ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.21, No.11, November 2010, pp.2782−2789
doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.03663

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

# 粒计算的一种覆盖模型*

折延宏[1+], 王国俊[2,3]

[1](西安石油大学 理学院,陕西 西安 710065)
[2](陕西师范大学 数学与信息科学学院,陕西 西安 710062)
[3](上海市高可信计算重点实验室,上海 200062)

# Covering Model of Granular Computing

SHE Yan-Hong[1+], WANG Guo-Jun[2,3]

[1](College of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China)
[2](College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)
[3](Shanghai Key Laboratory of Trustworthy Computing, Shanghai 200062, China)
+ Corresponding author: E-mail: yanhongshe@gmail.com

**She YH, Wang GJ. Covering model of granular computing. *Journal of Software*, 2010,21(11):2782−2789.** http://www.jos.org.cn/1000-9825/3663.htm

**Abstract**: To investigate the basic problems of granular computing, such as granulation, computing with granulars and so on, in a more general setting, a covering model of granular computing is introduced in this paper by relaxing the three conditions of equivalence relations, which generalizes the existing models. Under this model, Zoom-in and Zoom-out operators are defined, respectively. Different combinations of Zoom-in and Zoom-out operators form different rough approximations of the universe of discourse and granulated universe of discourse. This paper studies their propertis and establishes their relationship with topological space and Galois connection.
**Key words**: granular computing; covering; Zoom-in; Zoom-out; Galois connection; topological space

**摘 要**: 为了在一种更为广泛的背景之下研究粒计算的基本问题(诸如粒化、粒的计算及粒空间之间信息粒转化等),在放弃等价关系的 3 个条件的基础上提出了一种基于覆盖的粒计算模型,进一步推广了已有的工作.在该模型下,重新定义了 Zoom-in 算子与 Zoom-out 算子.对于论域及粒化了的论域而言,Zoom-in 算子与 Zoom-out 算子的不同复合会产生不同的近似算子.研究了这些近似算子的性质并建立起它们与拓扑空间及 Galois 联络之间的联系.
**关键词**: 粒计算;覆盖;Zoom-in;Zoom-out;Galois 联络;拓扑空间
**中图法分类号**: TP391 **文献标识码**: A

在人类的认知过程中,信息粒起到了很大的作用.信息粒是指人们在认识、推理和作决策中将大量复杂的信息按照各自的特征和性能划分成若干较简单的块、类、群或组等基本单位.这种基本单位就称为粒.这种信息处理的方式也称为信息粒化.自从 Zadeh 于 1979 年提出模糊信息粒化[1]以来,研究人员对信息粒化的思想产生了浓厚的兴趣,并将其思想用于粗糙集[2]、模糊集[3]、数据挖掘[4]等.Hobss 于 1985 年提出了粒度[5]的概念,

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10771129 (国家自然科学基金)
Received 2009-03-09; Accepted 2009-06-01

随后,Zadeh 于 1996 年~1997 年间第一次提出了粒计算[6,7]的概念,此后,粒计算的研究引起众多学者的关注与兴趣.目前关于粒计算已有大量的研究成果,其中包括基于商空间理论的粒计算研究.基于二元关系的粒计算研究,粒计算的覆盖模型研究、粗糙集与粒计算的交叉问题的研究、基于相容关系的粒计算模型及其在进化计算、机器学习和数据挖掘中的应用[8−13]等.这些成果的取得及相关理论的研究对人工智能和相关的问题求解理论等都有重要的应用前景.

在粒计算的研究中,对问题空间的粒化至关重要,不同的抽象层次表示不同的粒化观点.粒存在于特定的层中,同一层次的粒之间既可以是不相交的,也可以是重叠的.层次中每一个粒表述了一个特定的粒化观点,同一层次的所有粒构成了问题空间的一个覆盖,它们相互补充,相互呼应,完整地表达了在这个层次上对一个问题的描述.词计算模型、粗糙集模型和商空间模型是 3 个主要的粒计算模型,一些学者在此基础之上又提出了很多新的模型,如 Yao 在文献[14]中提出了基于划分的粒计算模型.该模型对一个有限集合进行划分得到相应的粒子,这些粒子互不相交.通过子集的包含关系,不同粒度的粒子之间形成了格的层次结构.他还构建了 Zoom-in 和 Zoom-out 两个算子,并利用这两个算子实现了不同粒层之间的相互转化.上述基于划分的粒计算模型可以看作是由问题空间上等价关系所诱导出的模型.马建敏等人放弃了等价关系过强的要求,而只保留其中的自反性,提出了基于集合论覆盖原理的粒计算模型[11,15],并利用 Zoom-in 算子与 Zoom-out 两个算子实现了不同粒层上粒子的相互转化.

本文进一步地完全放弃了等价关系的 3 个条件,将以上工作推广到了更一般的基于覆盖的近似空间.我们采用与文献[11,14,15]等不同的方式定义 Zoom-in 与 Zoom-out 算子,研究了它们的详细性质.通过对 Zoom-in 与 Zoom-out 算子的复合,分别得到问题空间及粒化了的问题空间上的近似算子.本文详细研究了它们的性质,并建立起了它们与拓扑空间、Galois 联络之间的联系.

## 1 基于覆盖的粒计算模型

### 1.1 基于划分的粒计算模型

Yao 在文献[14]中给出了一种基于划分的粒计算模型,也是一种特殊的基于覆盖的粒计算模型.该模型将一个有限集合进行划分得到两两互不相交的粒子.设 $U$ 为一个非空有限集合,$R$ 为 $U$ 上一等价关系.$U/R$ 为由等价关系 $R$ 所决定的论域 $U$ 上的一个划分.$\forall x\in U$,$[x]$表示 $U/R$ 中包含 $x$ 的等价类,此时,$[x]$具有双重身份.它既是论域 $U$ 的子集,又是 $U/R$ 中的一个元素.基于这种双重身份,为区分起见,文献[14]用 $Name([x])$表示$[x]$是 $U/R$ 中的元素而用$[x]$表示论域 $U$ 的子集.文献[14]中还分别定义了 Zoom-in 算子与 Zoom-out 算子以实现不同粒层上粒子的相互转化.

**定义 1**. 设 $U$ 为一个非空论域,$R$ 为 $U$ 上的一个等价关系,$U/R$ 为 $U$ 关于 $R$ 的划分,称 $\omega: 2^{U/R}\to 2^U$ 为 Zoom-in 算子,若

$$\forall\ Name([x])\in U/R,\ \omega(Name([x]))=[x];\ \forall\ X\in 2^{U/R},\ \omega(X)=\cup_{Name([x])\in X}\,\omega(Name([x]))\tag{1}$$

**定义 2**. 设 $U$ 为一个非空论域,$R$ 为 $U$ 上的一个等价关系,$U/R$ 为 $U$ 关于 $R$ 的划分.称 $\overline{apr},\underline{apr}: 2^U\to 2^{U/R}$ 为 Zoom-out 算子,若

$$\forall\ A\in 2^U,\ \overline{apr}(A)=\{Name([x])\mid [x]\cap A\neq\varnothing\};\ \forall A\in 2^U,\ \underline{apr}(A)=\{Name([x])\mid [x]\subseteq A\}\tag{2}$$

Zoom-in 算子与 Zoom-out 算子的不同复合可以得到 $U$ 上的近似算子 $\omega\circ\overline{apr},\omega\circ\underline{apr}$, $U/R$ 上的近似算子 $\overline{apr}\circ\omega,\underline{apr}\circ\omega$,不难验证如下算式成立:

$$\forall A\subseteq U,\ (\omega\circ\overline{apr})(A)=\cup\{[x]\mid [x]\cap A\neq\varnothing\},\ (\omega\circ\underline{apr})(A)=\cup\{[x]\mid [x]\subseteq A\}\tag{3}$$

类似地,也有

$$\left.\begin{aligned}\forall X\subseteq 2^{U/R},\ (\overline{apr}\circ\omega)(X)&=\{Name([x])\mid \exists Name([y])\in X,[x]\cap[y]\neq\varnothing\},\\ (\underline{apr}\circ\omega)(X)&=\{Name([x])\mid [x]\subseteq\omega(X)\}\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

容易看出,$\omega\circ\overline{apr},\omega\circ\underline{apr}:2^U\to 2^U$ 为论域 $U$ 上的 Pawlak 粗糙近似算子.关于它的性质在诸多文献中都有详细论述.

### 1.2 基于集合论覆盖原理的粒计算模型

Yao 提出的基于划分的粒计算模型实际上是基于 Pawlak 近似空间展开的,然而在现实生活中对问题空间的粒化往往具有某种程度的重叠.马建敏等人在文献[11,15]中考虑了一种基于集合论覆盖原理的粒计算模型.该模型是基于一个有限集合上的一个自反二元关系产生粒子,并通过定义 Zoom-in 算子与 Zoom-out 算子实现了不同粒层上粒子之间的相互转化.

**定义 3**. 设$(U,R)$为一个自反近似空间,记 $U/(R)=\{Name(R(x))|x\in U\}$,其中 $R(x)=\{y|y\in U,xRy\}$.若

$$\forall X\in 2^{U/(R)},\ w(X)=\{x|Name(R(x))\in X\} \tag{5}$$

则称 $\omega:2^{U/(R)}\to 2^U$ 为一个 Zoom-in 算子.

Zoom-in 算子 $\omega:2^{U/(R)}\to 2^U$ 具有如下一些性质:

(1) $\forall x\in U,x\in\omega(\{Name(R(x))\})$.

(2) $\omega(\varnothing)=\varnothing,\omega(2^{U/(R)})=U$.

(3) $\omega(X\cup Y)=\omega(X)\cup\omega(Y),\omega(X\cap Y)=\omega(X)\cap\omega(Y)$.

(4) $\omega(X)^C=\omega(X^C)$.

(5) $X\subseteq Y\Leftrightarrow\omega(X)\subseteq\omega(Y)$.

**定义 4**. 设$(U,R)$为一个自反近似空间,称 $\overline{apr},\underline{apr}:2^U\to 2^{U/(R)}$ 为一个 Zoom-out 算子,若

$$\forall A\subseteq U,\ \overline{apr}(A)=\{Name(R(x))|R(x)\cap A\neq\varnothing\},\ \underline{apr}(A)=\{Name(R(x))|R(x)\subseteq A\} \tag{6}$$

同样,Zoom-in 与 Zoom-out 算子的复合构成论域 $U$ 上的近似算子.以下算式自然成立: $\forall A\subseteq U$,

$$\omega\circ\overline{apr}(A)=\{x|R(x)\cap A\neq\varnothing\},\ \omega\circ\underline{apr}(A)=\{x|R(x)\subseteq A\} \tag{7}$$

容易看出,$\omega\circ\overline{apr},\omega\circ\underline{apr}:2^U\to 2^U$ 正是基于二元关系的粗糙集模型中所定义的上、下近似算子.其详细性质可参见文献[16].

### 1.3 一种基于覆盖的粒计算模型

Yao 和马建敏分别提出的两个粒计算模型事实上都是通过二元关系(等价和自反关系)产生邻域,再通过 Zoom-in 与 Zoom-out 算子来实现不同粒层中粒子的相互转化.在本节中,我们给出一种更广泛的基于覆盖的粒计算模型,并采用与前述文献不同的方法定义了 Zoom-in 与 Zoom-out 算子.Zoom-in 算子与 Zoom-out 算子的不同复合分别构成了论域 $U$ 及粒化了的论域 $U/R$ 上的广义粗糙近似算子,本文进一步建立起它们与拓扑空间及 Galois 联络之间的联系.

对于一个非空论域 $U$,在以下的讨论中,我们总假设其覆盖 $C$ 是有限的.$\forall x\in U$,记 $Md(x)=\{K\in C\mid x\in K,\forall S\in C,x\in S,S\subseteq K\Rightarrow S=K\}$,称 $Md(x)$为 $x$ 关于覆盖 $C$ 的极小集.由 $C$ 是有限覆盖易知,$\forall x\in U,|Md(x)|>0$.以下我们称 $C$ 是一元覆盖,若 $\forall x\in U,|Md(x)|=1$;称 $C$ 是一典型覆盖,若 $\forall K\in C,\exists x\in U$ 满足 $\forall S\in C,x\in S\Rightarrow K\subseteq S$.以上定义可参见文献[17].

**定义 5**. 设 $U$ 为一个非空论域,$C$ 为 $U$ 上一个有限覆盖,若一元算子 $\omega:2^C\to 2^U$ 满足

$$\forall X\in 2^C,\ \omega(X)=\{x|Md(x)\subseteq X\} \tag{8}$$

则称$\omega$为一个 Zoom-in 算子.

特别地,若 $C$ 是论域 $U$ 上的一个划分,则 $\forall x\in U,Md(x)=Name([x])$, 从而 $\omega(X)=\{x|Name([x])\in X\}=\cup_{Name([x])\in X}[x]$, 说明由式(8)定义的 Zoom-in 算子是式(1)的自然推广.

例 1:设 $U\{a,b,c,d\},K_1=\{a,b\},K_2=\{a,c\},K_3=\{b,d\},C=\{K_1,K_2,K_3\}$,则 $\omega(\varnothing)=\varnothing,\omega(Name(K_1))=\varnothing,\omega(Name(K_2))=\{c\},\omega(Name(K_3))=\{d\},\omega(Name(K_1),Name(K_2))=\{a,c\},\omega(Name(K_1),Name(K_3))=\{b,d\},\omega(Name(K_2),Name(K_3))=\{c,d\},\omega(2^C)=U$.

在定义 5 中,我们采用极小覆盖集定义了 Zoom-in 算子.其原因在于,对于 $U$ 中元素 $x$ 而言,唯有极小覆盖才能完整表达 $x$ 在覆盖 $C$ 之下的信息,既不会导致信息的缺失,也不会有冗余的无关紧要的信息.

**命题 1**. 设 $U$ 为一个非空论域,$C$ 为 $U$ 上一个有限覆盖. $\omega:2^C\to 2^U$ 为按照式(8)定义的 Zoom-in 算子,则以下性质成立:

(1) $\omega(\varnothing)=\varnothing, \omega(2^C)=U$.

(2) $\forall X,Y\in 2^C, \omega(X\cup Y)=\omega(X)\cup\omega(Y)$ 当且仅当 $C$ 是一元覆盖.

(3) $\omega(X\cap Y)=\omega(X)\cap\omega(Y)$.

(4) $\omega(X)^C=\omega(X^C)$ 当且仅当 $C$ 是一元覆盖.

(5) $X\subseteq Y\Leftrightarrow\omega(X)\subseteq\omega(Y)$ 当且仅当 $C$ 是一个典型覆盖.

证明:(1) 性质(1)显然成立.

(2) $(\Rightarrow)$假设 $C$ 不是一元覆盖,则存在 $x\in U, |Md(x)|\geqslant 2$. 不失一般性,设 $|Md(x)|=2$及$Md(x)=\{Name(X_i), Name(X_j)\}$. 令 $X=\{Name(X_1)\}, Y=\{Name(X_2)\}$, 易知 $x\in\omega(X\cup Y)$, 但 $x\notin\omega(X)\cup\omega(Y)$. 矛盾!

$(\Leftarrow)$若 $C$ 是一元覆盖,则 $\forall x\in U$,

$$x\in\omega(X\cup Y)\Leftrightarrow Md(x)\subseteq X\cup Y\Leftrightarrow Md(x)\subseteq X\text{或}Md(x)\subseteq Y\Leftrightarrow x\in\omega(X)\text{或}x\in\omega(Y)\Leftrightarrow x\in\omega(X)\cup\omega(Y).$$

故 $\forall X,Y\in 2^C, \omega(X\cup U)=\omega(X)\cup\omega(Y)$.

(3) $\forall x\in U$,

$$x\in\omega(X\cap Y)\Leftrightarrow Md(x)\subseteq X\cap Y\Leftrightarrow Md(x)\subseteq X\text{且}Md(x)\subseteq Y\Leftrightarrow x\in\omega(X)\text{且}x\in\omega(Y)\Leftrightarrow x\in\omega(X)\cap\omega(Y).$$

(4) $(\Rightarrow)$假设 $C$ 不是一元覆盖,则存在 $x\in U, |Md(x)|\geqslant 2$. 不妨设 $|Md(x)|=2$及$Md(x)=\{Name(X_1), Name(X_2)\}$. 令 $X=\{Name(X_1)\}$, 则不难验证 $x\in\omega(X)^C$,但$x\notin\omega(X^C)$. 矛盾!

$(\Leftarrow)$若 $C$ 为一元覆盖,则

$\forall x\in U, x\in\omega(X)^C\Leftrightarrow Md(x)\not\subset X\Leftrightarrow Md(x)\subseteq X^C\Leftrightarrow x\in\omega(X^C)$.

已证得 $\omega(X)^C=\omega(X^C)$.

(5) $(\Rightarrow)$若 $|C|=1$, 则结论是显然的.以下假设$|C|\geqslant 2$ 假设结论不成立,即 $C$ 不为一个典型覆盖,则存在 $Name(X_i)\in C$满足$\forall x\in X_i, \exists Name(X_j)\in C$,使得$x\in X_j$,但$X_i\not\subset X_j$.不难证得 $\forall x\in U, Md(x)\neq\{Name(X_i)\}$.

令 $X=\{Name(X_i)\}, Y=\{Name(X_j)\}$, 由 $X_i\not\subset X_j$ 可知, $Name(X_i)\neq Name(X_j)$. 易证得$\omega(X)=\varnothing\subseteq\omega(Y)$, 但 $X\not\subset Y$.矛盾,故 $C$ 为一个典型覆盖.

$(\Leftarrow)$容易证明 $X\subseteq Y\Rightarrow\omega(X)\subseteq\omega(Y)$. 以下证明 $\omega(X)\subseteq\omega(Y)\Rightarrow X\subseteq Y$.

$\forall Name(X_i)\in X$, 由 $C$ 是一个典型覆盖可知, $\exists x\in U, Md(x)=\{Name(X_i)\}$, 故 $x\in\omega(X)$. 由 $\omega(X)\subseteq\omega(Y)$ 可知, $x\in\omega(Y)$,因此,$Name(X_i)\in Y$ 即可证明. □

**定义 6**. 设 $U$ 为一个非空论域,$C$ 为 $U$ 上的一个有限覆盖. $\overline{apr},\underline{apr}:2^U\to 2^C$ 按照如下方式定义:

$$\forall A\in 2^U,\ \overline{apr}(A)=\{Name(X_i)|X_i\cap A\neq\varnothing\},\ \underline{apr}(A)=\{Name(X_i)|X_i\subseteq A\} \tag{9}$$

则称 $\overline{apr},\underline{apr}:2^U\to 2^C$ 为 Zoom-out 算子.

注 1:定义 5 给出的 Zoom-in 算子通过极小覆盖将覆盖 $C$ 的子集扩张为论域 $U$ 的子集,从而获得更多的信息.定义 6 给出的 Zoom-out 算子实现了从论域 $U$ 到覆盖空间 $C$ 上粒子之间的相互转化,它将论域 $U$ 的子集映射为覆盖 $C$ 的子集,在这一过程中,论域 $U$ 的子集被看作一个整体而不是很多个体,这必然会导致信息的缺失.事实上,已有文献就粒计算中粒度空间之间的转化做过研究,参见文献[18].另外,定义 6 中的 $\overline{apr}(A)$, $\underline{apr}(A)$ 分别称为 $A$ 的上下近似集.与粗糙集理论不同的是,这里的 $\overline{apr}(A),\underline{apr}(A)$ 只是覆盖 $C$ 的子集而并非论域 $U$ 的子集.

容易证明以下命题成立:

**命题 2**. 设 $U$ 为一个非空论域,$C$ 为 $U$ 上一个有限覆盖.Zoom-out 算子 $\overline{apr},\underline{apr}:2^U\to 2^C$ 由(9)定义,则如下性质成立:

(1) $\overline{apr}(U)=2^C,\overline{apr}(A)=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing$.

(2) $\underline{apr}(\varnothing)=\varnothing,\underline{apr}(A)=2^C\Leftrightarrow A=U$.

(3) $\underline{apr}(A)\subseteq\overline{apr}(A)$.

(4) $\underline{apr}(A^c)=\overline{apr}(A)^c,\overline{apr}(A^c)=\underline{apr}(A)^c$.

(5) $\underline{apr}(A\cap B)=\underline{apr}(A)\cap\underline{apr}(B),\overline{apr}(A\cup B)=\overline{apr}(A)\cup\overline{apr}(B)$.

(6) $A\subseteq B\Rightarrow\underline{apr}(A)\subseteq\underline{apr}(B),\overline{apr}(A)\subseteq\overline{apr}(B)$.

证明:容易证得,略. □

## 2 论域 $U$ 上的粗糙近似及其与拓扑空间、Galois 联络等之间的联系

本节中,通过复合 Zoom-in 算子与 Zoom-out 算子,我们得到了论域 $U$ 上近似算子 $\omega\circ\overline{apr},\omega\circ\underline{apr}$.详细研究了它们的性质,并建立起它们与拓扑空间、Galois 联络等之间的联系.

### 2.1 论域$U$上的近似算子 $\omega\circ\overline{apr}$ 与 $\omega\circ\underline{apr}$

由式(8)及式(9)可知,

$$\left.\begin{aligned}\forall A\subseteq U,\ (\omega\circ\overline{apr})(A)&=\{x\,|\,Md(x)\subseteq\overline{apr}(A)\}=\{x\,|\,\forall Name(X_i)\in Md(x),X_i\cap A\neq\varnothing\},\\(\omega\circ\underline{apr})(A)&=\{x\,|\,Md(x)\subseteq\underline{apr}(A)\}=\{x\,|\,\forall Name(X_i)\in Md(x),X_i\subseteq A\}\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

$(\omega\circ\overline{apr})(A),(\omega\circ\underline{apr})(A)$ 分别称为 $A$ 的上下近似集.称 $\omega\circ\overline{apr},\omega\circ\underline{apr}:2^U\to2^U$ 为论域 $U$ 上的上、下近似算子.

**命题 3**. 设 $U$ 为一个非空论域,$C$ 为 $U$ 上一个有限覆盖. $\omega\circ\overline{apr},\omega\circ\underline{apr}:2^U\to2^U$ 为由式(10)给出的近似算子,则以下性质成立:

(1) $(\omega\circ\overline{apr})(\varnothing)=\varnothing,(\omega\circ\overline{apr})(U)=U$.

(2) $(\omega\circ\underline{apr})(\varnothing)=\varnothing,(\omega\circ\underline{apr})(U)=U$.

(3) $\forall A\subseteq U,(\omega\circ\underline{apr})(A)\subseteq A\subseteq(\omega\circ\overline{apr})(A)$.

(4) $(\omega\circ\underline{apr})(A\cap B)=(\omega\circ\underline{apr})(A)\cap(\omega\circ\underline{apr})(B),(\omega\circ\underline{apr})(A\cup B)\supseteq(\omega\circ\underline{apr})(A)\cup(\omega\circ\underline{apr})(B)$.

(5) 若 $C$ 为一元覆盖,则 $(\omega\circ\overline{apr})(A\cup B)=(\omega\circ\overline{apr})(A)\cup(\omega\circ\overline{apr})(B)$.

(6) $(\omega\circ\overline{apr})(A\cap B)\subseteq(\omega\circ\overline{apr})(A)\cap(\omega\circ\overline{apr})(B)$.

(7) 若 $C$ 为一元覆盖,则 $\forall A\subseteq U,(\omega\circ\overline{apr})(A^c)=((\omega\circ\underline{apr})(A))^c,(\omega\circ\underline{apr})(A^c)=((\omega\circ\overline{apr})(A))^c$.

(8) $A\subseteq B\Rightarrow(\omega\circ\overline{apr})(A)\subseteq(\omega\circ\overline{apr})(B),(\omega\circ\underline{apr})(A)\subseteq(\omega\circ\underline{apr})(B)$.

证明:由命题 1 及命题 2 可得证. □

### 2.2 $\omega\circ\overline{apr}$, $\omega\circ\underline{apr}$ 与拓扑算子、Galois联络之间的联系

在本节中,我们建立起了 $\omega\circ\overline{apr},\omega\circ\underline{apr}$ 与拓扑内部算子、拓扑闭包算子、Galois 联络等之间的联系.相关概念如下:

**定义 7**. 设 $U$ 为一个非空论域,称映射 $i:2^C\to2^C$ 为 $U$ 上一个拓扑内部算子,若其满足:

(1) $i(U)=U$.

(2) $i(A\cap B)=i(A)\cap i(B)$.

(3) $i(i(A))=i(A)$.

(4) $i(A)\subseteq A$.

对偶地,读者可给出拓扑闭包算子 $cl:2^U\to2^U$ 的定义.

**命题 4**. 设 $U$ 为一个非空论域,$C$ 为 $U$ 上一元覆盖,则

$$\forall A\subseteq U,\ (\omega\circ\underline{apr})((\omega\circ\underline{apr})(A))=(\omega\circ\underline{apr})(A).$$

证明:由命题 3 可知, $(\omega\circ\underline{apr})((\omega\circ\underline{apr})(A))\subseteq(\omega\circ\underline{apr})(A)$.

以下只需证明 $(\omega\circ\underline{apr})(A)\subseteq(\omega\circ\underline{apr})((\omega\circ\underline{apr})(A))$. $\forall x\in(\omega\circ\underline{apr})(A)$, 存在 $Name(X_i)\in C$ 使得 $Md(x)=\{Name(X_i)\}$ 且 $X_i\subseteq A$. $\forall y\in X_i$, 设 $Md(y)=\{Name(X_j)\}$, 则易知 $X_j\subseteq X_i$. 结合 $X_i\subseteq A$ 及(10)知 $y\in(\omega\circ\underline{apr})(A)$ 由 $y$ 的任意性可知 $X_i\subseteq(\omega\circ\underline{apr})(A)$ ,因此, $x\in(\omega\circ\underline{apr})((\omega\circ\underline{apr})(A))$. □

由定义 7 及命题 4,我们有如下结论:

**命题 5**. 设 $U$ 为一个非空论域,$C$ 为一元覆盖,则 $\omega\circ\underline{apr}:2^U\to 2^U$ 是 $U$ 上的一个拓扑内部算子.

由命题 3 中的性质(7)可知,当 $C$ 为一元覆盖时, $\omega\circ\overline{apr},\omega\circ\underline{apr}$ 互为对偶算子.因此,下面的结论自然成立:

**命题 6**. 设 $U$ 为一个非空论域,$C$ 为一元覆盖,则 $\omega\circ\overline{apr}:2^U\to 2^U$ 是 $U$ 上的一个拓扑闭包算子.

以下建立起基于一元覆盖的粒计算模型与基于二元关系的粒计算模型之间的联系,在 $U$ 上定义二元关系 $R$ 如下:

$$\forall x,y\in U,\ (x,y)\in R\Leftrightarrow y\in X_i,\ Md(x)=\{Name(X_i)\}.$$

容易证明 $R$ 为一个自反、传递的二元关系,且 $\forall x\in U, Md(x)=\{Name(X_i)\}=\{Name(R(x))\}$. 此时,本文中由式(8)给出的 Zoom-in 算子与文献[15]中给出的 Zoom-in 的定义(见式(5))相一致,且有下式成立:

$$\forall A\subseteq U,\ (\omega\circ\overline{apr})(A)=\{x\,|\,R(x)\cap A\neq\varnothing\},\ (\omega\circ\underline{apr})(A)=\{x\,|\,R(x)\subseteq A\}\tag{11}$$

以上说明当 $C$ 为一元覆盖时, $\omega\circ\overline{apr},\omega\circ\underline{apr}$ 为 $U$ 上基于相似(自反、传递)关系的粗糙近似算子.反过来,任意给出 $U$ 上的一个相似关系 $R$,定义 $C=\{Name(R(x))\,|\,x\in U\}$, 则易知 $C$ 为 $U$ 上一元覆盖,且由式(5)、式(8)分别定义的 Zoom-in 算子相一致.

**定义 8**[19]. 设 $U$ 为一个非空集合,$U$ 上的一个 Galois 联络是满足如下条件的映射序对 $(f,g), f,g:2^U\to 2^U$:

(1) $A_1\subseteq A_2\Rightarrow f(A_1)\subseteq f(A_2), g(A_1)\subseteq g(A_2)$.

(2) $f(g(A))\subseteq A, gf(A)\supseteq A$.

**命题 7**. 设 $U$ 为一个非空论域,$C$ 为 $U$ 上的一个典型一元覆盖,则 $(\omega\circ\overline{apr},\omega\circ\underline{apr})$ 是 $U$ 上一个 Galois 联络当且仅当 $C$ 是 $U$ 上一个划分.

证明:($\Rightarrow$) $\forall Name(X_i)\in C$, 由于 $C$ 为一个典型覆盖,故存在 $x\in X_i$ 使得 $Md(x)=\{Name(X_i)\}$.$\forall Name(X_j)\in C$, 为了证明 $C$ 是一个划分,以下只需证明 $X_i\cap X_j\neq\varnothing\Rightarrow X_i=X_j$. 不妨设 $y\in X_i\cap X_j$, 由 $(\omega\circ\overline{apr},\omega\circ\underline{apr})$ 是 $U$ 上的一个 Galois 联络可知, $\forall z\in U, z\in(\omega\circ\underline{apr})((\omega\circ\overline{apr})(\{z\}))$ ,特别取 $z=x$,我们有 $X_i\subseteq(\omega\circ\overline{apr})(\{x\})$. 取 $y\in X_i$,不妨设 $Md(y)=\{Name(X_k)\}$, 则由 $y\in(\omega\circ\overline{apr})(\{x\})$ 及式(10)可知,$x\in X_k$.由 $x\in X_k$ 易知 $X_i\subseteq X_k$.同理,由 $y\in X_i$ 及 $Md(y)=\{Name(X_k)\}$ 可知, $X_k\subseteq X_j$, 故 $X_i\subseteq X_k\subseteq X_j$ .类似地,可证得 $X_j\subseteq X_i$.故 $X_j=X_i$.

($\Leftarrow$)若 $C$ 是 $U$ 上一个划分,此时不难证明:

$$\forall A\subseteq U,(\omega\circ\overline{apr})((\omega\circ\underline{apr})(A))\subseteq A,\ \forall A\subseteq U,(\omega\circ\underline{apr})((\omega\circ\overline{apr})(A))\supseteq A.$$

结合命题 3 中的性质(8)及定义 8 可知, $(\omega\circ\overline{apr},\omega\circ\underline{apr})$ 为 $U$ 上的一个 Galois 联络.证毕. □

## 3 $2^C$ 上的近似算子

本节中通过复合 Zoom-out 算子 $\overline{apr},\underline{apr}:2^U\to 2^C$,得到了 $2^C$ 上的两个近似算子 $\overline{apr}\circ\omega,\underline{apr}\circ\omega:2^C\to 2^C$,研究了它们的性质并建立起它们与 Galois 联络、拓扑空间等之间的联系.

由式(8)、式(9)不难得到:

$$\left.\begin{aligned}&\forall X\in 2^C,\ (\overline{apr}\circ\omega)(X)=\{Name(X_i)\,|\,X_i\cap\omega(X)\neq\varnothing\}=\{Name(X_i)\,|\,\exists x\in X_i, Md(x)\subseteq X\},\\&(\underline{apr}\circ\omega)(X)=\{Name(X_i)\,|\,X_i\subseteq\omega(X)\}=\{Name(X_i)\,|\,\forall x\in X_i, Md(x)\subseteq X\}\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

以下命题揭示了近似算子 $\overline{apr}\circ\omega,\underline{apr}\circ\omega:2^C\to 2^C$ 所具有的一些性质:

**命题 8**. 设 $U$ 为一个非空论域,$C$ 为一个有限覆盖,则

(1) $(\overline{apr}\circ\omega)(\varnothing)=\varnothing,(\overline{apr}\circ\omega)(2^C)=2^C,(\underline{apr}\circ\omega)(\varnothing)=\varnothing,(\underline{apr}\circ\omega)(2^C)=2^C$.

(2) 若 $C$ 为一典型覆盖,则 $(\underline{apr}\circ\omega)(X)\subseteq X\subseteq(\overline{apr}\circ\omega)(X)$.

(3) 若 $C$ 为一元覆盖,则 $\forall X\subseteq 2^C,(\overline{apr}\circ\omega)(X^c)=(\underline{apr}\circ\omega)(X)^c$.

(4) $(\underline{apr}\circ\omega)(X\cap Y)=(\underline{apr}\circ\omega)(X)\cap(\underline{apr}\circ\omega)(Y)$.

(5) 若 $C$ 为一元覆盖,则 $(\overline{apr}\circ\omega)(X\cup Y)=(\overline{apr}\circ\omega)(X)\cup(\overline{apr}\circ\omega)(Y)$.

(6) $X\subseteq Y\Rightarrow(\overline{apr}\circ\omega)(X)\subseteq(\overline{apr}\circ\omega)(Y),(\underline{apr}\circ\omega)(X)\subseteq(\underline{apr}\circ\omega)(Y)$.

证明:只需证明命题 8 中的(2),其余由命题 1 和命题 2 立即可得. $\forall Name(X_i)\in(\underline{apr}\circ\omega)(X)$, 由式(11)可知, $\forall x\in X_i,Md(x)\subseteq X$.由于 $C$ 是一个典型覆盖,故存在 $y\in X_i$,使得$\forall Name(X_j)\in C,y\in X_j\Rightarrow X_i\subseteq X_j$.即 $Md(y)=\{Name(X_i)\}$.因此, $Name(X_i)\in X$.这就证明了 $(\underline{apr}\circ\omega)(X)\subseteq X$ .类似地,可证明 $X\subseteq(\overline{apr}\circ\omega)(X)$. □

以下例子说明对于一般覆盖而言,命题 8 中的(2)未必成立:

例 2: $U=\{1,2,3\},C=\{K_1,K_2,K_3\}$.其中 $K_1=\{1,2,3\},K_2=\{1,2\},K_3=\{2,3\}$.令 $X=\{K_2,K_3\}$.易证得 $(\underline{apr}\circ\omega)(X)=C\not\subset X$.

例 3: $U=\{a,b,c,d\},K_1=\{a,b\},K_2=\{a,c\},K_3=\{b,d\}.C=\{K_1,K_2,K_3\}$.令 $X=\{K_1\}$,则 $(\overline{apr}\circ\omega)(X)=\varnothing$, 但显然 $X\not\subset(\overline{apr}\circ\omega)(X)$.

以下建立起 $\overline{apr}\circ\omega,\underline{apr}\circ\omega:2^C\rightarrow 2^C$ 与拓扑闭包算子、内部算子之间的联系.

**命题 9**. 设 $U$ 是一个非空论域,$C$ 是 $U$ 上的一元典型覆盖,则

$$(\underline{apr}\circ\omega)((\underline{apr}\circ\omega)(X))=(\underline{apr}\circ\omega)(X),\ (\overline{apr}\circ\omega)((\overline{apr}\circ\omega)(X))=(\overline{apr}\circ\omega)(X).$$

证明: $\forall Name(X_i)\in(\underline{apr}\circ\omega)(X)$, 则 $\forall x\in X_i,Md(x)\subseteq X$.

要证明 $Name(X_i)\in(\underline{apr}\circ\omega)((\underline{apr}\circ\omega)(X))$ ,只需说明 $\forall x\in X_i,Md(x)\subseteq(\underline{apr}\circ\omega)(X)$. 由于 $C$ 是一元覆盖,不妨设 $Md(x)=\{Name(X_j)\},\forall y\in X_j$,由 $X_j\subseteq X_i$ 可知,$y\in X_i$,因此 $Md(y)\subseteq X$,由 $y$ 的任意性可知,$Name(X_j)\in(\underline{apr}\circ\omega)(X)$. $(\underline{apr}\circ\omega)((\underline{apr}\circ\omega)(X))\subseteq(\underline{apr}\circ\omega)(X)$ 由命题 8 直接可得. $(\overline{apr}\circ\omega)((\overline{apr}\circ\omega)(X))=(\overline{apr}\circ\omega)(X)$ 可类似地得证. □

由定义 7 及命题 8、命题 9 可得如下结论:

**命题 10**. 设 $U$ 为一个非空论域,$C$ 为 $U$ 上的一元典型覆盖,则 $\underline{apr}\circ\omega:2^C\rightarrow 2^C$ 为一个拓扑内部算子.

**命题 11**. 设 $U$ 为一个非空论域,$C$ 为 $U$ 上的一元典型覆盖,则 $\overline{apr}\circ\omega:2^C\rightarrow 2^C$ 为一个拓扑闭包算子.

以下命题揭示了 $\overline{apr}\circ\omega,\underline{apr}\circ\omega$ 与 Galois 联络之间的联系:

**命题 12**. 设 $U$ 为一个非空论域,$C$ 为 $U$ 上的一个一元覆盖,则 $(\overline{apr}\circ\omega,\underline{apr}\circ\omega)$ 是 $2^C$ 上的一个 Galois 联络当且仅当 $C$ 是一个划分.

证明:($\Rightarrow$)欲证 $C$ 是 $U$ 上的一个划分,只需说明 $\forall\ Name(X_i),Name(X_j)\in C,X_i\cap X_j\neq\varnothing\Rightarrow X_i=X_j$.$\forall\ y\in X_i\cap X_j$, 由于 $(\overline{apr}\circ\omega,\underline{apr}\circ\omega)$ 是 $2^C$ 上一个 Galois 联络,故 $Name(X_i)\in(\underline{apr}\circ\omega)((\overline{apr}\circ\omega)(Name(X_i)))$. 由式(12)可知,$\forall\ x\in X_i,Md(x)\subseteq(\overline{apr}\circ\omega)(X_i)$.特别取 $x=y$,则有 $Md(y)\subseteq(\overline{apr}\circ\omega)(Name(X_i))$. 不妨设 $Md(y)=\{Name(X_k)\}$,由式(12)可知,存在 $z\in X_k,Md(z)=\{Name(X_i)\}$. 不难证明 $X_i\subseteq X_k$,且由 $y\in X_j,Md(y)=\{Name(X_k)\}$ 可知,$X_k\subseteq X_j$.故 $X_i\subseteq X_j$,同理可证得 $X_j\subseteq X_i$,因此有 $X_j=X_i$.

($\Leftarrow$)若 $C$ 是论域 $U$ 上的一个划分,则容易证明 $Name(X_i)\in(\underline{apr}\circ\omega)((\overline{apr}\circ\omega)(Name(X_i)))$. 由命题 8 中的(5)、(6)可知, $\forall\ X\in 2^C,X\subseteq(\underline{apr}\circ\omega)((\overline{apr}\circ\omega)(X))$. 又由于 $C$ 为一元覆盖,由命题 8 中的(3)可知, $\overline{apr}\circ\omega,\underline{apr}\circ\omega$ 互为对偶算子.因此有 $\forall\ X\in 2^C,(\overline{apr}\circ\omega)((\underline{apr}\circ\omega)(X))\subseteq X$, 由定义 8 可知, $(\overline{apr}\circ\omega,\underline{apr}\circ\omega)$ 是 $2^C$ 上的一个 Galois 联络. □

## 4 总 结

粒计算是一门飞速发展的学科,其基本思想、原理和策略出现在不同的学科和领域中.本文在文献[11,14,15]的基础之上提出了一种更为广泛的基于覆盖的粒计算模型,更一般地推广了以上工作.在此模型下,我们通过极小覆盖集定义了 Zoom-in 和 Zoom-out 算子,详细研究了其性质.这两个算子的不同复合构成了论域及粒化了的论域上的广义粗糙近似算子.本文还建立起了它们与内部算子、闭包算子及 Galois 联络等之间的联系.如何建立起本文给出的粒计算模型与其他基于覆盖粗集的粒计算模型(参见文献[17])之间的联系,我们将另文继续加以研究.

**References**:

[1] Zadeh LA, Wrote; Ruan D, Huang CF, Trans. Fuzzy Sets and Fuzzy Information Granulation Theory. Beijing: Beijing Normal University, 2000 (in Chinese).

[2] Pawlak Z. Rough sets. Int'l Journal of Computer and Information Science, 1982,11(5):341−356. [doi: 10.1007/BF01001956]

[3] Zadeh LA. Fuzzy sets. Information Control, 1965,8(3):338−353. [doi: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X]

[4] Yao YY. Granular computing for data mining. In: Dasarathy BV, ed. Proc. of the SPIE Conf. on Data Mining, Intrusion Detection, Information Assurance, and Data Networks Security. 2006. 1−12.

[5] Hobbs JR. Granularity. In: Proc. of the IJCAI. 1985. 432−435.

[6] Zadeh LA. Fuzzy logic-computing with words. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 1996,4(2):103−111. [doi: 10.1109/91.493904]

[7] Zadeh LA. Towards a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. Fuzzy Sets and Systems, 1997,90(2):111−127.

[8] Zhang L, Zhang B. The quotient space theory of problem solving. Fundamenta Informaticae, 2004,59(2-3):287−298.

[9] Lin TY. Granular computing on binary relations I: Data mining and neighborhood systems. In: Skowron A, Polkowski L, eds. Rough Sets in Knowledge Discovery. Heidelberg: Physica-Verlag, 1998. 107−121.

[10] Lin TY. Granular computing on binary relations II: Rough set representations and belief functions. In: Skowron A, Polkowski L, eds. Rough Sets in Knowledge Discovery. Heidelberg: Physica-Verlag, 1998. 121−140.

[11] Ma JM, Zhang WX, Li TJ. A covering model of granular computing. In: Proc. of the 2005 Int'l Conf. in Machine Learning and Cybernetics. 2005. 1625−1630.

[12] Wang GY, Hu F, Huang H, Wu Y. A granular computing model based on tolerance relation. The Journal of China Universities of Posts and Telecommunications, 2005,12(3):86−90.

[13] Miao DQ, Wang GY, Liu Q, Lin TY, Yao YY. Granular Computing: Past, Present and the Future. Beijing: Science Press, 2007 (in Chinese).

[14] Yao YY. A partition model of granular computing. Lecture Notes in Computer Science, 2004,3100:232−253.

[15] Ma JM, Zhang WX, Leung Y, Song XX. Granular computing and dual Galois connection. Information Sciences, 2007,177(23): 5365−5377. [doi: 10.1016/j.ins.2007.07.008]

[16] Zhu W. Generalized rough sets based on relations. Information Sciences, 2007,177(22):4997−5011. [doi: 10.1016/j.ins.2007.05.037]

[17] Bonikowski Z, Bryniarski E, Wybraniec-Skardowska U. Extensions and intentions in the rough set theory. Journal of Information Sciences, 1998,107:149−167. [doi: 10.1016/S0020-0255(97)10046-9]

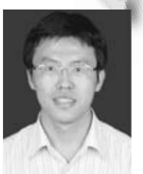
[18] Qian YH, Liang JY, Dang CY. Knowledge structure, knowledge granulation and knowledge distance in a knowledge base. Int'l Journal of Approximate Reasoning, 2009,50(1):174−188.

[19] Jarvinen J, Kondo M, Kortelainen J. Logic from Galois connections. Int'l Journal of Approximate Reasoning, 2008,49(3):595−606. [doi: 10.1016/j.ijar.2008.06.003]

**附中文参考文献**:

[1] Zadeh L,著;阮达,黄崇福,译.模糊集与模糊信息粒理论.北京:北京师范大学出版社,2000.

[13] 苗夺谦,王国胤,刘清,林早阳,姚一豫.粒计算:过去、现在与展望.北京:科学出版社,2007.



**折延宏**(1983－),男,陕西延安人,博士,讲师,主要研究领域为不确定性推理,粗糙集,粒计算.

**王国俊**(1935－),男,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为不确定性推理.