软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2014,25(8):1794−1805 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004460]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

描述逻辑$\mathcal{ELU}$概念及术语公理集的表达能力刻画*

申宇铭[1], 王 驹[2,3], 唐素勤[2]

[1](广东外语外贸大学 思科信息学院,广东 广州 510420)
[2](广西师范大学 计算机科学与信息工程学院,广西 桂林 541004)
[3](高可信软件技术教育部重点实验室(北京大学),北京 100871)
通讯作者: 申宇铭, E-mail: ymshen2002@163.com

摘 要: 表达能力和推理复杂性是一个逻辑的两个重要特征,也是一对相互制约的关系.解释之间的互模拟关系是从语义的角度刻画逻辑表达能力的一个有效途径,其代表性的结果是命题模态逻辑表达能力的刻画定理——van Benthem 刻画定理.给出了描述逻辑$\mathcal{ELU}$(含构造子:原子概念、顶概念、概念交、概念并、完全存在约束)的模拟关系,建立了$\mathcal{ELU}$中概念和术语公理集的表达能力刻画定理,即一阶逻辑公式与$\mathcal{ELU}$中概念和术语公理集等价的充分必要条件.上述结果为寻求表达能力与推理复杂性之间的最佳平衡提供了有效的支持.
关键词: 描述逻辑;概念描述;术语公理集;表达能力
中图法分类号: TP181

中文引用格式: 申宇铭,王驹,唐素勤.描述逻辑$\mathcal{ELU}$概念及术语公理集的表达能力刻画.软件学报,2014,25(8):1794−1805. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4460.htm
英文引用格式: Shen YM, Wang J, Tang SQ. Characterizing the expressive power for concept descriptions and terminological axioms boxes in the description logic $\mathcal{ELU}$. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2014,25(8):1794−1805 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4460.htm

Characterizing the Expressive Power for Concept Descriptions and Terminological Axioms Boxes in the Description Logic $\mathcal{ELU}$

SHEN Yu-Ming[1], WANG Ju[2,3], TANG Su-Qin[2]

[1](Cisco School of Informatics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou 510420, China)
[2](School of Computer Science and Information Engineering, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China)
[3](Key Laboratory of High Confidence Software Technologies of Ministry of Education (Peking University), Beijing 100871, China)
Corresponding author: SHEN Yu-Ming, E-mail: ymshen2002@163.com

Abstract: The two most important properties of a logic are its expressive power and the complexity of reasoning, which are also an opposing relation in the logic. Bisimulations between interpretations are effective way to characterize the expressive power, and the van Benthem characterization theorem is a classical result which gives an exact condition for when a first-order formula with one free variable is equivalent to a modal logic formula. This paper provides a simulation for $\mathcal{ELU}$ (including atomic concept, top concept, conjunction concept, disjunction concept, and existential quantification). Based on the simulation, the characterization theorems of expressive power for concept descriptions and TBoxes are established to give the sufficient and necessary conditions for when a first-order formula is equivalent to a concept description or a TBox are set up. The above results provide effective supports for the tradeoff between the expressive power and the complexity of reasoning problems.

* 基金项目: 国家自然科学基金(60573010, 61103169); 高可信软件技术教育部重点实验室开放课题(HCST201302); 广西自然科学基金(2011GXNSFA018159)

收稿时间: 2012-12-13; 修改时间: 2013-03-07; 定稿时间: 2013-06-21

Key words: description logic; concept description; terminological axioms box; expressive power

描述逻辑(description logic)是一簇知识表示的语言,其以结构化、形式化的方法来表示特定应用领域的知识.作为一类用于知识表示的形式化工具,描述逻辑在信息系统、软件工程以及自然语言处理等领域得到了广泛的应用[1].特别是在第三代 Web——语义网(semantic Web)中,描述逻辑更是扮演着关键角色,并成为 W3C 推荐 Web 本体语言 OWL 的逻辑基础[2].

表达能力(expressive power)和推理复杂性(complexity of reasoning)是一个逻辑的两个重要特征,也是一对相互制约的关系.一般而言,表达能力越强,其推理的复杂性越高;反之,表达能力越弱,其推理的复杂性也就越低.目前,对描述逻辑的推理复杂性的研究已经取得了较为丰硕的成果,比如文献[3–8],而对其表达能力的研究则相对较少.描述逻辑$\mathcal{EL}$及其扩展(以下简称$\mathcal{EL}$族)是一类重要的知识表示语言.例如,盖伦医疗知识库(Galen medical knowledge base,简称 GALEN)[9]和美国国家癌症研究所(national cancer institute,简称 NCI)[10]的癌症知识库,都是以$\mathcal{EL}$族作为它们的表示语言基础.因此,开展对描述逻辑$\mathcal{EL}$族表达能力的研究,不仅能够为寻求表达能力与推理复杂性之间的平衡关系,而且也能为医学知识库构建中逻辑语言的选择提供有益的支持和帮助.

一个逻辑的表达能力可以从以下的 3 个角度来分析[11]:

(1) 给定一个逻辑,什么样的符号串是该逻辑的公式(well-formed formula);

(2) 一个逻辑公式的语义解释;

(3) 构建一个逻辑到另一个逻辑的翻译,然后比较它们的相对表达能力.

本文侧重从上面第 3 个角度来分析一个逻辑的表达能力.解释之间的互模拟(bisimulation)关系是从语义的角度刻画逻辑表达能力的一个有效途径,其代表性的结果是命题模态逻辑(modal logic)表达能力的刻画定理——van Benthem 刻画定理[12,13]:假定一阶逻辑的语言仅包含 1 个二元关系符号和一元谓词符号,那么一阶公式$\alpha(x)$等价于某个命题模态逻辑公式在标准关系翻译(standard relational translation)下的公式,当且仅当该公式的可满足性在互模拟关系下被保持.上述结果精确地刻画了一阶逻辑公式与命题模态逻辑公式等价的充分必要条件.

描述逻辑是一类逻辑,其基本语法对象是概念名(concept name)、角色名(role name)以及个体名(individual name).通过构造子集合,由概念名和角色名来构建复杂的概念;然后,在概念的基础上形成术语公理集(terminological axiom box,简称 TBox).由此,描述逻辑的表达能力刻画可以分为 2 层:概念的表达能力和术语公理集的表达能力.由于许多描述逻辑都能翻译到一阶逻辑不同的子部分(fragment),所以刻画描述逻辑系统表达能力的一个途径是:首先,构建描述逻辑到一阶逻辑翻译;然后,给出描述逻辑解释之间的模拟关系,建立类似 van Benthem 刻画定理的结论,即,给出一阶逻辑公式与概念和术语公理集等价的充分必要条件.

文献[14]中关于$\mathcal{EL}$(包含构造子:原子概念、顶概念、概念交、完全存在约束)概念和术语公理集表达能力的刻画,是我们工作的起点.在$\mathcal{EL}$中增加概念并构造子,得到的描述逻辑称为$\mathcal{ELU}$.文中给出了$\mathcal{ELU}$的模拟关系,建立了其概念和术语公理集的表达能力的刻画定理.本文有以下 3 点贡献:

- 给出了描述逻辑$\mathcal{ELU}$的模拟关系,将$\mathcal{EL}$概念的表达能力刻画定理扩充到$\mathcal{ELU}$的情形(定理 5);
- 建立了$\mathcal{ELU}$的布尔型术语公理集(允许否定、蕴含等布尔联结词作用于术语公理所形成的 TBox)的表达能力刻画定理(定理 7);
- 将$\mathcal{EL}$术语公理集的表达能力刻画定理扩充到$\mathcal{ELU}$的情形(定理 8).

本文第 1 节是预备知识,主要包括以下内容:描述逻辑$\mathcal{ELU}$的语法和语义介绍;描述逻辑$\mathcal{ELU}$概念及术语公理集到一阶逻辑的翻译;解释之间的互模拟关系及其性质,表达能力与互模拟之间的联系.第 2 节给出$\mathcal{ELU}$的模拟关系,建立$\mathcal{ELU}$概念的表达能力刻画定理.即给出一阶逻辑公式与$\mathcal{ELU}$的概念等价的充分必要条件.第 3 节将$\mathcal{ELU}$的模拟关系提升为全局模拟关系,建立$\mathcal{ELU}$的布尔型术语公理集及术语公理集的表达能力刻画定理.即给出一阶逻辑公式与术语公理集等价的充分必要条件.第 5 节是相关工作.第 6 节是总结及工作展望.

1 预备知识

本节是文中的预备知识.第 1.1 节主要介绍描述逻辑 $\mathcal{ELU}$ 的语法和语义.第 1.2 节给出描述逻辑 $\mathcal{ELU}$ 到一阶逻辑的翻译.第 1.3 节给出描述逻辑解释之间的互模拟关系及表达能力与互模拟两者之间的联系.

1.1 描述逻辑$\mathcal{ELU}$

描述逻辑 $\mathcal{ELU}$ 的基本符号包括:

(1) 由概念名组成的可数集 N_C;

(2) 由角色名组成的可数集合 N_R;

(3) 由个体名组成的可数集合 N_I.

从这些基本符号出发,可以构造出 $\mathcal{ELU}$ 的概念.

定义 1. $\mathcal{ELU}$ 中的概念由如下产生式生成:

$$C,D::=\top|A|C\sqcap D|C\sqcup D|\exists r.C,$$

其中,$A\in N_C,r\in N_R,C,D$ 表示 $\mathcal{ELU}$ 的两个概念.

$\mathcal{ELU}$ 的一个 TBox $\mathcal{T}$ 是有穷条形如 $C\sqsubseteq D$ 的概念包含式的集合,其中,C,D 分别是 $\mathcal{ELU}$ 的任意两个概念.$C\equiv D$ 可以表示为相应的两个概念包含式 $C\sqsubseteq D,D\sqsubseteq C$.

下面给出 $\mathcal{ELU}$ 的语义定义.

定义 2. 描述逻辑的一个解释 I 是一个二元组$(\Delta^I,\cdot^I)$,其中,非空集合Δ^I表示论域,$\cdot^I$是一个解释函数,使得对任意的概念名 $A,A^I\subseteq\Delta^I$;对任意的角色名 $r,r^I\subseteq\Delta^I\times\Delta^I$;并且对任意个体名 $a,a^I\in\Delta^I$.

依据概念名和角色名的解释,我们可以递归地给出一个 $\mathcal{ELU}$ 的概念 C 的解释.

定义 3. 任意给定一个 $\mathcal{ELU}$ 的概念 C,概念 C 的解释递归定义如下:

- $\top^I=\Delta^I$;
- $(C\sqcap D)^I=C^I\cap D^I$;
- $(C\sqcup D)^I=C^I\cup D^I$;
- $(\exists r.C)^I=\{x\in\Delta^I|$存在 $y\in\Delta^I$ 满足$(x,y)\in r^I$ 并且 $y\in C^I\}$.

一个解释 I 满足一个概念包含式 $C\sqsubseteq D$,如果 $C^I\subseteq D^I$,记作 $I\vDash C\sqsubseteq D$.一个解释 I 是一个 TBox $\mathcal{T}$ 的模型,如果对任意的 $C\sqsubseteq D\in\mathcal{T}$,都有 $I\vDash C\sqsubseteq D$,记作 $I\vDash\mathcal{T}$.

1.2 $\mathcal{ELU}$到一阶逻辑的翻译

正如本文开始部分所提到的,一个逻辑的表达能力可以有多种不同的角度刻画,文中考虑的是描述逻辑的相对表达能力.即构建描述逻辑到一阶逻辑的翻译,利用解释之间的互模拟关系,建立一阶逻辑公式与概念和术语公理集等价的充分必要条件,从而给出描述逻辑表达能力的刻画.

描述逻辑 $\mathcal{ELU}$ 到一阶逻辑的翻译是将原子概念名对应到一阶逻辑的一元谓词符号,原子角色名对应到二元谓词符号,将每一个概念翻译为一阶逻辑的开公式.描述逻辑 $\mathcal{ELU}$ 到一阶逻辑的翻译σ形式定义如下:

- $\top^{\sigma_x}=(x=x),\top^{\sigma_y}=(y=y)$;
- $\bot^{\sigma_x}=(x\neq x),\bot^{\sigma_y}=(y\neq y)$;
- $A^{\sigma_x}=A(x),A^{\sigma_y}=A(y)$;
- $(C\sqcap D)^{\sigma_x}=C^{\sigma_x}\wedge D^{\sigma_x},(C\sqcap D)^{\sigma_y}=C^{\sigma_y}\wedge D^{\sigma_y}$;
- $(C\sqcup D)^{\sigma_x}=C^{\sigma_x}\vee D^{\sigma_x},(C\sqcup D)^{\sigma_y}=C^{\sigma_y}\vee D^{\sigma_y}$;
- $(\exists r.C)^{\sigma_x}=\exists y(r(x,y)\wedge C^{\sigma_y}),(\exists r.C)^{\sigma_y}=\exists x(r(y,x)\wedge C^{\sigma_x})$.

由 $\mathcal{ELU}$ 概念的翻译,可以得到 $\mathcal{ELU}$ 的 TBox $\mathcal{T}$ 的翻译,即

$$\mathcal{T}^{\sigma}=\bigwedge_{C\sqsubseteq D\in\mathcal{T}}\forall x(C^{\sigma_x}\rightarrow D^{\sigma_x}).$$

在语义翻译方面,描述逻辑的解释可以直接对应为一阶逻辑的解释.因此,在文中我们将不对描述逻辑的解释和一阶逻辑的解释做特别的区分.由上述翻译可以看出:描述逻辑的一个概念翻译为一阶逻辑的一个开公式,而术语公理集翻译为一阶逻辑的一个闭公式.

一阶逻辑的开公式$\alpha(x)$在一个解释 I 下可满足,记作 $I\vDash\alpha(x)[x/d]$.这里,符号$[x/d]$表示将论域中的元素 d 指派给自由变元 x.上述翻译σ是保持公式和 TBox $\mathcal{T}$ 的可满足性.

命题 1. 对 $\mathcal{ELU}$ 任意的概念 C 和解释 I,$d\in C^I$,当且仅当 $I\vDash C^{\sigma_x}[x/d]$.

命题 2. 对 $\mathcal{ELU}$ 任意的 TBox $\mathcal{T}$ 和解释 I,$I\vDash\mathcal{T}$,当且仅当 $I\vDash\bigwedge_{C\sqsubseteq D\in\mathcal{T}}\forall x(C^{\sigma_x}\rightarrow D^{\sigma_x})$.

注意:并不是所有的描述逻辑都能翻译到一阶逻辑的子部分.例如,带传递闭包构造子的描述逻辑,就需要在一阶逻辑的语言中增加无穷并(infinitary disjunction)加以表达.

1.3 互模拟关系

互模拟是论域上的一类具有特殊性质的二元关系,其在刻画系统之间的并发和通信方面起着重要的作用.下面分别给出描述逻辑解释之间互模拟的定义[15]以及其相应的性质.

定义 4[15]. 任意给定两个描述逻辑的解释 $I_1=(\Delta^{I_1},\cdot^{I_1})$ 和 $I_2=(\Delta^{I_2},\cdot^{I_2})$,一个 $\Delta^{I_1}\times\Delta^{I_2}$ 上的二元关系 Z 称为 I_1 到 I_2 的一个互模拟(记作 $Z{:}I_1\rightleftharpoons I_2$),如果下面 3 个条件成立:

- 对任意的 $d_1\in\Delta^{I_1}$,$d_2\in\Delta^{I_2}$,如果 d_1Zd_2,那么对任意的概念名 A,都有 $d_1\in A^{I_1}$,当且仅当 $d_2\in A^{I_2}$;
- 对任意的角色名 r,如果 d_1Zd_2,$(d_1,e_1)\in r^{I_1}$,那么存在 $e_2\in\Delta^{I_2}$,使得$(d_2,e_2)\in r^{I_2}$ 并且 e_1Ze_2;
- 对任意的角色名 r,如果 d_1Zd_2,$(d_2,e_2)\in r^{I_2}$,那么存在 $e_1\in\Delta^{I_1}$,使得$(d_1,e_1)\in r^{I_1}$ 并且 e_1Ze_2.

命题 3. 令 I_1 和 I_2 分别是描述逻辑的两个解释,那么:

(1) 令 $Z=\{(x,x)|x\in\Delta^{I_1}\}$,那么 Z 是 I_1 到 I_1 的互模拟;

(2) 令 Z_1,Z_2 分别是 I_1 到 I_2 以及 I_2 到 I_3 的互模拟,那么 $Z_1\circ Z_2=\{(d,d'')|$存在 d',使得 $dZ_1d',d'Z_2d''\}$是一个互模拟关系;

(3) 如果 Z 是 I_1 到 I_2 互模拟关系,那么 Z 的逆关系 Z^{-1} 是 I_2 到 I_1 的互模拟关系;

(4) 如果 Z 是 I_1 到 I_2 互模拟关系的集合,那么 $\bigcup Z$ 也是 I_1 到 I_2 的互模拟关系.

证明:由互模拟的定义直接验证. □

互模拟关系是分析逻辑表达能力的一个强有力的工具,下面给出表达能力与互模拟关系两者之间的联系.

定义 5[15]. 令$\alpha(x)$是一阶逻辑的一个开公式.称$\alpha(x)$在互模拟关系下是被保持的,如果对任意的解释 I_1 和 I_2,任意的 $d_1\in\Delta^{I_1}$,$d_2\in\Delta^{I_2}$ 以及 I_1 到 I_2 所有的互模拟关系 Z,若 d_1Zd_2,则有:如果 $I_1\vDash\alpha(x)[x/d_1]$,那么 $I_2\vDash\alpha(x)[x/d_2]$.

在描述逻辑 $\mathcal{ALC}$ 中,概念的表达能力有如下类似 van Benthem 刻画定理的结论:

定理 4[15]. 令$\alpha(x)$是一阶逻辑的一个开公式,$\alpha(x)$等价于描述逻辑 $\mathcal{ALC}$ 的某个概念 C,当且仅当该公式在互模拟关系下是被保持的.

定理 4 精确地刻画了一阶逻辑的开公式与 $\mathcal{ALC}$ 中的概念 C 等价的充分必要条件.但是,定理 4 的结果并不在所有的描述逻辑中成立,例如,在 $\mathcal{ALC}$ 中增加绝对数量限制构造子,那么定理 4 的结果在 $\mathcal{ALCN}$ 中不成立.

令 $C=\geqslant 2.r$, $I_1=(\Delta^{I_1},\cdot^{I_1})$,$I_2=(\Delta^{I_2},\cdot^{I_2})$, 其中,

- $\Delta^{I_1}=\{a,b,c\},r^{I_1}=\{(a,b),(a,c)\},s^{I_1}=\{(a,b)\}$;
- $\Delta^{I_2}=\{a',b',c'\},r^{I_2}=\{(a',c')\},s^{I_2}=\{(a',b')\}$.

令 $Z=\{(a,a'),(b,b'),(b,c'),(c,c')\}$,可以验证,$Z$ 是一个互模拟关系.但是,$a\in C^{I_1},a'\notin C^{I_2}$.

2 $\mathcal{ELU}$ 中概念的表达能力刻画

作为 $\mathcal{ELU}$ 中 TBox 的表达能力刻画基础,先讨论 $\mathcal{ELU}$ 中概念的表达能力.首先给出 $\mathcal{ELU}$ 的模拟关系,然后给出 $\mathcal{ELU}$ 的表达能力刻画定理及相应的推论.

定义 6. 令 $I_1=(\Delta^{I_1},\cdot^{I_1}),I_2=(\Delta^{I_2},\cdot^{I_2})$ 分别是描述逻辑的两个解释.一个 $\mathcal{ELU}$ 的模拟 Z 是 $\Delta^{I_1}\times\Delta^{I_2}$ 上的一个非空二元关系,并且满足如下条件:

(1) 如果 d_1Zd_2,那么对任意的原子概念名 A,如果 $d_1\in A^{I_1}$,$d_2\in A^{I_2}$;

(2) 对任意的角色名 r,如果$(d_1,e_1)\in r^{I_1}$,d_1Zd_2,那么存在 $e_2\in\Delta^{I_2}$,使得$(d_2,e_2)\in r^{I_2}$,并且 e_1Ze_2.

对比 $\mathcal{ALC}$ 的互模拟关系,$\mathcal{ELU}$ 的模拟关系有如下两个特点:

- 由于 $\mathcal{ELU}$ 缺少概念否定构造子,所以 $\mathcal{ELU}$ 模拟关系中的条件(1)只取 1 个方向的结果成立;
- $\mathcal{ELU}$ 模拟关系的条件(2)对应完全存在约束构造子.

当 Z 是连接 d_1 和 d_2 的 $\mathcal{ELU}$ 模拟时,记作 $Z:(I_1,d_1)\rightharpoonup\mathcal{ELU}(I_2,d_2)$.这里需要指出的是,Lutz 等人在文献[14]中定义的 $\mathcal{EL}$ 模拟关系,其实质上是 $\mathcal{ELU}$ 模拟关系.由此,在刻画 $\mathcal{ELU}$ 的概念和术语公理集表达能力时,就不需要对一阶逻辑的公式增加额外的约束.

一阶逻辑的一个公式$\alpha(x)$在 $\mathcal{ELU}$ 模拟下是被保持的,当且仅当对任意的解释 I_1 和 I_2,任意的 $d_1\in\Delta^{I_1}$,$d_2\in\Delta^{I_2}$以及 I_1 到 I_2 所有的 $\mathcal{ELU}$ 模拟 Z,都有:如果 d_1Zd_2 并且 $I_1\models\alpha(x)[x/d_1]$,那么 $I_2\models\alpha(x)[x/d_2]$.

依据上述 $\mathcal{ELU}$ 模拟关系的定义,有如下 $\mathcal{ELU}$ 中概念表达能力的刻画定理:

定理 5. 令$\alpha(x)$是一阶逻辑的一个开公式.$\alpha(x)$等价于描述逻辑 $\mathcal{ELU}$ 的某个概念 C,当且仅当该公式在 $\mathcal{ELU}$ 模拟下是被保持的.

证明思路:如果$\alpha(x)$等价于描述逻辑 $\mathcal{ELU}$ 的某个概念 C,则可对概念 C 的结构做归纳,证明$\alpha(x)$在 $\mathcal{ELU}$ 的模拟下是被保持的.假设$\alpha(x)$在 $\mathcal{ELU}$ 模拟下是被保持的,令 $con(\alpha(x))$是满足如下条件的集合:对任意的$\beta\in con(\alpha(x))$,都有$\alpha(x)\models\beta$,并且存在 $\mathcal{ELU}$ 的概念 C,使得 $C^{\sigma_x}=\beta$.如果能证明 $con(\alpha(x))\models\alpha(x)$,那么由一阶逻辑的紧致性定理,就有定理 5 的结论成立.假设 $con(\alpha(x))\not\models\alpha(x)$,那么存在一个解释 I,使得 $I\models con(\alpha(x))[x/w]$,但是 $I\not\models\alpha(x)[x/w]$.

令$\Gamma=\{\neg C^{\sigma_x}\mid C$ 是 $\mathcal{ELU}$ 的概念并且 $w\notin C^I\}$.如果证明$\{\alpha(x)\}\cup\Gamma$是可满足的,那么存在一个解释 J,使得 $J\models\alpha(x)[x/v]$,$J\models\Gamma[x/v]$.我们的目标是构造一个解释 J 到解释 I 的一个 $\mathcal{ELU}$ 模拟关系 Z,使得 $Z:(J,v)\rightharpoonup\mathcal{ELU}(I,w)$.因为$\alpha(x)$在 $\mathcal{ELU}$ 模拟下是被保持的,所以 $I\models\alpha(x)[x/w]$,这与 $I\not\models\alpha(x)[x/w]$矛盾.在构建 $\mathcal{ELU}$ 的模拟关系时,我们还需要解释 I 扩充为ω饱和模型才能达到上述目的.令 I^*是 I 的ω饱和模型.定义 Z 是 $\Delta^J\times\Delta^{I^*}$ 上的一个二元关系,满足如下条件:d_1Zd_2,当且仅当对 $\mathcal{ELU}$ 的任意概念 D,如果 $d_1\in D^J$,则 $d_2\in D^{I^*}$.上述 Z 是一个 $\mathcal{ELU}$ 模拟.又因为 I^*是 I 的ω饱和模型,所以对任意的 $\mathcal{ELU}$ 的概念 D,$w\in D^I$,当且仅当 $w\in D^{I^*}$.由此,可以完成定理的证明.具体的证明细节参见附录 1. □

定理 5 的结论是文献[14]定理 5 的推广.即,将描述逻辑 $\mathcal{EL}$ 中的概念表达能力的刻画结果推广到了 $\mathcal{ELU}$ 的情形.假定 $\mathcal{S}$ 是比 $\mathcal{ELU}$ 包含更多构造子的描述逻辑系统,由定理 5 的结论,有如下的推论:

推论 6. 令 $\mathcal{S}$ 是比 $\mathcal{ELU}$ 包含更多构造子的描述逻辑系统.对于 $\mathcal{S}$ 的任意概念 C,下面两个条件是等价的:

(1) 存在 $\mathcal{ELU}$ 的概念与等价 C;

(2) C 对应的一阶公式在 $\mathcal{ELU}$ 模拟下被保持.

由推论 6 可知:$\mathcal{S}$ 中的一个概念 C 能否用 $\mathcal{ELU}$ 的一个等价概念重写(concept rewriting),当且仅当概念 C 所对应的一阶公式在 $\mathcal{ELU}$ 模拟下被保持.更进一步地,如果 C 不能被 $\mathcal{ELU}$ 的一个等价概念重写,那么能否找到 $\mathcal{ELU}$ 的一个概念 D,使得 $C\sqsubseteq D$,并且 D 的长度是最短的.这个问题就是概念 C 的最佳逼近问题(best approximation problem),具体内容详见文献[16,17].

3 $\mathcal{ELU}$ 中 TBox 的表达能力刻画

下面第 3.1 节给出 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟关系及布尔型 TBox 的表达能力刻画定理;第 3.2 节介绍描述逻辑一簇解释不相交并的定义,并给出 $\mathcal{ELU}$ 中 TBox 的表达能力刻画定理.

3.1 布尔型TBox的表达能力刻画

$\mathcal{ELU}$ 中 TBox 的表达能力刻画,是建立在其概念表达能力刻画的基础上的.由描述逻辑 $\mathcal{ELU}$ 到一阶逻辑的翻译可以看出:$\mathcal{ELU}$ 的概念翻译为一阶逻辑的包含一个自由变元的开公式,而 TBox $\mathcal{T}$ 翻译为一阶逻辑的闭公式.由此,一个自然的想法是将 $\mathcal{ELU}$ 模拟关系从"局部"提升为"全局"模拟关系.

定义 7. 任意给定描述逻辑的两个解释 I_1 和 I_2,一个 I_1 至 I_2 的 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟关系(记作 $I_1\simeq\mathcal{ELU}I_2$),如果下面两个条件成立:

(1) 对任意的 $d_1\in \Delta^{I_1}$, 都存在 $d_2\in \Delta^{I_2}$, 使得 $Z_1:(I_1,d_1)\rightarrow\mathcal{ELU}(I_2,d_2)$并且 $Z_2:(I_2,d_2)\rightarrow\mathcal{ELU}(I_1,d_1)$;

(2) 对任意的 $d_2\in \Delta^{I_2}$, 都存在 $d_1\in \Delta^{I_1}$, 使得 $Z_2:(I_2,d_2)\rightarrow\mathcal{ELU}(I_1,d_1)$并且 $Z_1:(I_1,d_1)\rightarrow\mathcal{ELU}(I_2,d_2)$.

一阶逻辑的一个闭公式α在全局 $\mathcal{ELU}$ 模拟关系下是不变的,当且仅当对任意的两个解释 I_1 和 I_2 以及 I_1 至 I_2 所有的 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟关系,如果 $I_1\simeq\mathcal{ELU}I_2$,那么 $I_1\vDash\alpha$,当且仅当 $I_2\vDash\alpha$.直觉上,我们应该证明:一阶逻辑的闭公式α等价于 $\mathcal{ELU}$ 的某个 TBox $\mathcal{T}$,当且仅当该公式在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟下不变的.但正如文献[14]所指出的,上述刻画所得到的将是 $\mathcal{ELU}$ 中的布尔型的 Tbox.这里,布尔型 TBox 是指术语公理集中允许出现形如:$\neg(C\sqsubseteq D),(C\sqsubseteq D)\rightarrow(E\sqsubseteq F),(C\sqsubseteq D)\vee(E\sqsubseteq F),(C\sqsubseteq D)\wedge(E\sqsubseteq F)$等表达式作为术语公理.

定理 7. 令α是一阶逻辑的一个闭公式.α等价于 $\mathcal{ELU}$ 中的某个布尔型 TBox $\mathcal{T}$,当且仅当该公式在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟下不变.

证明思路:假设α等价于 $\mathcal{ELU}$ 中的某个布尔型 TBox $\mathcal{T}$.对 TBox 的结构,即,分 $\mathcal{T}=\{C\sqsubseteq D\},\{\neg(C\sqsubseteq D)\}$或者$\{(C\sqsubseteq D)\rightarrow(E\sqsubseteq F)\}$这 3 种情况讨论,可以证明$\alpha$在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟下不变.假设α在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟下不变,并且令$con(\alpha)$是满足如下条件的集合:对任意的$\beta\in con(\alpha)$,都有$\alpha\vDash\beta$并且存在 $\mathcal{ELU}$ 的布尔型 TBox $\mathcal{T}$,使得 $\mathcal{T}^{\sigma}=\beta$.如果能够证明 $con(\alpha)\vDash\alpha$,那么由一阶逻辑的紧致性定理,可得与α等价的 TBox $\mathcal{T}$.假设 $con(\alpha)\nvDash\alpha$.我们的目标是构造 2 个ω饱和模型 I,J,使得 $I\vDash\neg\alpha,J\vDash\alpha$并且 $I\simeq\mathcal{ELU}\,J$.由α在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟下不变,即可导出 $I\vDash\alpha,I\vDash\neg\alpha$的矛盾.

令 I 是 $con(\alpha)\cup\{\neg\alpha\}$的模型:

$$\Gamma=\{\varphi|I\vDash\varphi,\varphi=(C\sqsubseteq D_1\sqcup\ldots\sqcup D_n)^{\sigma}\text{或者 }\varphi=\neg(C\sqsubseteq D_1\sqcup\ldots\sqcup D_n)^{\sigma},\text{这里的 }C,D_1,D_2,\ldots,D_n\text{ 为 }\mathcal{ELU}\text{ 概念}\}.$$

用反证法,可以证明$\{\alpha\}\cup\Gamma$是可满足的.令 J 是$\{\alpha\}\cup\Gamma$的模型.由模型论的知识,对任意一个一阶逻辑的解释(在可数语言下)I,总存在一个ω饱和模型 I^*,使得对任意的一阶逻辑的公式φ,$I\vDash\varphi$,当且仅当 $I^*\vDash\varphi$.因此,不失一般性,假定 I,J 均是ω饱和模型.证明 $I\simeq\mathcal{ELU}\,J$,还需要证明如下两点事实:

(1) 对任意的 $d\in\Delta^I$,存在 $e\in\Delta^J$,使得对 $\mathcal{ELU}$ 任意的概念 C,$d\in C^I$,当且仅当 $e\in C^J$;

(2) 对任意的 $e\in\Delta^J$,存在 $d\in\Delta^I$,使得对 $\mathcal{ELU}$ 任意的概念 C,$e\in C^J$,当且仅当 $d\in C^I$.

令 Z_1 是$\Delta^I\times\Delta^J$ 上的一个二元关系,满足如下条件:dZ_1e,当且仅当对 $\mathcal{ELU}$ 的任意概念 C,如果 $d\in C^I$,则 $e\in C^J$;令 Z_2 是$\Delta^J\times\Delta^I$ 上的一个二元关系,满足如下条件:dZ_2e,当且仅当对 $\mathcal{ELU}$ 的任意概念 C,如果 $e\in C^J$,则 $d\in C^I$.由 I,J 均是ω饱和模型及上述 2 点事实,可以证明 $I\simeq\mathcal{ELU}\,J$.于是就有定理 7 成立.具体的证明细节参见附录 2. □

3.2 TBox的表达能力刻画

为了能够刻画 TBox 而不是布尔型 TBox,文献[14]中运用解释的不相交并来解决上述问题.令$(I_i)_{i\in I}$是一簇描述逻辑的解释.$(I_i)_{i\in I}$的不相交并 J 定义如下:

- $\Delta^J=\bigcup_{i\in I}\Delta^{I_i}$, 其中, $\Delta^{I_i}\cap\Delta^{J_j}=\varnothing$, $i\neq j$;
- $A^J=\bigcup_{i\in I}A^{I_i}$, $A\in N_C$;

- $r^J=\bigcup_{i\in I} r^{I_i}, r\in N_R$.

一个一阶逻辑的闭公式α在不相交并下是不变的,当且仅当对所有不相交的解释$(I_i)_{i\in I}$,$I_i\vDash\alpha,i\in I$,当且仅当不相交的并 $J\vDash\alpha$.布尔型的 TBox 在不相交的并下不是不变的.以下是文献[14]中的例子:

例 1:令 $\mathcal{T}_1=\{(\top\sqsubseteq A)\vee(\top\sqsubseteq B)\}$, $A^{I_1}=\Delta^{I_1}, B^{I_1}=\varnothing, B^{I_2}=\Delta^{I_2}, A^{I_2}=\varnothing$,则 I_1 和 I_2 的不相交的并 I 为

$$\Delta^I=\Delta^{I_1}\cup\Delta^{I_2}, A^I=\Delta^{I_1}, B^I=\Delta^{I_2}.$$

显然,I_1 和 I_2 满足 $\mathcal{T}_1$,但是 $I\nvDash\mathcal{T}_1$.令 $\mathcal{T}_2=\{\neg(\top\sqsubseteq A)\}$,显然,$I\vDash\mathcal{T}_2$,但是 $I_1\nvDash\mathcal{T}_2$.

定理 8. 令α是一阶逻辑的一个闭公式.α等价于 $\mathcal{ELU}$ 中的某个 TBox $\mathcal{T}$,当且仅当该公式在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟和不相交的并下不变.

证明思路:假设α等价于 $\mathcal{ELU}$ 中的某个 TBox $\mathcal{T}$.不失一般性,假设 $\mathcal{T}=\{C\sqsubseteq D\}$,容易验证$\alpha$在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟和不相交的并下不变.假设α在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟和不相交的并下不变,并且令 $con(\alpha)=\{(C\sqsubseteq D)^\sigma|\alpha\vDash(C\sqsubseteq D)^\sigma\}$.如果能够证明 $con(\alpha)\vDash\alpha$,那么由一阶逻辑的紧致性定理就有:存在一个 TBox $\mathcal{T}$ 与α等价.假设 $con(\alpha)\nvDash\alpha$,则 $con(\alpha)\cup\{\neg\alpha\}$可满足.我们的目标是构造两个$\omega$饱和模型 I,J,使得 $I\vDash\neg\alpha,J\vDash\alpha$,并且 $I\simeq_{\mathcal{ELU}}J$.由α在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟下不变,即可导出 $I\vDash\alpha,I\vDash\neg\alpha$的矛盾.对每一个形如$(C\sqsubseteq D_1\sqcup\ldots\sqcup D_n)^\sigma\notin con(\alpha)$,记 $I_{C\sqsubseteq D1\sqcup\ldots\sqcup Dn}$ 是 $con(\alpha)$的一个模型,并且满足条件:$I_{C\sqsubseteq D1\sqcup\ldots\sqcup Dn}\nvDash(C\sqsubseteq D_1\sqcup\ldots\sqcup D_n)$.令 I 是所有 $I_{C\sqsubseteq D1\sqcup\ldots\sqcup Dn}$ 及 $con(\alpha)\cup\{\neg\alpha\}$的一个模型不相交的并,则 $I\nvDash(C\sqsubseteq D_1\sqcup\ldots\sqcup D_n),I\vDash\neg\alpha$.接下来,对每一个形如$(C\sqsubseteq D_1\sqcup\ldots\sqcup D_n)^\sigma\notin con(\alpha)$,记 $J_{C\sqsubseteq D1\sqcup\ldots\sqcup Dn}$ 是α的一个模型,并且满足条件:$J_{C\sqsubseteq D1\sqcup\ldots\sqcup Dn}\nvDash C\sqsubseteq D_1\sqcup\ldots\sqcup D_n$.令 J 是所有 $J_{C\sqsubseteq D1\sqcup\ldots\sqcup Dn}$ 不相交的并,则 $J\nvDash C\sqsubseteq D_1\sqcup\ldots\sqcup D_n,J\vDash\alpha$.类似于定理 7 的证明思路,证明 $I\simeq_{\mathcal{ELU}}J$,于是就有定理 8 成立.具体的证明细节参见附录 3. □

定理 8 的结论是文献[14]定理 17 的推广.即,将描述逻辑 $\mathcal{EL}$ 中的 TBox 表达能力的刻画结果推广到了 $\mathcal{ELU}$ 的情形.假定$\mathcal{S}$是比 $\mathcal{ELU}$ 包含更多构造子的描述逻辑系统,由定理 8 的结论,有如下推论:

推论 9. 令$\mathcal{S}$是比 $\mathcal{ELU}$ 包含更多构造子的描述逻辑系统.对$\mathcal{S}$的任意 TBox $\mathcal{T}$,下面两个条件是等价的:

(1) 存在 $\mathcal{ELU}$ 中的 TBox $\mathcal{T}'$与 $\mathcal{T}$ 等价;

(2) $\mathcal{T}$ 所对应的一阶公式在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟和不相交的并下不变.

推论 9 表明:$\mathcal{S}$中的 TBox $\mathcal{T}$ 能否用 $\mathcal{ELU}$ 中的一个等价 TBox $\mathcal{T}'$重写,当且仅当 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟关系和不相交的并下不变.在文献[18,19]中,一个 TBox 被看作是一个本体,那么在这个意义下,推论 9 刻画了在怎样的条件下,$\mathcal{S}$中的本体与 $\mathcal{ELU}$ 中的本体表达能力是相同的.

4 相关工作

Baader[20]较早地研究了描述逻辑表达能力、形式化地给出了描述逻辑术语公理集表达能力的定义,其工作主要侧重分析描述逻辑不同术语公理集之间表达能力的差异;而对描述逻辑的概念和术语公理集,则没有建立相应的表达能力刻画定理.

Borgida[21]分析不同描述逻辑与哪些一阶逻辑的子部分表达能力等价问题,其工作主要侧重于分析不同描述逻辑概念与一阶逻辑子部分的公式在语法层次上的相互等价转换问题;而对描述逻辑的概念和术语公理集,也没有给出相应的表达能力刻画定理.

Kurtonina 等人[15]以描述逻辑$\mathcal{FL}_-$为出发点,给出了$\mathcal{FL}$族的含不同构造子的描述逻辑的模拟关系,建立了$\mathcal{FL}$族的概念表达能力的刻画定理以及$\mathcal{FL}$族表达能力划分结果,但是没有给出$\mathcal{FL}$族术语公理集表达能力刻画定理.

Lutz 等人[14]给出了包含较多构造子的描述逻辑$\mathcal{ALCQIO}$和两个包含构造子较少的描述逻辑$\mathcal{EL}$,以及 DL-Lite 的概念和术语公理集的表达能力刻画定理.本文的工作是对 Lutz 等人工作的扩展.

5 总结及工作展望

表达能力和推理复杂性是一个逻辑的两个重要特征,也是一对相互制约的关系.本文给出了 $\mathcal{ELU}$ 的模拟关系,并建立了 $\mathcal{ELU}$ 中概念和术语公理集的表达能力刻画定理.上述结果为寻求表达能力与推理复杂性之间的最佳平衡提供了有效的支持.后续工作包括以下 3 点:

- 本文是将 $\mathcal{EL}$ 中概念和术语公理集的表达能力结果推广到增加并构造子的 $\mathcal{ELU}$ 的描述逻辑系统.下一步可以考虑增加原子概念否定构造子或角色构造子等其他构造子的情形下,描述逻辑系统概念和术语公理集的表达能力问题.
- 推论 6 和推论 9 仅仅是给出了用 $\mathcal{ELU}$ 中的概念和术语公理集重写其他描述逻辑系统的概念和术语公理集的初步结果,更进一步地,上述问题的可计算性以及其计算的复杂性值得做更深入的研究.
- 在表达能力刻画定理的证明中,主要使用了一阶逻辑的紧致性定理,但不是所有的描述逻辑都能翻译到一阶逻辑上.比如,包含带传递闭包构造子的描述逻辑就需要在一阶逻辑的语言中增加无穷并加以表达,而包含无穷并的一阶逻辑不具有紧性[22].因此,为刻画上述描述逻辑系统的表达能力,需要给出新的方法.

References:

[1] Baader F, Nutt W. Basic description logics. In: Baader F, Calvanese D, McGuinness D, Nardi D, Patel-Scheider PF, eds. The Description Logic Handbook: Theory, Implementation, and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[2] Horrocks I, Patel-Schneider PF, Harmelen FV. From SHIQ and RDF to OWL: The making of a Web ontology language. Journal of Web Semantics, 2003,1(1):7–26. [doi:10.1016/j.websem.2003.07.001]

[3] Baader F, Sattler U. An overview of tableau algorithms for description logics. Studia Logica, 2001,69(1):5–40. [doi:10.1023/A:1013882326814]

[4] Baader F, Brandt S, Lutz C. Terminological cycles in a description logic with existential restrictions. In: Gottlob G, Walsh T, eds. Proc. of the 18th Int’l Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI 2003). San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2003. 325–330.

[5] Wang J, Jiang YC, Shen YM. Satisfiability and reasoning mechanism of terminological cycles in description logic $\mathcal{VL}$. Science in China: Information Sciences, 2008,51(9):1204–1214. [doi: 10.1007/s11432-008-0101-6]

[6] Chang L, Shi ZZ, Chen LM, Niu WJ. Family of extended dynamic description logics. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2010,21(1):1–13 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/3494.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.03494]

[7] Jiang YC, Wang J, Shi ZZ, Tang Y. Fixpoint semantics and reasoning of terminological cycles in description logic $\mathcal{ELN}$. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2009,20(3):477–490 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/3215.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03215]

[8] Shi ZZ, Chang L. Reasoning about semantic Web services with an approach based on dynamic description logics. Chinese Journal of Computers, 2008,31(9):1599–1611 (in Chinese with English abstract).

[9] Rector A, Rogers J. Ontological issues in using a description logic to represent medical concepts: Experience from GALEN. In: Proc. of the IMIA Working Group 6 Workshop. 1999.

[10] Sioutos N, de Coronado S, Haber M, Hartel F, Shaiu W, Wright L. NCI thesaurus: A semantic model integrating cancer-related clinical and molecular information. Journal of Biomedical Informatics, 2006,40(1):30–43. [doi: 10.1016/j.jbi.2006.02.013]

[11] Ohlbach H, Nonnengart A, de Rijke M, Gabbay D. Encoding two-valued non-classical logics in classical logic. In: Robinson A, Voronkov A, eds. Handbook of Automated Reasoning. Amsterdam: Elsevier, 2001. 1403–1486.

[12] van Benthem J. Correspondence theory. In: Gabbay D, Guenthner F, eds. Handbook of Philosophical Logic, Vol.2: Extensions of Classical Logic. Dodrecht: D. Reidel Publishing Company, 1983. 167–247.

[13] Goranko V, Otto M. Model theory of modal logic. In: Blackburn P, van Benthem J, Wolter F, eds. Handbook of Modal Logic. Amsterdam: Elsevier, 2007. 246–329.

[14] Lutz C, Piro R, Wolter F. Description logic tboxes: Model-Theoretic characterizations and rewritability. In: Proc. of the 22nd Int'l Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI 2011). Barcelona: AAAI Press, 2011. 983−988. [doi: 10.5591/978-1-57735-516-8/IJCAI11-169]

[15] Kurtonina N, de Rijke M. Expressive of concept expression in first-order description logics. Artificial Intelligence, 1999,107(2): 303−333. [doi:10.1016/S0004-3702(98)00109-X]

[16] Baader F, Kusters R, Molitor R. Rewriting concepts using terminologies. In: Proc. of the 7th Int'l Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2000). Brechenrideg: Morgan Kaufmann Publishers, 2000. 297−308.

[17] Brandt S, Kusters R, Turhan AY. Approximation and difference in description logic. In: Proc. of the 7th Int'l Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2002). San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2002. 203−214.

[18] Lutz C, Wolter F. Deciding inseparability and conservative extensions in the description logic $\mathcal{EL}$. Journal of Symbolic Computation, 2010,45(2):194−228. [doi:10.1016/j.jsc.2008.10.007]

[19] Kontchakov R, Wotler F, Zakharyaschev M. Logic-Based ontology comparison and module extraction, with an application to DL-Lite. Artificial Intelligence, 2010,174(15):1093−1141. [doi:10.1016/j.artint.2010.06.003]

[20] Baader F. A formal definition for the expressive power of terminological knowledge representation languages. Journal of Logic and Computation, 1996,6(1):33−54. [doi:10.1093/logcom/6.1.33]

[21] Borgida A. On the relative expressiveness of description logics and predicate logics. Artificial Intelligence, 1996,82(1-2):353−367. [doi: 10.1016/0004-3702(96)00004-5]

[22] Ebbinghaus HD, Flum J, Thomas W. Mathematical Logic. 2nd ed., Berlin: Springer-Verlag, 1994.

[23] Chang C, Keisler H. Model Theory. 2nd ed., Amsterdam: Elsevier, 1990.

附中文参考文献:

[6] 常亮,史忠植,陈立民,牛温佳.一类扩展的动态描述逻辑.软件学报,2010,21(1):1−13. http://www.jos.org.cn/1000-9825/3494.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.03494]

[7] 蒋运承,王驹,史忠植,汤庸.描述逻辑$\mathcal{ELN}$循环术语集的不动点语义及推理.软件学报,2009,20(3):477−490. http://www.jos.org.cn/1000-9825/3215.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03215]

[8] 史忠植,常亮.基于动态描述逻辑的语义 Web 服务推理.计算机学报,2008,31(9):1599−1611.

附录:表达能力刻画定理的证明

在给出完整证明之前,首先介绍在证明中需要用到的两个重要结论:

(1) 令 I 是一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$ 的解释,我们称 I 是一个ω饱和模型,如果Σ是语言 $\mathcal{L}'$下的公式的集合,其中,$\mathcal{L}'$是 $\mathcal{L}$ 通过增加有穷多个新的个体符号所得的,并且每个Σ的有穷子集在 I 的 $\mathcal{L}'$-膨胀模型下可满足,那么Σ也在 I 的 $\mathcal{L}'$-膨胀模型下可满足;

(2) 对任意一个一阶逻辑的解释(在可数语言下)I,总存在一个饱和ω模型 I^*,使得对任意的一阶逻辑的公式φ,$I\vDash\varphi$,当且仅当 $I^*\vDash\varphi$.

上述两个结论,在模型论的书籍中均可查到,更多有关模型论方面的知识可以参见文献[23].

附录1:$\mathcal{ELU}$概念表达能力刻画定理的证明

定理 5. 令$\alpha(x)$是一阶逻辑的一个开公式.$\alpha(x)$等价于描述逻辑 $\mathcal{ELU}$ 的某个概念 C,当且仅当该公式在 $\mathcal{ELU}$ 模拟下是被保持的.

证明:$\Rightarrow$施归纳于概念 C 的结构.

- 情形 1:C 为原子概念名.

由定义 6 的条件(1)可得,$\alpha(x)$在 $\mathcal{ELU}$ 模拟下是被保持的.

- 情形 2:$C=A\sqcap B$.

假设 $d_1Zd_2,d_1\in(A\sqcap B)^{I_1}$,于是有 $d_1\in A^{I_1},d_2\in B^{I_1}$.由归纳假设 $d_2\in A^{I_1},d_2\in B^{I_1}$.即 $d_2\in(A\sqcap B)^{I_2}$.

- 情形 3:$C=A\sqcup B$.

假设 $d_1Zd_2,d_1\in(A\sqcup B)^{I_1}$,于是有 $d_1\in A^{I_1}$,或者 $d_1\in B^{I_1}$.由归纳假设 $d_2\in A^{I_1}$,或者 $d_2\in B^{I_1}$.即 $d_2\in(A\sqcup B)^{I_2}$.

- 情形 4:$C=\exists r.D$.

假设 d_1Zd_2, $d_1\in(\exists r.D)^{I_1}$.因为 $d_1\in(\exists r.D)^{I_1}$,所以存在 $e_1\in\Delta^{I_1}$,使得$(d_1,e_1)\in r^{I_1}$,并且 $e_1\in D^{I_1}$.由 $\mathcal{ELU}$ 的模拟定义的条件(2),存在 $e_2\in\Delta^{I_2}$.使得$(d_2,e_2)\in r^{I_2}$ 并且 e_1Ze_2.由归纳假设,$e_2\in D^{I_2}$.即 $d_2\in(\exists r.D)^{I_2}$.

$\Leftarrow$假设$\alpha(x)$在 $\mathcal{ELU}$ 模拟下是被保持的,并且令 $con(\alpha(x))$是满足如下条件的集合:对任意的$\beta\in con(\alpha(x))$,都有$\alpha(x)\vDash\beta$,并且存在 $\mathcal{ELU}$ 的概念 C,使得 $C^{\sigma_x}=\beta$.先证明如下引理:

引理 1. 如果 $con(\alpha(x))\vDash\alpha(x)$,那么存在 $\mathcal{ELU}$ 的某个概念 C,使得$\alpha(x)$与 C 等价.

证明:因为 $con(\alpha(x))\vDash\alpha(x)$,所以由一阶逻辑的紧致性定理,就有$\beta_1,\ldots,\beta_n\in con(\alpha(x))$,并且$\beta_1\wedge\ldots\wedge\beta_n\vDash\alpha(x)$.令$C=C_1\sqcap\ldots\sqcap C_n$,其中,$C_1^{\sigma_x}=\beta_1,\ldots,C_n^{\sigma_x}=\beta_n$,则$\alpha(x)$与 C 等价.

下面证明 $con(\alpha(x))\vDash\alpha(x)$.假设 $con(\alpha(x))\nvDash\alpha(x)$,那么存在解释 I,使得 $I\vDash con(\alpha(x))[x/w]$,但是 $I\nvDash\alpha(x)[x/w]$.令$\Gamma=\{\neg C^{\sigma_x}\mid C$ 是 $\mathcal{ELU}$ 的概念并且 $w\notin C^I\}$. □

引理 2. $\{\alpha(x)\}\cup\Gamma$是可满足的.

证明:假设$\{\alpha(x)\}\cup\Gamma$是不可满足的,那么存在$\neg C_1^{\sigma_x},\ldots,\neg C_n^{\sigma_x}\in\Gamma$,使得$\alpha(x)\vDash\neg(\neg C_1^{\sigma_x}\wedge\ldots\wedge\neg C_n^{\sigma_x})$,即

$$\alpha(x)\vDash C_1^{\sigma_x}\vee\ldots\vee C_n^{\sigma_x}.$$

又因为 $I\vDash con(\alpha(x))[x/w]$,所以 $I\vDash(C_1^{\sigma_x}\vee\ldots\vee C_n^{\sigma_x})[x/w]$.由命题 1,$w\in(C_1\sqcup\ldots\sqcup C_n)^I$.于是存在某个 $i,1\leqslant i\leqslant n$,使得 $w\in C_i^I$.这与Γ的构造矛盾. □

引理 3. 令 J 是满足$\{\alpha(x)\}\cup\Gamma$的模型.即,$J\vDash\alpha(x)[x/v]$,并且 $J\vDash\Gamma[x/v]$.对任意的 $\mathcal{ELU}$ 的概念 D,如果 $v\in D^J$,那么,$w\in D^I$.

证明:假设 $w\notin D^I$,那么 $\neg D^{\sigma_x}\in\Gamma$.于是 $J\vDash\neg D^{\sigma_x}[x/v]$.即 $J\nvDash D^{\sigma_x}[x/v]$,也就是说,$v\notin D^J$. □

令 I^*是 I 的ω饱和模型.令 Z 是 $\Delta^J\times\Delta^{I^*}$ 上的一个二元关系,满足如下条件:d_1Zd_2,当且仅当对的任意 $\mathcal{ELU}$ 概念 D,如果 $d_1\in D^J$,则 $d_2\in D^{I^*}$.下面证明 Z 是一个 $\mathcal{ELU}$ 模拟.

引理 4. Z 是一个 $\mathcal{ELU}$ 模拟.

证明:定义 6 的第 1 个条件是显然成立的.下面验证条件(2).对任意的角色名 r,假设$(d_1,e_1)\in r^J$,d_1Zd_2.

令$\Sigma=\{D\mid D$ 是 $\mathcal{ELU}$ 概念并且 $e_1\in D^J\}$.对任意的 $D_1,\ldots,D_n\in\Sigma$,就有 $e_1\in(D_1\sqcap\ldots\sqcap D_n)^J$.因为$(d_1,e_1)\in r^J$,所以$d_1\in\exists r.(D_1\sqcap\ldots\sqcap D_n)^J$.由 d_1Zd_2,有 $d_2\in\exists r.(D_1\sqcap\ldots\sqcap D_n)^{I^*}$.即,存在 $e_2\in\Delta^{I^*}$,使得$(d_2,e_2)\in r^{I^*}$ 并且 $e_2\in(D_1\sqcap\ldots\sqcap D_n)^{I^*}$.即,$e_1Ze_2$.由此,我们已经证明$\Sigma$的任意有穷子集都在 I^*下可满足,而 I^*又是ω饱和模型,于是,Σ在 I^*下可满足.即,如果$(d_1,e_1)\in r^J$,d_1Zd_2,那么存在 $e_2\in\Delta^{I^*}$,使得$(d_2,e_2)\in r^{I^*}$ 并且 e_1Ze_2.

最后,因为 I^*是 I 的ω饱和模型,所以对任意的 $\mathcal{ELU}$ 的概念 D,$w\in D^I$,当且仅当 $w\in D^{I^*}$.由引理 3 和引理 4,存在 $\mathcal{ELU}$ 的模拟,使得 $v\in\Delta^I$与 $w\in\Delta^{I^*}$ 具有 Z 关系.又因为$\alpha(x)$是在 $\mathcal{ELU}$ 模拟下被保持的,所以由 $J\vDash\alpha(x)[x/v]$,有$I\vDash\alpha(x)[x/w]$.这与 $I\nvDash\alpha(x)[x/w]$矛盾.于是,$con(\alpha(x))\vDash\alpha(x)$结论成立.再由引理 1 可知,定理 5 成立. □

附录2:布尔型TBox表达能力刻画定理的证明

定理 7. α是一阶逻辑的一个闭公式.α等价于 $\mathcal{ELU}$ 中的某个布尔型 TBox $\mathcal{T}$,当且仅当该公式在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟下不变.

证明:$\Rightarrow$下面分 3 种情况讨论:

- 情形 1:$\mathcal{T}=\{C\sqsubseteq D\}$.

令 I_1 和 I_2 是任意两个解释,并且 $I_1\simeq_{\mathcal{ELU}}I_2$.假设 $I_1\vDash\alpha$.因为 $\mathcal{T}^\sigma$与α等价,所以 $I_1\vDash\mathcal{T}^\sigma$.即,$I_1\vDash\forall x(C^{\sigma_x}\to D^{\sigma_x})$.下面证明 $I_2\vDash\alpha$.假设对任意的 $d_2\in\Delta^{I_2}$,都有 $I_2\vDash C^{\sigma_x}[x/d_2]$.因为 $I_1\simeq_{\mathcal{ELU}}I_2$,所以存在 $d_1\in\Delta^{I_1}$,使得 $I_1\vDash C^{\sigma_x}[x/d_1]$,于是

就有 $I_1\vDash D^{\sigma_x}[x/d_1]$.又因为$(I_1,d_1)$—$\mathcal{ELU}(I_2,d_2)$,所以 $I_2\vDash D^{\sigma_x}[x/d_2]$,即 $I_2\vDash\forall x(C^{\sigma_x}\to D^{\sigma_x})$.类似地可以证明:如果$I_2\vDash\alpha$,那么 $I_1\vDash\alpha$.

- 情形 2:$\mathcal{T}=\{\neg(C\sqsubseteq D)\}$.

假设 $I_1\vDash\alpha$.因为 $\mathcal{T}^\sigma$与α等价,所以 $I_1\vDash\neg\forall x(C^{\sigma_x}\to D^{\sigma_x})$.即,$I_1\nvDash\forall x(C^{\sigma_x}\to D^{\sigma_x})$.

由归纳假设就有:$I_2\nvDash\forall x(C^{\sigma_x}\to D^{\sigma_x})$.即 $I_2\vDash\neg\forall x(C^{\sigma_x}\to D^{\sigma_x})$.类似地可以证明:如果 $I_2\vDash\alpha$,那么 $I_1\vDash\alpha$.

- 情形 3:$\mathcal{T}=\{(C\sqsubseteq D)\to(E\sqsubseteq F)\}$.

假设 $I_1\vDash\alpha$.因为 $\mathcal{T}^\sigma$与α等价,所以 $I_1\vDash\forall x((C^{\sigma_x}\to D^{\sigma_x})\to(E^{\sigma_x}\to F^{\sigma_x}))$.即:如果 $I_1\vDash\forall x(C^{\sigma_x}\to D^{\sigma_x})$,那么 $I_1\vDash\forall x(E^{\sigma_x}\to F^{\sigma_x})$.由归纳假设就有:如果 $I_2\vDash\forall x(C^{\sigma_x}\to D^{\sigma_x})$,那么 $I_2\vDash\forall x(E^{\sigma_x}\to F^{\sigma_x})$.即,$I_2\vDash\alpha$.类似地可以证明:如果 $I_2\vDash\alpha$,那么 $I_1\vDash\alpha$.

由上述 3 种情形可得:如果α等价于 $\mathcal{ELU}$ 中的某个布尔型 TBox $\mathcal{T}$,那么α在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟下不变.

$\Leftarrow$假设α在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟下不变,并且令 $con(\alpha)$是满足如下条件的集合:对任意的$\beta\in con(\alpha)$,都有$\alpha\vDash\beta$,并且存在 $\mathcal{ELU}$ 的布尔型 TBox $\mathcal{T}$,使得 $\mathcal{T}^\sigma=\beta$.先证明如下引理:

引理 5. 如果 $con(\alpha)\vDash\alpha$,那么存在 $\mathcal{ELU}$ 中的布尔型 TBox $\mathcal{T}$,使得α与 $\mathcal{T}$ 等价.

证明:因为 $con(\alpha)\vDash\alpha$,所以由一阶逻辑的紧致性定理,就有$\beta_1,\dots,\beta_n\in con(\alpha)$,并且$\beta_1\wedge\dots\wedge\beta_n\vDash\alpha$.

令 $\mathcal{T}^\sigma=\mathcal{T}_1^\sigma\wedge\dots\wedge\mathcal{T}_n^\sigma$, 其中 $\mathcal{T}_1^\sigma=\beta_1,\dots,\mathcal{T}_n^\sigma=\beta_n$, 则$\alpha$与 $\mathcal{T}$ 等价.

下面证明 $con(\alpha)\vDash\alpha$.假设 $con(\alpha)\nvDash\alpha$,则 $con(\alpha)\cup\{\neg\alpha\}$可满足.令 I 是 $con(\alpha)\cup\{\neg\alpha\}$的模型,$\Gamma=\{\varphi|I\vDash\varphi$, $\varphi=(C\sqsubseteq D_1\sqcup\dots\sqcup D_n)^\sigma$,或者$\varphi=\neg(C\sqsubseteq D_1\sqcup\dots\sqcup D_n)^\sigma$,这里,$C,D_1,\dots,D_n$ 为 $\mathcal{ELU}$ 的概念$\}$. □

引理 6. $\{\alpha\}\cup\Gamma$是可满足的.

证明:假设$\{\alpha\}\cup\Gamma$是不可满足的,那么存在$\varphi_1,\dots,\varphi_n\in\Gamma$,使得$\alpha\vDash\neg(\varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_n)$.即$\alpha\vDash\neg\varphi_1\vee\dots\vee\neg\varphi_n$.

又因为 $I\vDash con(\alpha)$,所以存在某个 $i,1\leqslant i\leqslant n$,使得 $I\vDash\neg\varphi_i$.这与Γ的构造矛盾.

令 J 是$\{\alpha\}\cup\Gamma$的模型.由模型论的知识,对任意一个一阶逻辑的解释(在可数语言下)I,总存在一个ω饱和模型 I^*,使得对任意的一阶逻辑的公式φ,$I\vDash\varphi$,当且仅当 $I^*\vDash\varphi$.因此不失一般性,假定 I,J 均是ω饱和模型.

如果 $I\simeq\mathcal{ELU}\,J$,那么由α在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟下不变,便有 $I\vDash\alpha,J\vDash\alpha$.这与 I 是 $con(\alpha)\cup\{\neg\alpha\}$的模型矛盾.即,假设$con(\alpha)\nvDash\alpha$错误.由引理 5,于是有定理 7 成立.下面证明 $I\simeq\mathcal{ELU}\,J$. □

引理 7. 对任意的 $d\in\Delta^I$,存在 $e\in\Delta^J$,使得对 $\mathcal{ELU}$ 任意的概念 $C,d\in C^I$,当且仅当 $e\in C^J$.

证明:对任意的 $d\in\Delta^I$,令$\Sigma^+=\{C|d\in C^I,C$ 为 $\mathcal{ELU}$ 概念$\}$,$\Sigma^-=\{C|d\notin C^I,C$ 为 $\mathcal{ELU}$ 概念$\}$.

对任意的 $C_1^+,\dots,C_n^+\in\Sigma^+,C_1^-,\dots,C_n^-\in\Sigma^-$, 因为 $d\in(C_1^+\sqcap\dots\sqcap C_n^+)^I$,但是 $d\notin(C_1^-\sqcup\dots\sqcup C_n^-)^I$,所以,

$$I\nvDash C_1^+\sqcap\dots\sqcap C_n^+\sqsubseteq C_1^-\sqcap\dots\sqcap C_n^-.$$

又因为 I,J 满足相同形如 $C\sqsubseteq D_1\sqcup\dots\sqcup D_n$ 术语公理,所以 $J\nvDash C_1^+\sqcap\dots\sqcap C_n^+\sqsubseteq C_1^-\sqcap\dots\sqcap C_n^-$.即

$$J\vDash\exists x(C_1^{+\sigma_x}\wedge\dots\wedge C_n^{+\sigma_x}\wedge\neg C_1^{-\sigma_x}\wedge\dots\wedge\neg C_n^{-\sigma_x}).$$

于是有:存在 $e'\in\Delta^J$,使得 $e'\in(C_1^+\sqcap\dots\sqcap C_n^+)^J$,但是 $e'\notin(C_1^-\sqcup\dots\sqcup C_n^-)^J$.由 J 是饱和模型,所以对任意的 $d\in\Delta^I$,存在 $e\in\Delta^J$,使得对任意的 $C\in\Sigma^+$,若 $d\in C^I$,则 $e\in C^J$ 和任意的 $C\in\Sigma^-$;若 $d\notin C^I$,则 $e\notin C^J$.即,$d\in C^I$,当且仅当 $e\in C^J$ 成立.引理 7 成立. □

引理 8. 对任意的 $e\in\Delta^J$,存在 $d\in\Delta^I$,使得对 $\mathcal{ELU}$ 任意的概念 $C,e\in C^J$,当且仅当 $d\in C^I$.

证明:与引理 7 的证明类似.

令 Z_1 是$\Delta^I\times\Delta^J$ 上的一个二元关系,满足如下条件:dZ_1e,当且仅当 $\mathcal{ELU}$ 的任意概念 C,如果 $d\in C^I$,则 $e\in C^J$;

令 Z_2 是$\Delta^J\times\Delta^I$ 上的一个二元关系,满足如下条件:eZ_2d,当且仅当对 $\mathcal{ELU}$ 的任意概念 C,如果 $e\in C^J$,则 $d\in C^I$.

类似引理 4,可以证明 Z_1,Z_2 是两个 $\mathcal{ELU}$ 模拟关系.再由引理 7 和引理 8,就有 $I\simeq\mathcal{ELU}\,J$,从而定理 7 成立. □

附录3:TBox表达能力刻画定理的证明

定理 8. 令是α一阶逻辑的一个闭公式.α等价于 $\mathcal{ELU}$ 中的某个 TBox $\mathcal{T}$,当且仅当该公式在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟和不相交的并下不变.

证明:$\Rightarrow$不失一般性,假设 $\mathcal{T}=\{C\sqsubseteq D\}$.由定理 7 情形 1 的证明可知,$\alpha$在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟下不变.令$(I_i)_{i\in I}$是一簇描述逻辑的解释,I 是其不交的并.如果对所有的 $i\in I,I_i\vDash C\sqsubseteq D$,那么由 I 的构造,就有 $I\vDash C\sqsubseteq D$;反之,如果 $I\vDash C\sqsubseteq D$,那么$\bigcup_{i\in I}C_i^I\subseteq\bigcup_{i\in I}D_i^I$.由$\Delta_i^I\cap\Delta_j^I=\varnothing,i\neq j$,有:对所有的 $i\in I,C_i^I\subseteq D_i^I$.即 $I_i\vDash C\sqsubseteq D,i\in I$.

$\Leftarrow$假设α在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟和不相交的并下不变,并且令 $con(\alpha)=\{(C\sqsubseteq D)^\sigma|\alpha\vDash(C\sqsubseteq D)^\sigma\}$.如果能够证明 $con(\alpha)\vDash\alpha$,那么由一阶逻辑的紧致性定理有:存在一个 TBox $\mathcal{T}$ 与α等价.

假设 $con(\alpha)\nvDash\alpha$,则 $con(\alpha)\cup\{\neg\alpha\}$可满足.对每一个形如$(C\sqsubseteq D_1\sqcup\ldots\sqcup D_n)^\sigma\notin con(\alpha)$,记 $I_{C\sqsubseteq D1\sqcup\ldots\sqcup Dn}$是 $con(\alpha)$的一个模型,并且满足条件:$I_{C\sqsubseteq D1\sqcup\ldots\sqcup Dn}\nvDash C\sqsubseteq D_1\sqcup\ldots\sqcup D_n$.令 I 是所有 $I_{C\sqsubseteq D1\sqcup\ldots\sqcup Dn}$ 及 $con(\alpha)\cup\{\neg\alpha\}$的一个模型不相交的并,则 $I\nvDash C\sqsubseteq D_1\sqcup\ldots\sqcup D_n,I\vDash\neg\alpha$.

接下来,对每一个形如$(C\sqsubseteq D_1\sqcup\ldots\sqcup D_n)^\sigma\notin con(\alpha)$,$I_{C\sqsubseteq D1\sqcup\ldots\sqcup Dn}$是$\alpha$的一个模型,并且满足条件:

$$I_{C\sqsubseteq D1\sqcup\ldots\sqcup Dn}\nvDash C\sqsubseteq D_1\sqcup\ldots\sqcup D_n.$$

令 J 是所有 $I_{C\sqsubseteq D1\sqcup\ldots\sqcup Dn}$ 不相交的并,则 $J\nvDash C\sqsubseteq D_1\sqcup\ldots\sqcup D_n,J\vDash\alpha$.

如果 $I\simeq_{\mathcal{ELU}}J$,那么由α在 $\mathcal{ELU}$ 全局模拟下不变,于是有 $I\vDash\alpha,J\vDash\alpha$.这与 $I\vDash\neg\alpha$矛盾.即,假设 $con(\alpha)\nvDash\alpha$错误,于是有定理 8 成立.下面证明 $I\simeq_{\mathcal{ELU}}J$. □

引理 9. 对任意的 $d\in\Delta^I$,存在 $e\in\Delta^J$,使得对 $\mathcal{ELU}$ 任意的概念 $C,d\in C^I$,当且仅当 $e\in C^J$.

证明:与引理 7 的证明类似. □

引理 10. 对任意的 $e\in\Delta^J$,存在 $d\in\Delta^I$,使得对 $\mathcal{ELU}$ 任意的概念 $C,e\in C^J$,当且仅当 $d\in\Delta^I$.

令 Z_1 是$\Delta^I\times\Delta^J$上的一个二元关系,满足如下条件:dZ_1e,当且仅当对 $\mathcal{ELU}$ 的任意概念 C,如果 $d\in\Delta^I$,则 $e\in\Delta^J$;

令 Z_2 是$\Delta^J\times\Delta^I$上的一个二元关系,满足如下条件:eZ_2d,当且仅当对 $\mathcal{ELU}$ 的任意概念 C,如果 $e\in\Delta^J$,则 $d\in C^I$.

类似于引理 4,可以证明 Z_1,Z_2 是两个 $\mathcal{ELU}$ 模拟关系.再由引理 9 和引理 10,有 $I\simeq_{\mathcal{ELU}}J$,从而定理 8 成立. □

申宇铭(1976－),男,广西桂林人,博士,副教授,CCF 会员,主要研究领域为模态逻辑,描述逻辑.

E-mail: ymshen2002@163.com

唐素勤(1972－),女,博士,教授,主要研究领域为描述逻辑,本体.

E-mail: sqtang@mailbox.gxnu.edu.cn

王驹(1950－),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为人工智能.

E-mail: jwang@mailbox.gxnu.edu.cn