进行选取具有挑战.多数方法通过预计算查找表(look up table, LUT)来解决样本生成,代价则是需要存储额外的数据.而对于样本点的实时生成,可能因散射范围不明确而导致计算错误.相比之下,本文方法能明确着色点处的散射范围并实时生成样本点,节省预计算时间.

1.4 捕获与重渲染

捕获与重渲染方法主要针对真实物体进行相关数据测量, 并使用渲染数据对此物体进行重新渲染, 以最大程度上接近现实世界的真实感效果. 其中的难点在于对真实测量数据的存储和处理. Goesele 等人^[33]使用高动态相机去捕获相关图像数据, 并将其重采样为一种分层数据结构. Peers 等人^[34]使用了矩阵分解的思想, 对测量数据进行紧凑表示以减小存储空间. Ghosh 等人^[35]针对人脸提出了对应的渲染方案, 并使用若干张照片进行实现. 这类方法能在已有对象数据的基础上, 对物体进行高效率和高精度的渲染, 但最大的限制在于其只能渲染特定的捕获物体, 通用性较差. 相比之下, 本文方法在保持较高的渲染准确性的基础上, 使用的计算模型适用于任何材质, 且易于通过简单参数调整渲染效果, 具有较好的通用性.

除以上方面, 近年来次表面散射也开始与机器学习尝试结合^[36]. 由以上相关研究工作可知, 针对次表面散射的研究对于真实感渲染具有重要价值. 其中考虑到次表面散射的实用性, 又以对实时计算的研究居多. 受现有工作启发, 我们在屏幕空间上执行散射计算, 以进一步提升计算效率至实时要求, 同时尽可能保证渲染精度.

2 BSSRDF 基础

本文通过考虑光在物体上的次表面散射来对半透明材质物体进行渲染. 对于半透明物体, 其出射辐射的描述可表示为在物体表面以及半球角度上的双重积分, 其中 S 项是一个 8D 函数, 用来解释光在不同点、不同方向间的传输行为. 对于某一着色点 x_o 上的出射辐射可通过下述积分进行计算^[37]:

$$L(x_o, \omega_o) = \int_A \int_{\Omega_+} L_i(x_i, \omega_i) S(x_i, \omega_i, x_o, \omega_o) |N_i \cdot \omega_i| d\omega_i dx_i \quad (1)$$

其中, L 是出射辐射, A 是物体表面积, Ω_+ 是着色点的上半球, N_i 是当前着色点的法线方向, x 和 ω 分别表示位置与方向角. 式中的 S 项被描述为 BSSRDF, 通过公式 (2) 计算:

$$S(x_i, \omega_i, x_o, \omega_o) = \frac{dL(x_o, \omega_o)}{d\Phi(x_i, \omega_i)} \quad (2)$$

其中, Φ 表示入射点 x_i 处的辐射通量. 由于 S 项是个 8D 函数 (其中 x 和 ω 各表示一个 2D 变量), 所以很难对其进行直接计算. 在 Jensen 的偶极子方法中, S 项被分为单散射和多散射进行衡量:

$$S = S_d + S^{(1)} \quad (3)$$

对于高散射介质, 即使是小距离内的光传输也会经历大量的散射事件, 所以仅考虑多散射 S_d 即可满足精度要求, 此时会忽略单散射项 $S^{(1)}$.

为了方便多散射的评估计算, Jensen 等人^[26]将多散射项 S_d 拆分表示为 3 个项的乘积, 分别表示为光进入介质时的衰减, 光在内部传输时的衰减, 以及最后出射出介质的衰减, 以对光的传输行为进行更细致的考虑:

$$S_d = \frac{1}{\pi} F_t(\eta, \omega_o) \cdot R_d(x_i, x_o) \cdot F_t(\eta, \omega_i) \quad (4)$$

其中, F_t 表示菲涅尔透射计算, R_d 表示反射剖面. 为了方便计算, R_d 通常被简化为仅与表面点间的距离有关而与光照方向无关, 此时对剖面的考虑从 8D 降低到 4D. 将公式 (4) 重新带入到出射辐射的积分计算中, 则有:

$$\begin{cases} L(x_i, x_o) = \frac{1}{\pi} F_t(\eta, \omega_o) B(x_o) \\ B(x_o) = \int_A E(x_i) R_d(x_i, x_o) dx_i \\ E(x_i) = \int_{\Omega_+} L_i(x_i, \omega_i) F_t(\eta, \omega_i) |N_i \cdot \omega_i| d\omega_i \end{cases} \quad (5)$$

其中, 外部积分 B 表示为散射辐射度, 内部积分 E 表示为入射辐照度. 本文仅对外部积分进行研究, 而不涉及到内部积分具体的辐射计算. 对于反射剖面 R_d , 可进一步将其参数进行简化, 让其仅与入射点与出射点之间的距离 $r = |x_i - x_o|$ 相关.

3 渲染算法

3.1 暴力蒙特卡洛

为了避免反射剖面的复杂计算,需要对其结果做出合适的近似.同 Christensen^[20]提出的规范化扩散剖面相似,我们直接对作为 ground truth 的蒙特卡洛光子追踪器 (MCML)^[3]的结果进行拟合,以最大程度上接近真实结果.区别于传统的光线追踪渲染器,为了提升计算速度,MCML 在 2D 柱坐标系 (z, r) 下(分别表示散射的深度和距离)上模拟光子在体积内部的传输并进行数值模拟计算,以简化原先在 3D 空间下光子的复杂传输过程,最终在每个坐标单元中存储辐射度,以获取物体表面坐标散射辐射的数值结果.为此,需要分别对 MCML 的输入文件作出假定,并对输出文件进行处理.对输入文件的假定如下.

(1) 假设物体为一个单层且无限厚的介质,即设置为一个 3 层结构(上下层为空气层,中间层为测量物体),中间层厚度设置为 $1.0E+8$ 以避免透射的影响.

(2) 物体折射率对散射光的影响假定为仅由菲涅尔项进行控制,即 3 层的折射系数 η 均设置为 1 以避免折射系数影响.

(3) 各项异性参数 g 假定为 0.并使用相似性理论来考虑光子散射的各项异性,即对于光子的各向异性散射,在多次散射事件后,其效果可以等同于另一个散射系数 σ'_s 对应的各向同性散射.

通过以上假设,仅需调整散射系数以及吸收系数,即可得到对应的反射剖面结果 R_d .实验过程中我们发现,MCML 的实验数据 $R_d(r)$ 降至 0 后,后续的“0”值数据会对剖面拟合造成较大的误差.为此,需要进一步对 MCML 的输出结果做出处理,以对恒为 0 的数据进行丢弃,我们将这一步称之为“裁剪”.具体来说,通过选取一个合适的散射距离作为拟合过程中的最大散射距离 r'_{\max} ,我们仅考虑选定范围内的数据来进行拟合,并丢弃范围之外的其他数据,以使拟合结果更加精确. r'_{\max} 的选取规则如下.

(1) 对于散射距离 r ,从 $r=0$ 开始,每增加一段特定间隔,执行一次当前 r 是否可作为 r'_{\max} 的判断,直至条件判断成功.其中特定间隔称为“裁剪间隔”,最大散射距离判断式如下:

$$R_d(r'_{\max}) \leq R_d(0) \cdot \varepsilon \quad (6)$$

其中, $R_d(0)$ 表示 $r=0$ 处的数据,是 R_d 曲线的最大值. ε 决定了选取 r'_{\max} 时的精细程度,在实验中 ε 设置为 0.005.

(2) 裁剪间隔随当前距离 r 发生变化.我们在实验中发现,当 r'_{\max} 较小时,选用过大的裁剪间隔会造成对 r'_{\max} 的错误估计.所以裁剪间隔选取规则如下:当 $r \in [0, 0.5]$ 时,裁剪间隔为 0.05;当 $r \in (0.5, 1]$ 时,裁剪间隔为 0.1;当 $r \in (1, 2]$ 时,裁剪间隔为 0.2;当 $r \in (2, 5]$ 时,裁剪间隔为 0.5;当 $r > 5$ 时,裁剪间隔为 1.

3.2 反射剖面拟合

在次表面散射计算中,通常使用极坐标来对反射剖面 $R_d(r)$ 做积分,此时的积分项是 $R_d(r)$ 与散射距离 r 的乘积 $R_d(r) \cdot r$,为了简化表示,本文将此项称为 $R'_d(r)$.我们直接对 $R'_d(r)$ 的结果进行拟合,通过实验提出了一个在任何散射率下均可以对 $R'_d(r)$ 做出精确拟合的计算式:

$$R'_d(r) = \frac{ar+b}{r+c} \quad (7)$$

其中, r 为散射距离, a 为分子系数项, b 为分子常数项, c 为分母常数项.该式并不能保证其值常大于 0,相反其会在某个散射距离 r 处准确降为 0,此距离即为最大散射距离 r_{\max} ,出射辐射仅在 $r_{\max} = -a/b$ 的半径范围之内对散射进行积分考虑.图 1 显示了在不同单散射率下此多项式对 MCML 结果的拟合对比,可证明此模型对 MCML 的拟合精确性.

由于多项式模型中的 a, b, c 这 3 项未知,因此需要通过输入参数来对此 3 项分别进行拟合计算.为了体现用户友好性,方便结果的调试,本文中选取的输入参数为总反射率 A 以及材质平均自由程 l .

3.2.1 单散射率的拟合

根据 MCML 的输入格式以及上述假设,材质的反射剖面仅决定于散射系数 σ'_s 和吸收系数 σ_a ,这可能导致参数不易调控. Jensen 等人^[26]提出了一种参数转化计算,将散射系数和吸收系数转化为总反射率 A 和平均自由程 l .

而在本文中,为了直观查看参数对剖面的影响,我们使用单散射率 $\alpha = \sigma'_s / (\sigma'_s + \sigma_a)$ 与平均自由程 l 作为模型的调整参数.为此,需要将总反射率 A 转化为单散射率 α .在蒙特卡洛路径追踪过程中,光子的能量衰减仅与每一次碰撞事件发生时的单散射率有关,而与路径长度无关,因此 A 与 α 呈一一对应关系,即总反射率 A 仅取决于单散射率 α .MCML 的实验结果也证明了上述理论.通过在 $\alpha \in [0, 1]$ 范围内设置若干组样本点并记录其对应的总反射率 A ,我们发现两者可以用公式 (8) 进行准确转换:

$$\alpha = \frac{5.67A}{A^2 + 3.84A + 0.84} \quad (8)$$

图 2 显示了我们的计算式对实际转化关系的拟合结果,可看出其准确描述了从 A 到 α 的转化关系.注意,从 A 到 α 的转化需要满足边界条件,具体来说,当 $A=0$ 时, $\alpha=0$; 当 $A=1$ 时, $\alpha=1$.尽管此拟合式能准确描述 A 与 α 之间的转化关系,但无法满足后一个边界条件,只能极大程度上趋近于 1.在实际实验中,适当舍弃后一个边界条件可保证整体的精确性.

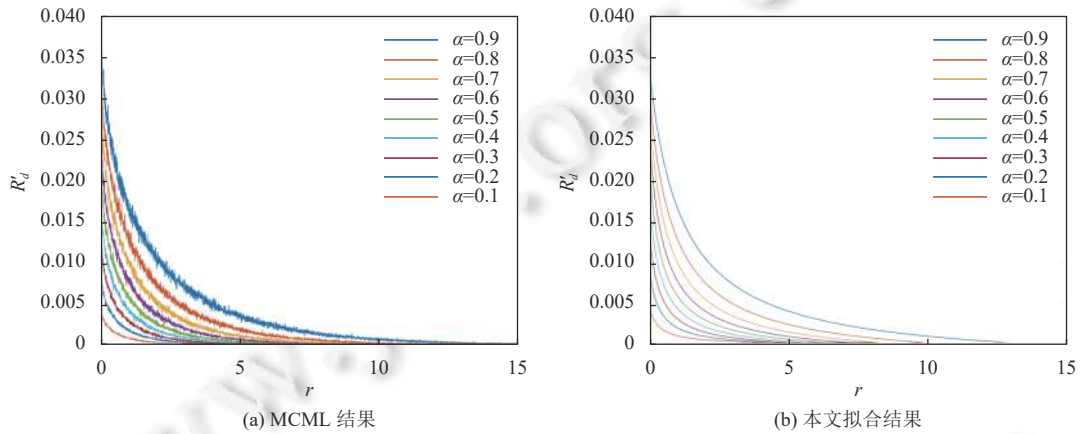


图 1 不同散射率下多项式模型对 MCML 的拟合

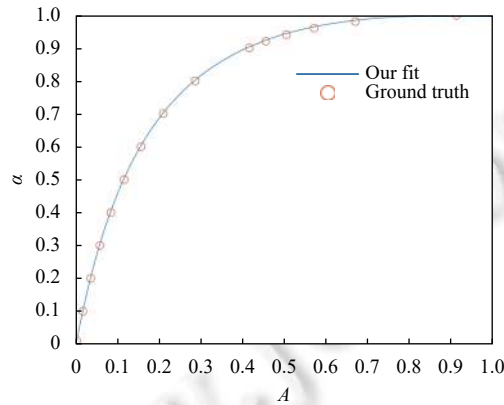


图 2 从 A 到单散射率的转化拟合

3.2.2 分子系数项的拟合

为了更好地观察 l 和 α 分别对分子系数项 a 的影响,我们首先固定平均自由程 l ,仅拟合 α 与 a 间的函数关系,对于其中仍然未知的参数(本文中设定为 k_i ,其中 $i \in [1, 2, \dots]$),再通过加入 l 进行拟合,以确定 l 和 α 两者的共同影响(这个思路同样被用在分子常数项和分母常数项的拟合中).实验中,当固定平均自由程 l 后,我们发现 a 项在 $\alpha \in [0, 0.9]$ 范围内成线性正比关系,而在之后有重新增高的趋势.为了对此函数关系做出精确拟合, a 项的计算分

为两部分:

$$\begin{cases} a = p_1 + p_2 \\ p_1 = k_1 \cdot \alpha \\ p_2 = k_2 \cdot 0.1^{-30(\alpha-1)} \end{cases} \quad (9)$$

其中, p_1 为线性项, p_2 为补偿项. p_1 用来计算 a 项整体的减小趋势, 而 p_2 则用于补偿 p_1 在 $\alpha > 0.9$ 后的不正确估计. 只有当单散射率 α 极大时, p_2 项才会对 a 项产生影响以使结果更加准确. 考虑平均自由程 l 后, 可使用 l 分别对未知系数 k_1 和 k_2 继续进行拟合, 两者都与 $1/l$ 成线性正比关系:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{-0.0064}{l} \\ k_2 = \frac{0.00316}{l} \end{cases} \quad (10)$$

代入公式 (9), 分子系数项计算为:

$$a = \frac{-0.0064 \cdot \alpha}{l} + \frac{0.00316}{l} \cdot 0.1^{-30(\alpha-1)} \quad (11)$$

后文图 3 表示了此拟合式在不同平均自由程下随单散射率的变化情况. 其中不同颜色的曲线表示不同的平均自由程, 圆点表示 ground truth. 从图中可看出计算式对 a 项的拟合较为精确.

3.2.3 分子常数项的拟合

实验过程中, 我们发现分子常数项 b 几乎不随平均自由程 l 发生显著改变, 仅会因单散射率 α 发生变化 (如图 4 所示), 因此我们假定 b 项仅通过 α 即可进行准确的拟合计算. 为了匹配在 $\alpha = 0$ 时 a 项为 0 的情况 (我们希望当单散射率 $\alpha = 0$ 时, 拟合式在各处恒为 0), b 项拟合模型被选择为一个幂函数:

$$b = k_1 \cdot \alpha^{k_2} \quad (12)$$

其中, k_1 为定值, 设定为 0.461. 幂次项 k_2 与单散射率 k_2 相关, 呈 S 型曲线函数关系. 为了计算幂次项 k_2 , 我们使用下式对 k_2 进行拟合:

$$k_2 = (6.7 \cdot (\alpha - 0.45)^2 + 2.6) \cdot \alpha + 1.3 \quad (13)$$

图 4 显示了我们对于 b 项的拟合, 可看出拟合结果良好.

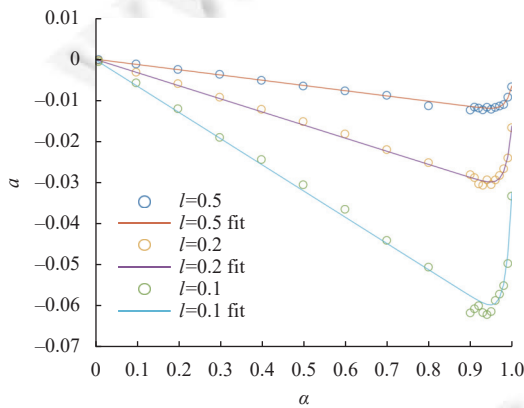


图 3 不同平均自由程下分子系数项的拟合结果

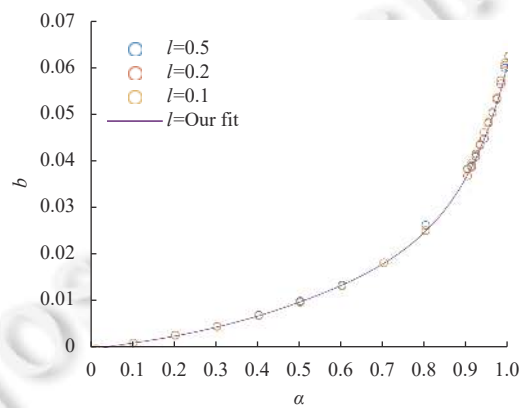


图 4 不同平均自由程下分子常数项的拟合结果

3.2.4 分母常数项的拟合

我们在实验中发现, 分母常数项 c 不会对函数的变化趋势造成过大影响. 所以我们选用指数形式对其进行拟合, 当固定平均自由程 l 时, α 与 c 项之间的关系如下:

$$c = k_1 \cdot \exp(k_2 \cdot \alpha) + k_3 \quad (14)$$

其中, k_1, k_2, k_3 为未知参数. 经过对所有平均自由程为 l 的情况进行比较, k_2 被设定为一个定值 4.2. 对于 k_1 和 k_3 , 沿

用之前的方法使用 l 对其进行拟合:

$$\begin{cases} k_1 = 0.0097 \cdot l \\ k_3 = 0.166 \cdot l \end{cases} \quad (15)$$

图 5 显示了不同平均自由程条件下 c 项的拟合结果. 其平缓的变化趋势可通过简单的指数函数进行准确的描述.

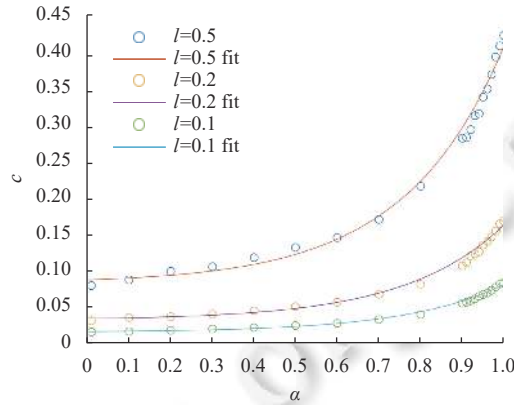


图 5 不同平均自由程下对分母常数项的拟合结果

3.3 反射剖面修正

根据反射剖面的基本性质, $R'_d(r)$ 需要满足规范性要求. 本文中仅考虑最大散射距离 r_{\max} 以内的有效散射范围, 所以应满足以下条件:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\max}} R'_d(r) dr = A \quad (16)$$

根据概率密度函数 pdf 的相关性质, 此式等价于 $R_d(r)$ 对应的累计分布函数 $cdf(r)$ 在 r_{\max} 处恰好为 1. 我们的拟合模型可以准确计算对应的 CDF:

$$cdf(r) = \int_0^r \frac{R'_d(r) \cdot 2\pi}{A} dr = \frac{a \cdot r + (b - a \cdot c) \ln\left(\frac{r}{c} + 1\right)}{A} \cdot 2\pi \quad (17)$$

由于我们的模型是经过近似后的计算结果, 所以不能保证对应的 CDF 在 r_{\max} 处为 1. 这可以通过修正来解决, 即让反射剖面额外除以一个修正因子 $cdf(r_{\max})$, 以使其恰好在最大散射距离处的 CDF 为 1, 以满足反射剖面的能量守恒要求:

$$R_d^{co}(r) = \frac{R_d(r)}{cdf(r_{\max})} \quad (18)$$

4 重要性采样

Christensen^[20]提出的规范反射剖面能很好地对空间变化的反射剖面进行拟合, 但遗憾的是由于近似式的特殊形式无法对 CDF 式求逆, 导致无法实时生成样本点. 大多数解决方案会预计算 LUT, 由此需要额外的数据存储. 尽管在后来的工作中, 相应的近似采样式被 Xie 等人^[23]提出以进行样本点的实时生成, 但我们发现其仍有部分缺陷. 首先是采样距离的限制问题, Xie 等人^[23]的采样近似式无法对采样距离 r 做出范围限制, 导致其有一定概率采样到距离着色点极远的位置, 可能超出物体表面范围从而致使严重的采样错误. 其次, Xie 等人^[23]的采样式没有通用性, 由于其参数只针对规范剖面, 致使当使用其他模型时此采样式不可用. 针对以上问题, 我们提出了一种针对次表面散射的重要性采样改进算法. 我们对采样距离做出了限制, 且仅依赖于单散射率与平均自由程, 该算法同时可

适用于其他任何反射剖面计算模型.

由于我们模型对应的 CDF 式同样无法求逆, 所以依然采取近似方案, 对 CDF 与采样距离 r 之间的关系进行近似拟合. 我们选用的拟合式为:

$$g(\xi) = (k_1 \cdot \xi - k_2) \cdot \sqrt{\xi} \cdot \ln(1 + \varepsilon - \xi) \quad (19)$$

其中, k_1, k_2 为未知参数, 需要通过单散射率和 l 进行后续的拟合. ξ 为 $[0, 1)$ 之间的随机数. ε 为限制因子, 其不仅能防止采样距离趋于无穷, 也使采样式更加精确. 在实验中, 我们设定为 0.01. 对于未知参数, 我们使用 α 和 l 进行拟合, 最终拟合结果为:

$$\begin{cases} k_1 = 1.504l \cdot \alpha^{2.175\alpha^{0.7} + 0.19} \\ k_2 = 3.993l \cdot \alpha^{3.268\alpha + 0.2838} \end{cases} \quad (20)$$

图 6(a) 显示了此式在固定 l 时不同散射率之间的准确拟合, 图 6(b) 显示了此式在固定散射率时不同 l 之间的准确拟合. 图中散点表示 ground truth, 良好的拟合效果可证明此拟合式可替代复杂的 CDF 反演.

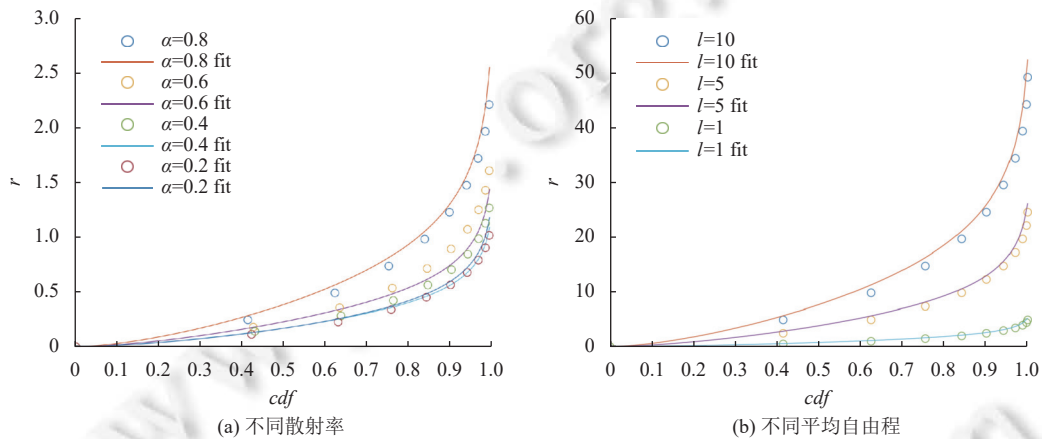


图 6 我们对 CDF 反演的拟合

最后, 通过本文计算的 r_{\max} 对采样距离 r 作出限制:

$$r = \min(g(\xi), r_{\max}) \quad (21)$$

通过计算出的采样距离 r , 再使用均匀采样得到旋转角 φ , 可得到样本点的极坐标, 并在屏幕空间上执行采样, 即可进行后续次表面散射中出射辐射的计算.

5 算法实现

基于上述次表面散射模型的改进算法, 我们接下来将结合屏幕空间计算阐述如何在实际应用中如何使用我们的模型. 本文的算法流程如图 7 所示. 首先, 我们针对场景进行阴影贴图计算以获取深度值; 其次, 我们分别针对半透明物体的镜面反射、透射、漫反射进行计算并分别存储; 再次, 我们仅针对漫反射部分进行次表面散射的评估, 其中涉及到本文提出的重要性采样以及反射剖面的计算; 最后, 我们将各渲染结果重新组合以获取最终的输出结果. 需要说明的是, 本文算法不需预计算, 样本点的生成以及出射辐射的估计均在每一帧中实时计算. 以人脸模型为例, 图中显示了模型在不同阶段的渲染效果.

我们将算法在 GPU 上进行部署, 渲染流程共分为 4 个渲染批次 (pass).

在第 1 批次中, 我们针对光源方向对场景进行预渲染, 并记录场景内的最小深度值. 这些值将被存入阴影贴图中. 其作用有二: 一是用于后续主场景渲染中的阴影计算^[38], 二是用于后续的透射光计算. 若场景中不存在多个光源, 则对光源的重要性进行评估, 对每一个重要光源均进行一次阴影贴图计算.

在第 2 批次中, 我们针对相机方向对场景进行渲染. 半透明物体的出射辐射分为 3 类: 镜面反射部分, 漫反射部分以及透射部分. 由于次表面散射仅针对漫反射部分, 所以在此使用 GPU 的多重渲染目标 (multiple render target, MRT) 特性, 将计算结果分别存储在多个缓冲区 (大小与屏幕空间分辨率一致) 中, 并在之后仅针对漫反射部分进行次表面散射计算.

针对镜面反射, 我们使用经典的 Torrance-Sparrow 计算模型并使用 Karis 等人^[39]的实现方式进行计算. 而对于漫反射, 由于其具有缓慢的变化趋势, 简单的兰伯特模型即可取得不错的结果. 对于透射部分的计算, 我们参考了 Jimenez 等人^[40]的工作, 对半透明物体的透射光做出了多种假设, 结合场景深度信息, 并使用若干高斯函数的线性加权进行近似计算, 最终以较小的计算量实现透射光的估计. 同时为了减少缓冲区数量, 我们将高光部分与透射部分相加并存入同个缓冲区中. 由于算法需要将反射率 A 作为输入, 所以我们设置一个额外缓冲区用于存储 A . 同时为了减少不必要的计算, 使用模板缓冲特性仅针对标记为半透明材质的物体进行后续计算.

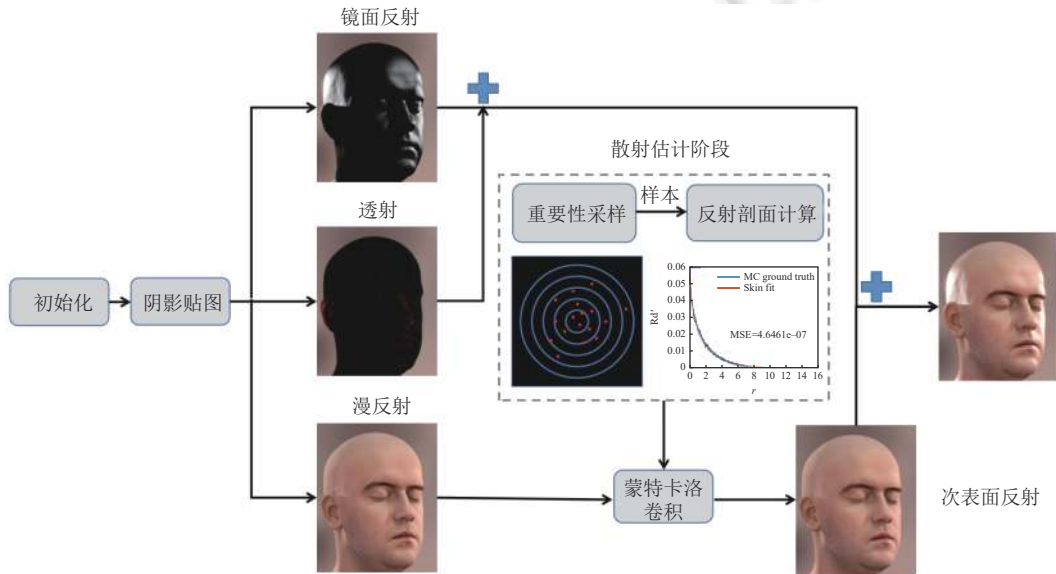


图 7 算法流程图

在第 3 批次中, 针对之前计算的漫反射部分进行次表面散射估计. 我们使用蒙特卡洛方法来进行出射辐射中的积分估计, 考虑到场景内的深度差异, 这里使用能量守恒的蒙特卡洛估计式^[41]:

$$L = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{R(\sqrt{r_i^2 + d_i^2})}{p(r_i)} L(\sqrt{r_i^2 + d_i^2}, \varphi_i)}{\sum_{i=1}^n \frac{R(\sqrt{r_i^2 + d_i^2})}{p(r_i)}} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i L(\sqrt{r_i^2 + d_i^2}, \varphi_i)}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (22)$$

其中, n 为样本点的个数, R 为反射剖面. r_i 为第 i 个样本距离着色点的采样距离, d_i 为样本点与着色点间的深度差异.

样本点的选取使用第 4 节描述的重要性采样方案. 为减小蒙特卡洛的误差, 将低差异序列代替纯随机数. 为了避免计算量过大, 我们没有针对 RGB 三通道分别采样, 而是选用了材质平均自由程 l 最长的通道 (如皮肤渲染时为 R 通道). 需要注意的是, 我们对剖面的计算来源于世界空间内的真实测量值, 而场景内物体不一定与真实大小保持一致, 所以进行出射辐射计算前需对深度差异和散射距离分别乘以缩放因子 s_d 和 s_r .

在最后一个批次中, 我们将次表面散射部分重新与镜面反射部分、透射部分相混合, 完成对半透明物体的最终渲染.

6 实验结果与分析

本文使用 HLSL 高级着色语言以及 Microsoft DirectX 12 SDK 来实现我们的算法. 本文给出的所有结果基于 Intel Core(TM) i7-7700HQ CPU, 16 GB 内存、NVIDIA GTX1050 GPU 实验平台.

6.1 与规范反射剖面方法的比较

为了评估本文模型的数值准确性, 我们分别使用均方差 MSE 和确定性系数 R-square 指标与 MCML 的数值计算结果 (ground truth) 进行误差分析. 同时, 我们与规范反射剖面模型进行了对比. 选择规范剖面的原因在于此拟合式的精确性超越了绝大部分评估模型, 且与我们一样是对 MCML 剖面结果的直接拟合, 在业界中得到了广泛的应用.

表 1 中显示了我们的模型与规范反射剖面之间的误差对比. 为了精确表示, 我们将散射距离平均分为两段, 并在每一段上分别进行误差估计. 结果表明, 在大多数情况下, 规范化剖面与本文方法均能对蒙特卡洛结果进行精确的拟合. 相较而言, 在以 MSE 为标准的情况下, 虽然在一些大散射距离处我们的拟合值可能比规范反射剖面表现要差一些, 但是在小散射距离以及整体范围方面我们的模型拟合程度好于规范反射剖面. 而在 R-square 方面, 我们的改进 R_d 在各方面都要优于规范剖面, 特别是在后半段的散射距离处. 我们的方法具有更好的效果.

表 1 不同材质下我们的模型与规范反射剖面之间的误差比较

材质	模型	MSE (0-0.5)	MSE (0.5-1)	MSE	R-square (0-0.5)	R-square (0.5-1)	R-square
番茄酱	规范剖面	9.7448E-08	4.5326E-09	5.0975E-08	0.9898	0.5027	0.9934
	本文模型	7.1351E-08	1.1414E-08	4.1373E-08	0.9916	0.8809	0.9942
苹果	规范剖面	2.5702E-05	1.7925E-06	1.3741E-05	0.9801	0.5010	0.9853
	本文模型	6.8160E-06	7.7950E-07	3.7812E-06	0.9941	0.8581	0.9954
大理石	规范剖面	2.4810E-05	1.7023E-06	1.3256E-05	0.9789	0.5012	0.9844
	本文模型	6.7710E-06	7.2461E-07	3.7478E-06	0.9936	0.8476	0.9950
皮肤	规范剖面	1.8591E-06	4.5615E-08	9.5236E-07	0.9855	0.5038	0.9912
	本文模型	7.7719E-07	1.5203E-07	4.6461E-07	0.9944	0.8982	0.9960

图 8 第 1 行展示了本文方法对表 1 中 4 种材质的渲染结果, 材质的不同属性通过修改计算模型中的平均自由程 l 进行调整, 以说明本文对多种材质渲染的通用性. 图 8 第 2 行展示了本文计算模型在相应材质属性下与 MCML 之间反射剖面的对比结果. 因为计算模型是针对 MCML 数值计算结果的精确拟合, 所以误差较小, 低于绝大部分基于物理的解析式模型.

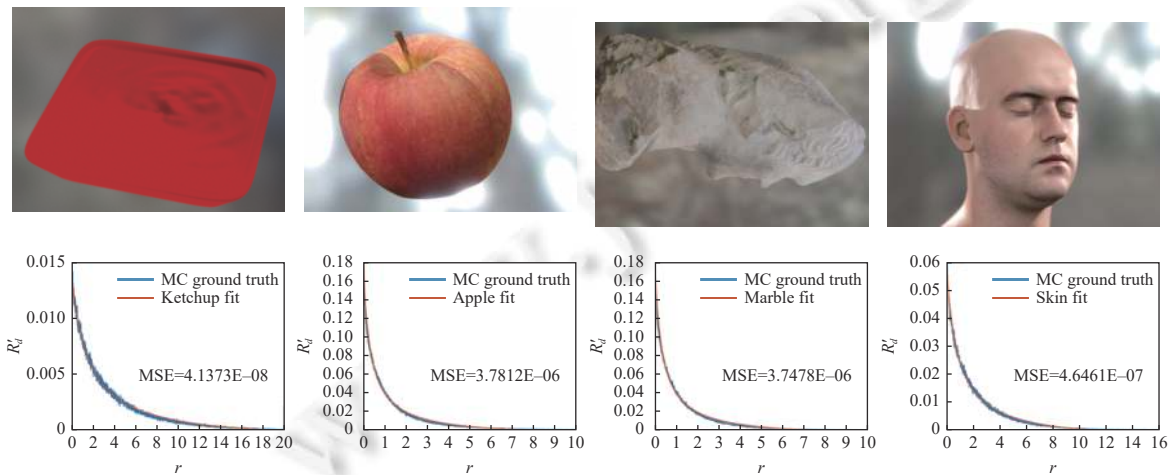


图 8 表 1 中各种材质的渲染结果以及数值误差

6.2 渲染结果展示

为展示本文算法对空间均质材质的渲染效果,我们分别对具有相对复杂几何结构的佛陀模型、龙模型、兔子模型进行渲染,并分别设置不同种类的材质(通过调控平均自由程).图9、图10、图11显示了调控参数 l 和 A 对渲染结果的影响.对于渲染结果所使用的模型参数,我们将其对应的计算模型与 MCML 的数值计算结果进行了对比,以说明本文模型的精确性.图9、图10 展现了不同散射率下,仅改变 l 对结果的影响.从渲染结果和图表可以看出,随着材质平均自由程的增长,材质的最大散射距离以较快速度增加,致使散射范围不断增大,从而半透明物体的阴影边界被逐渐模糊,物体的通透性逐渐增强.

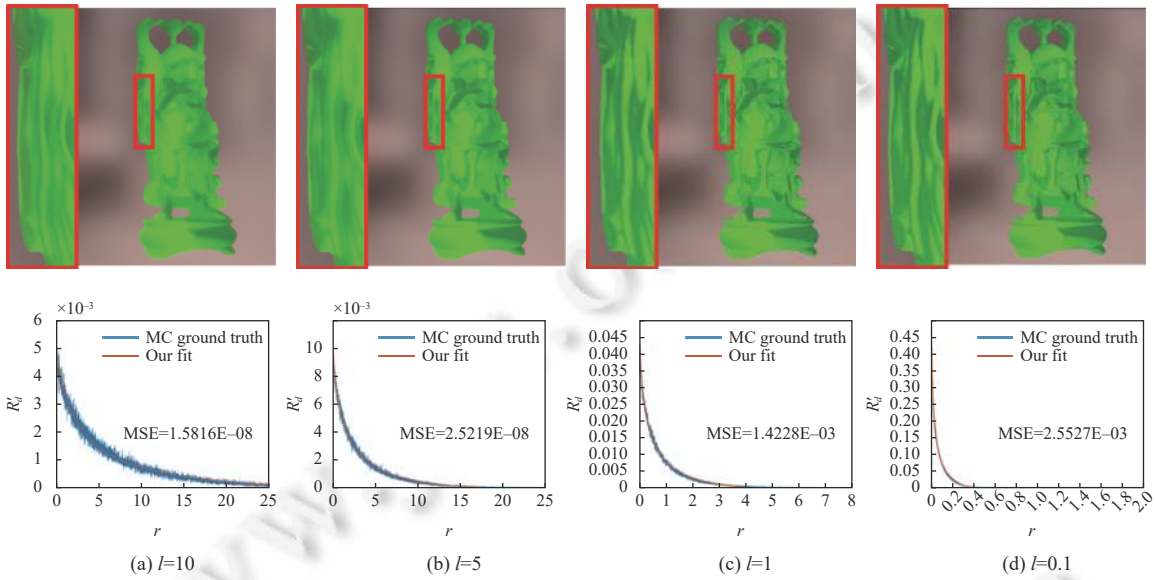


图9 从左至右为 $l=10, 5, 1, 0.1$ 对佛陀的影响 ($\alpha=0.6$) 效果及数值误差

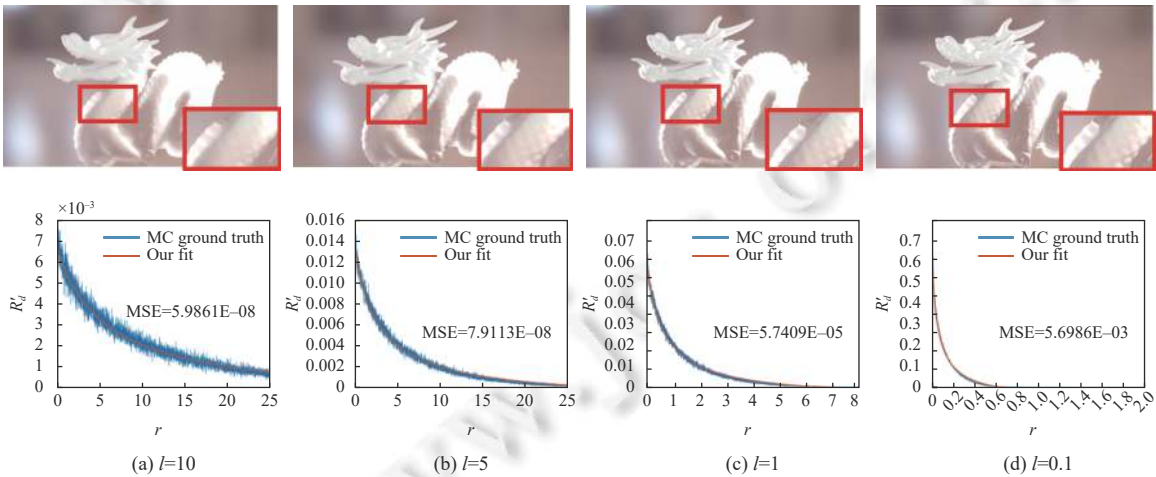


图10 不同平均自由程对中国龙的影响 ($\alpha=0.9$) 效果及数值误差

图11 展现了在固定 l 的条件下,调整参数 A 对渲染结果的影响.尽管参数 A 对散射范围的影响不如 l 明显,但其仍然是反射剖面中的重要组成部分,从图中可以看出,随着表面反射率减小,光在物体表面的散射范围不断减小,导致阴影边界变得分明,当 A 接近 0 时,即使 l 较大,对最终的次表面渲染效果的影响也几近于无.

我们比较了本文计算模型与 MCML 之间的数值误差, 不论如何更改模型参数, 本文模型均能很好地贴合 ground truth, 可见我们计算模型具有较强的精确性和通用性.

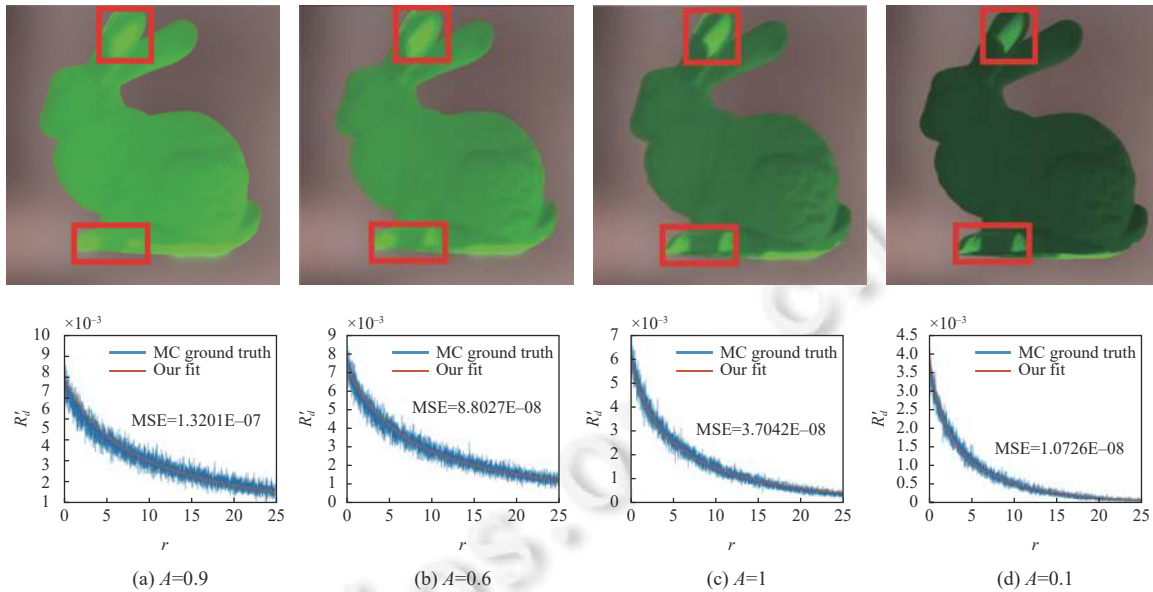


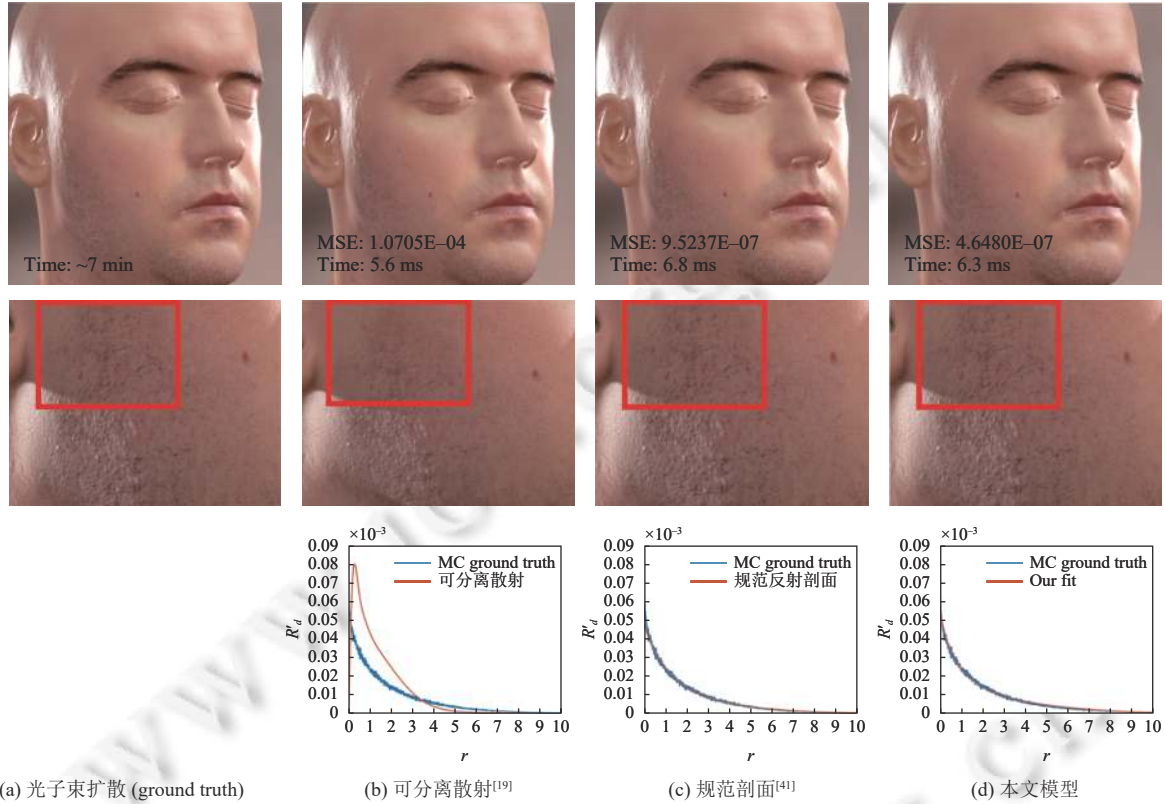
图 11 不同反射率 A 对兔的影响 ($l=10$) 效果及数值误差

为了体现本文算法对空间异质材质的良好渲染效果, 我们对经典面部模型进行渲染, 并与具有空间均质性的可分离散射模型^[19]以及具有空间异质性的规范剖面模型^[20]结果进行比较. 基于异质材质的体积数据极大的复杂性, 我们使用 Habel 等人^[14]的光子束扩散方法代替经典体积传输作为渲染结果的 ground truth. 此方法使用表面辐射进行次表面散射评估, 避免了复杂的空间数据存储, 同时具有极高精确性. 为了展示本文模型的数值准确性, 我们以 MCML 的数值结果进行误差比较. 图 12 显示了我们的整体渲染以及在胡子此类复杂细节区域的对比结果, 以及每种方法对应的渲染时间和反射剖面的数值误差. 其中对于规范剖面, 本文使用 Golubev^[41]的实现方式, 并使用 Xie 等人^[23]的近似式来生成样本点, 为了避免由于采样距离过大引起的错误贡献, 我们手动限制了其采样的最大距离. 尽管 3 种方法在对面部的整体渲染效果上差距不大, 但当视角被拉近, 可发现在具有复杂细节的胡子区域, 可分离散射对其进行了过度的模糊. 规范剖面与本文模型具有相似的效果, 但本文方法无需手动限制采样范围, 且渲染效率优于规范剖面. 图 13 显示了上述实时方法对土豆模型的渲染结果对比, 相较于可分离散射 (图 13(b)) 结果中土豆表面斑点偏红且相对模糊, 规范剖面 (图 13(c)) 和本文方法更接近 ground truth, 同时相较于规范剖面方法, 本文方法渲染耗时更少. 证明本文模型在多种空间异质材质物体上均有良好效果.

为了说明本文所述重要性采样方案的重要性, 我们以人脸模型为例, 使用较低的采样数比较传统的均匀采样和本文提出的重要性采样之间的差异, 结果如图 14 所示. 我们设置采样数为 17, 并使用本文计算模型进行次表面散射估计, 两者单帧渲染时间均为 6.4 ms. 相比之下, 均匀采样 (图 14(a)) 对物体造成了不自然的模糊, 导致具有复杂细节的胡子区域几乎不可见, 且伴随有密集的微小红点, 这一问题可通过增大采样数得到解决, 相应的代价则是渲染时间的增加. 而使用本文重要性采样 (图 14(b)) 进行代替后, 可以发现即使在采样数较低的限制条件下, 依然可以得到较好的渲染结果, 图像上未出现红色噪点, 且胡子区域得到了较好的细节保留.

表 2 为本文算法与展示的经典屏幕空间次表面算法的时间性能对比. 由于屏幕空间与模板缓冲的性质, 屏幕空间算法效率取决于屏幕分辨率大小以及半透明物体所占屏幕比例大小. 本文固定屏幕分辨率大小为 1920×1080 , 并不断改变面部模型所占屏幕比例以统计相应的单帧平均渲染时间. 可以看到本文模型略优于同样

具有空间异质性的规范剖面方法^[41],同时相较于规范剖面的不可实时生成精确样本点,本文的重要性采样方案能在合适范围内准确分布样本.虽然本文模型性能略低于可分离散射方法^[19],但其在复杂区域的渲染结果明显优于可分离散射.从复杂面部的单帧渲染时间可以看出,本文计算模型完全符合实时渲染的要求,满足在实际应用领域中使用需求.



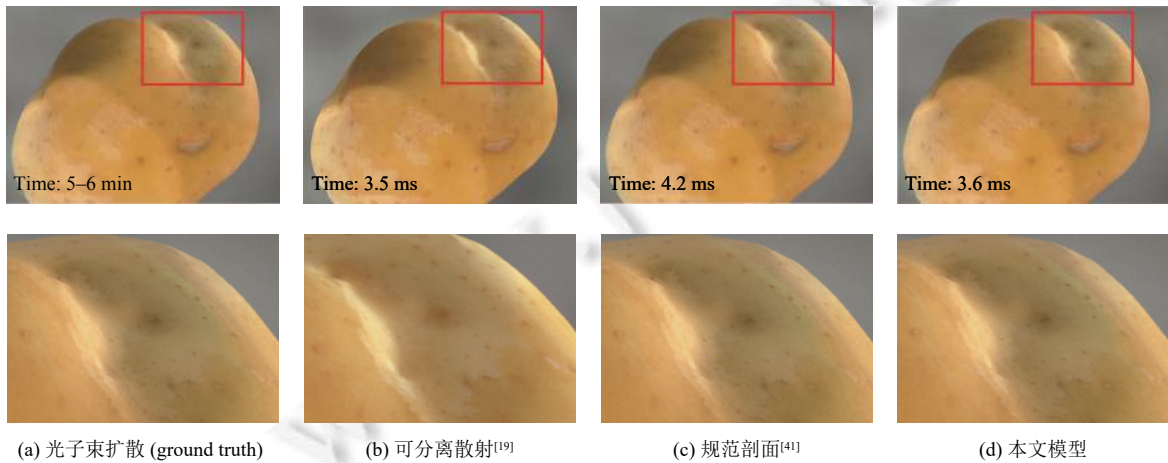
(a) 光子束扩散 (ground truth)

(b) 可分离散射^[19]

(c) 规范剖面^[41]

(d) 本文模型

图 12 不同模型对人脸部的渲染结果及数值误差



(a) 光子束扩散 (ground truth)

(b) 可分离散射^[19]

(c) 规范剖面^[41]

(d) 本文模型

图 13 不同模型对土豆模型 (1/l=0.6824) 的渲染结果对比

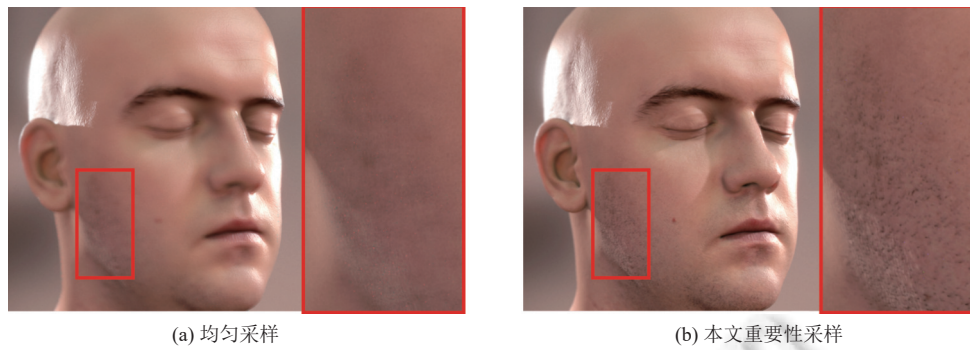


图 14 使用均匀采样与本文重要性采样的对比结果 (17 samples, 6.4 ms)

表 2 在不同面部模型所占屏幕比例下面部渲染的性能对比 (ms)

计算模型	占比25%	占比50%	占比75%
可分离散射	3.5	5.9	8.6
规范剖面	4.2	6.9	10.6
本文模型	3.9	6.6	9.8

7 总 结

本文针对散射范围不正确估计问题,提出了一种对反射剖面 R_d 的改进拟合模型,以对半透明材质上不同反射率的着色点进行精确的最大散射范围计算,避免了因对散射范围不明确引起的散射错误估计问题.改进的拟合式在提升准确性的同时,实现了对最大散射距离 r_{\max} 的快速计算.同时通过使用简单的输入参数对模型进行调整,用户可以轻松调控不同效果.除此以外,我们提出的采样方案保证了算法的效率和准确性.实验结果显示了我们的算法在不同半透明材质上均可实现良好的渲染结果.

尽管我们针对屏幕空间上的次表面散射计算相较现有方法具有明显的改进,但仍存在一些限制.考虑到计算的复杂性,本文对CDF反演的拟合程度并不严格精确,在 $\alpha \in [0.4, 0.6]$ 范围内拟合的误差相对较大,尽管在实验中我们并未发现由此导致的明显渲染质量下降,但拟合的不精确性理论上会在采样数极低时产生噪声,限制 α 在相应区间内时材质所需的最低采样数,造成额外的渲染时间增加.另一方面,对于屏幕空间上的蒙特卡洛采样,已有的方法仅能保证能量守恒,不能对复杂几何形状进行样本点间深度差异的精确考虑.在未来的工作中,如何解决这两个问题是提升屏幕空间次表面计算准确度的关键方向之一.

References:

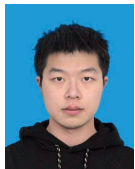
- [1] Jensen HW, Marschner SR, Levoy M, Hanrahan P. A practical model for subsurface light transport. In: Proc. of the 28th Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques. Los Angeles: Association for Computing Machinery, 2001. 511–518. [doi: 10.1145/383259.383319]
- [2] Hanrahan P, Krueger W. Reflection from layered surfaces due to subsurface scattering. In: Proc. of the 20th Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques. Anaheim: Association for Computing Machinery, 1993. 165–174. [doi: 10.1145/166117.166139]
- [3] Wang LH, Jacques SL, Zheng LQ. MCML—Monte Carlo modeling of light transport in multi-layered tissues. Computer Methods and Programs in Biomedicine, 1995, 47(2): 131–146. [doi: 10.1016/0169-2607(95)01640-F]
- [4] Lafortune EP, Willems YD. Rendering participating media with bidirectional path tracing. In: Proc. of the Eurographics Workshop on Rendering Techniques. Porto: Springer, 1996. 91–100. [doi: 10.1007/978-3-7091-7484-5_10]
- [5] Jensen HW, Christensen PH. Efficient simulation of light transport in scenes with participating media using photon maps. In: Proc. of the 25th Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques. Association for Computing Machinery, 1998. 311–320. [doi: 10.1145/280814.280925]
- [6] Krivánek J, d'Eon E. A zero-variance-based sampling scheme for Monte Carlo subsurface scattering. In: Proc. of the 2014 ACM SIGGRAPH Talks. Vancouver: Association for Computing Machinery, 2014. 66. [doi: 10.1145/2614106.2614138]

- [7] Herholz S, Zhao YY, Elek O, Nowrouzezahrai D, Lensch HPA, Krivánek J. Volume path guiding based on zero-variance random walk theory. *ACM Trans. on Graphics*, 2019, 38(3): 25. [doi: [10.1145/3230635](https://doi.org/10.1145/3230635)]
- [8] Keller A, Grittmann P, Vorba J, Georgiev I, Šik M, d'Eon E, Gautron P, Vévoda P, Kondapaneni I. Advances in Monte Carlo rendering: The legacy of Jaroslav Krivánek. In: *ACM SIGGRAPH 2020 Courses*. Association for Computing Machinery, 2020. 3. [doi: [10.1145/3388769.3407458](https://doi.org/10.1145/3388769.3407458)]
- [9] Deng H, Wang BB, Wang R, Holzschuch N. A practical path guiding method for participating media. *Computational Visual Media*, 2020, 6(1): 37–51. [doi: [10.1007/s41095-020-0160-1](https://doi.org/10.1007/s41095-020-0160-1)]
- [10] Donner C, Jensen HW. Light diffusion in multi-layered translucent materials. *ACM Trans. on Graphics*, 2005, 24(3): 1032–1039. [doi: [10.1145/1073204.1073308](https://doi.org/10.1145/1073204.1073308)]
- [11] Jakob W, Arbree A, Moon J T, Bala K, Marschner S. A radiative transfer framework for rendering materials with anisotropic structure. *ACM Trans. on Graphics*, 2010, 29(4): 53. [doi: [10.1145/1778765.1778790](https://doi.org/10.1145/1778765.1778790)]
- [12] d'Eon E, Irving G. A quantized-diffusion model for rendering translucent materials. *ACM Trans. on Graphics*, 2011, 30(4): 56. [doi: [10.1145/2010324.1964951](https://doi.org/10.1145/2010324.1964951)]
- [13] d'Eon E. A better dipole. 2021. <http://www.eugenedeon.com/wp-content/uploads/2014/04/betterdipole.pdf>
- [14] Habel R, Christensen PH, Jarosz W. Photon beam diffusion: A hybrid Monte Carlo method for subsurface scattering. *Computer Graphics Forum*, 2013, 32(4): 27–37. [doi: [10.1111/cgf.12148](https://doi.org/10.1111/cgf.12148)]
- [15] Frisvad JR, Hachisuka T, Kjeldsen TK. Directional dipole model for subsurface scattering. *ACM Trans. on Graphics*, 2014, 34(1): 5. [doi: [10.1145/2682629](https://doi.org/10.1145/2682629)]
- [16] d'Eon E. A dual-beam 3D searchlight BSSRDF. In: *ACM SIGGRAPH 2014 Talks*. Vancouver: Association for Computing Machinery, 2014. 65. [doi: [10.1145/2614106.2614140](https://doi.org/10.1145/2614106.2614140)]
- [17] Frederickx R, Dutré P. A forward scattering dipole model from a functional integral approximation. *ACM Trans. on Graphics*, 2017, 36(4): 109. [doi: [10.1145/3072959.3073681](https://doi.org/10.1145/3072959.3073681)]
- [18] d'Eon E, Luebke D, Enderton E. Efficient rendering of human skin. In: *Proc. of the 18th Eurographics Conf. on Rendering Techniques*. Goslar: The Eurographics Association, 2007. 147–157.
- [19] Jimenez J, Zsolnai K, Jarabo A, Freude C, Auzinger T, Wu XC, von der Pahlen J, Wimmer M, Gutierrez D. Separable subsurface scattering. *Computer Graphics Forum*, 2015, 34(6): 188–197. [doi: [10.1111/cgf.12529](https://doi.org/10.1111/cgf.12529)]
- [20] Christensen PH. An approximate reflectance profile for efficient subsurface scattering. In: *Proc. of the 2015 ACM SIGGRAPH Talks*. Los Angeles: Association for Computing Machinery, 2015. 25. [doi: [10.1145/2775280.2792555](https://doi.org/10.1145/2775280.2792555)]
- [21] Zhao QP, Li S, Hao AM, Gao YJ. Real-time subsurface scattering rendering method for dynamic objects. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2010, 21(11): 2959–2970 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3697.htm> [doi: [10.3724/SP.J.1001.2010.03697](https://doi.org/10.3724/SP.J.1001.2010.03697)]
- [22] Jimenez J, Sundstedt V, Gutierrez D. Screen-space perceptual rendering of human skin. *ACM Trans. on Applied Perception*, 2009, 6(4): 23. [doi: [10.1145/1609967.1609970](https://doi.org/10.1145/1609967.1609970)]
- [23] Xie TT, Olano M, Karis B, Narkowicz K. Real-time subsurface scattering with single pass variance-guided adaptive importance sampling. *Proc. of the ACM on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 2020, 3(1): 3. [doi: [10.1145/3384536](https://doi.org/10.1145/3384536)]
- [24] Li HS, Pellacini F, Torrance KE. A hybrid Monte Carlo method for accurate and efficient subsurface scattering. In: *Proc. of the Eurographics Symp. on Rendering Techniques*. Konstanz: Eurographics Association, 2005. 283–290.
- [25] Huang XZ, Sun X, Ren Z. Efficient inhomogeneous translucent material rendering based on probability adjustment of photon distribution. *Journal of Computer-aided Design & Computer Graphics*, 2016, 28(8): 1316–1325 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.3969/j.issn.1003-9775.2016.08.013](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-9775.2016.08.013)]
- [26] Jensen HW, Buhler J. A rapid hierarchical rendering technique for translucent materials. In: *Proc. of the 29th Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques*. Los Angeles: Association for Computing Machinery, 2002. 576–581. [doi: [10.1145/566570.566619](https://doi.org/10.1145/566570.566619)]
- [27] Milaenen D, Belcour L, Guertin JP, Hachisuka T, Nowrouzezahrai D. A frequency analysis and dual hierarchy for efficient rendering of subsurface scattering. In: *Proc. of the 45th Graphics Interface Conf. on Proc. of Graphics Interface 2019*. Waterloo: Canadian Human-computer Communications Society, 2019. 3. [doi: [10.20380/GI2019.03](https://doi.org/10.20380/GI2019.03)]
- [28] Maisch S, Ropinski T. Interactive subsurface scattering for materials with high scattering distances. *Computer Graphics Forum*, 2020, 39(6): 465–479. [doi: [10.1111/cgf.14086](https://doi.org/10.1111/cgf.14086)]
- [29] Yatagawa T, Yamaguchi Y, Morishima S. LinSSS: Linear decomposition of heterogeneous subsurface scattering for real-time screen-space rendering. *The Visual Computer*, 2020, 36(10): 1979–1992. [doi: [10.1007/s00371-020-01915-4](https://doi.org/10.1007/s00371-020-01915-4)]

- [30] Wang JP, Zhao S, Tong X, Lin S, Dong Y, Guo BN, Shum HY. Modeling and rendering of heterogeneous translucent materials using the diffusion equation. *ACM Trans. on Graphics*, 2008, 27(1): 9. [doi: 10.1145/1330511.1330520]
- [31] Wang YJ, Wang JP, Holzschuch N, Subr K, Yong JH, Guo BN. Real-time rendering of heterogeneous translucent objects with arbitrary shapes. *Computer Graphics Forum*, 2010, 29(2): 497–506. [doi: 10.1111/j.1467-8659.2009.01619.x]
- [32] Li DP, Sun X, Ren Z, Lin S, Tong YY, Guo BN, Zhou K. Transcut: Interactive rendering of translucent cutouts. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 2012, 19(3): 484–494. [doi: 10.1109/TVCG.2012.127]
- [33] Goesele M, Lensch HPA, Lang J, Fuchs C, Seidel HP. Disco: Acquisition of translucent objects. *ACM Trans. on Graphics*, 2004, 23(3): 835–844. [doi: 10.1145/1015706.1015807]
- [34] Peers P, Vom Berge K, Matusik W, Ramamoorthi R, Lawrence J, Rusinkiewicz S, Dutré P. A compact factored representation of heterogeneous subsurface scattering. In: *Proc. of the 2006 ACM SIGGRAPH Papers*. Boston: Association for Computing Machinery, 2006. 746–753. [doi: 10.1145/1179352.1141950]
- [35] Ghosh A, Hawkins T, Peers P, Frederiksen S, Debevec P. Practical modeling and acquisition of layered facial reflectance. *ACM Trans. on Graphics*, 2008, 27(5): 139. [doi: 10.1145/1409060.1409092]
- [36] Vicini D, Koltun V, Jakob W. A learned shape-adaptive subsurface scattering model. *ACM Trans. on Graphics*, 2019, 38(4): 127. [doi: 10.1145/3306346.3322974]
- [37] Nicodemus FE, Richmond JC, Hsia JJ. Geometric considerations and nomenclature for reflectance. NBS monograph, 1977. 160.
- [38] Fernando R. Percentage-closer soft shadows. In: *Proc. of the 2005 ACM SIGGRAPH Sketches*. Los Angeles: Association for Computing Machinery, 2005. 35-es. [doi: 10.1145/1187112.1187153]
- [39] Karis B, Games E. Real shading in unreal engine 4. 2021. <https://cdn2.unrealengine.com/Resources/files/2013SiggraphPresentationsNotes-26915738.pdf>
- [40] Jimenez J, Whelan D, Sundstedt V, Gutierrez D. Real-time realistic skin translucency. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 2010, 30(4): 32–41. [doi: 10.1109/MCG.2010.39]
- [41] Golubev E. Efficient screen-space subsurface scattering using Burley’s normalized diffusion in real-time. 2021. <http://advances.realtimerendering.com/s2018/Efficient%20screen%20space%20subsurface%20scattering%20Siggraph%202018.pdf>

附中文参考文献:

- [21] 赵沁平, 李帅, 郝爱民, 高玉建. 一种动态物体次表面散射实时绘制方法. *软件学报*, 2010, 21(11): 2959–2970. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3697.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.03697]
- [25] 黄学真, 孙鑫, 任重. 基于光子分布概率调整的高效的非均匀半透明材质绘制. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2016, 28(8): 1316–1325. [doi: 10.3969/j.issn.1003-9775.2016.08.013]



梁仕宇(2000—), 男, 硕士生, 主要研究领域为计算机图形学, 真实感渲染.



丛宇(1978—), 男, 硕士, 主要研究领域为虚拟现实, 可视化计算, 行业仿真.



高阳(1989—), 男, 博士, 助理研究员, CCF 专业会员, 主要研究领域为计算机图形学, 物理仿真, 虚拟现实应用技术.



郝爱民(1965—), 男, 博士, 教授, CCF 高级会员, 主要研究领域为计算机图形学, 医疗仿真, 虚拟现实应用技术.