

有限元领域中多态模型误差分析方法*

刘晓平⁺, 李书杰, 吴敏, 金灿

(合肥工业大学 计算机与信息学院, 安徽 合肥 230009)

Essential Factors of Error of Multi-State Model in Finite Element Field

LIU Xiao-Ping⁺, LI Shu-Jie, WU Min, JIN Can

(School of Computer and Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

+ Corresponding author: E-mail: lxp@hfut.edu.cn, http://www.hfut.edu.cn

Liu XP, Li SJ, Wu M, Jin C. Essential factors of error of multi-state model in finite element field. *Journal of Software*, 2008,19(Suppl.):173-181. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/19/s173.htm>

Abstract: 3D computer aided design (CAD) system based on feature-based solid modeling technique has been widely used for product design recently. At the same time, CAE also plays a more and more important role in product design and finite element method is one of the most popular CAE methods. The models built by CAD systems usually need simplification before finite element analysis according to precision need. How to analysis the degree of simplification is an essential problem in automatic transformation from CAD model to CAE model. Models of different degree of simplification are called Multi-state Model. Considering the need of economizing hardware resource and ensure the appointed correction precision at the same time, this paper proposes a measurement method of the error of different simplification models according to FEM error analysis theory and then validates that by numerical results. Based on the measurement method, the concept of Level of Error is proposed, which provides a new way of getting Multi-state Model in FEM field.

Key words: CAD; finite element method; multi-state model; feature simplification; error analysis

摘要: 基于特征造型技术的三维CAD系统目前已广泛应用于产品设计,同时CAE在产品设计与优化中也起到了越来越重要的作用.而有限元是最为广泛使用的CAE方法之一.由CAD系统建立的模型在进行有限元分析之前,通常需要根据分析需要对模型进行简化,如何分析模型简化前后对有限元计算结果的影响程度是CAD模型到CAE模型自动转化的首要步骤.将模型因特征的简化而形成的各种状态的模型称为多态模型.针对确保一定分析精度,节省计算资源的需求,根据有限元误差理论提出了分析不同简化模型对有限元分析结果造成的误差的方法,且通过数据实例得到验证,根据误差分析方法提出模型误差层次的概念,为有限元领域中多态模型的生成提供了新的思路.

关键词: CAD;有限元;多态模型;特征简化;误差分析

如今,基于特征造型技术的三维CAD系统在设计领域已显示出巨大潜力.利用特征建模的方法构造零件,则零件实际是被表达为一些特征的有序集合^[1].特征包括形状特征、材料特征以及精度特征等,其中几何形状特征是模型最主要的特征.与此同时,CAE目前已经被广泛应用于产品设计和优化过程中,而有限元分析方法是应用最广泛的CAE方法.但是,CAD系统建立的模型通常不适合直接进行有限元分析,原因之一是CAD系

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60673028 (国家自然科学基金)

Received 2008-05-03; Accepted 2008-11-14

统建立的模型通常会包含一些复杂特征,造成计算资源消耗过多,甚至会导致网格剖分失败或有限元计算出错.事实上,在一次分析过程中,分析人员并不是追求无限精确的分析结果,因此可以在一定的误差范围内,对模型进行简化.

决定有限元计算复杂度的重要因素是由网格剖分生成的节点数,而网格剖分时对于曲率较大或较细小的特征应加大网格剖分密度^[2],也即生成的节点会大大增加.因此对模型中一些需要较大网格剖分密度的特征进行简化必是一种降低网格剖分密度,节约计算资源的有效方法.但是,对模型中复杂特征简化之后,将会减少网格节点数或增大网格直径,因此,由有限元理论可知,用简化后模型再进行有限元分析时势必会对计算结果产生一定的影响,即简化后模型的计算结果将和原模型的计算结果之间有一定的误差.事实上,对模型中需要较大网格剖分密度的特征进行简化的目的应是在一定的误差范围内节省计算资源,因此建立分析模型中特征被简化后对有限元计算结果影响的方法,是设计复杂模型自动简化算法的首要步骤.

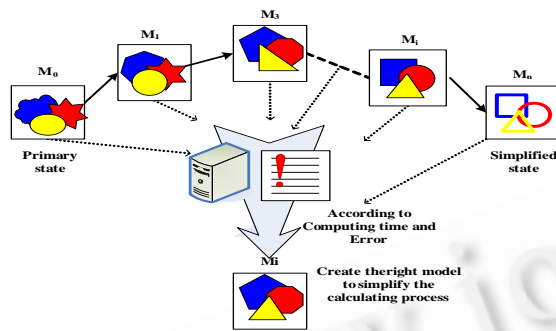


Fig.1 Schematic diagram of multi-state model's generation and selection

图1 多态模型生成和选择示意图

作者所在团队长期承担了学校 60% 以上的工程计算任务,有多年的科学计算和工程 CAD 基础,经过对工程计算问题的长期凝练提出了多态概念(如图 1 所示),用来表述复杂模型由于模型精度、计算时间、计算精度的变化而产生的多种状态,指导用户简化已建模型,选择最合适计算的模型态^[3],从而能够达到事半功倍的效果.本文采用多态模型的概念来描述因对模型中复杂特征进行简化而形成的各种状态,并针对确保一定分析精度,节省计算资源的需求,根据有限元误差理论建立衡量不同简化模型对有限元分析结果造成的误差的方法,指出决定这种误差的 3 个要素,且通过数据实例得到验证,为多态模型提供确定简化策略及程度的依据.

1 相关研究与讨论

如上文所述,因为对模型中需要加大网格剖分密度的特征进行简化的目的是在一定的误差范围内,节省计算资源,所以建立分析模型中特征被简化后对有限元计算结果影响的方法,应是设计复杂特征自动简化算法的首要步骤,也即需要一种误差衡量方法来关联模型的简化程度和有限元计算结果误差之间的关系,以确保模型简化后有限元计算结果尽量在一定的误差范围之内.但目前模型简化程度的确定通常是针对具体的简化方式用主观方式确定.

目前,基于特征的简化方式多为特征删除或特征降维^[4],对于特征降维,目前通常是根据分析者的经验来确定模型的 LOA 值^[5].在特征删除方面,文献[6]中指出应根据专家知识和分析者的经验来决定模型被简化的程度.LEE^[7]等人以 LOD 标准来衡量模型被简化的程度,将模型中使模型体积减少的负特征(subtractive feature)的按体积的排序,LOD=1 的模型由模型中所有使模型体积增加的正特征(additive feature)构成,每增加一个负特征 LOD 增加 1,LOD 值越高的模型越精确.后来,Li^[8]提出不区分正负特征,以所有特征体积排序得到模型的 LOD 值,Lee^[9]等人又进一步提出以特征的有效体积排序得到模型的 LOD 值.

但是这些方法都是主观的以特征体积为基准,把特征的体积作为影响模型 LOD 值的唯一要素,缺少从客观理论上推导模型简化程度要素的方法,导致 LOD 值的确定与简化前后产生的有限元计算结果误差并无直接关系.事实上,在有限元计算领域,特征体积并不是唯一决定模型简化程度的要素,例如处理体积相同但到载荷面距离不同的特征对有限元计算结果的影响是不同的,因此可知,除特征体积外,必有其他因素也会影响特征处理前后的有限元计算结果.

作者在文献[3,10]分别以 MCNP 和 ANSYS 为实验环境,通过实验数据建立经验公式,预测模型中具有不同特征体积比的特征被删除后对 MCNP 和有限元计算结果的影响,以此为基础,本文根据有限元误差分析理论建

立衡量特征简化后不同模型对有限元分析结果造成的影响的误差分析方法,且通过数据实例得到验证,最后根据误差分析方法提出模型误差层次的概念,为有限元领域中多态模型的生成提供了新的思路.

2 误差分析方法

2.1 分析思路

分析者得到的有限元分析结果是定义在问题域 Ω 上的 u 的逼近解 u_h ,则分别用特征简化前后的模型进行有限元计算将会得到两个对 u 的逼近解,分别记为 u_{h1} 和 u_{h2} .显然,用 u_{h1} 和 u_{h2} 逼近 u 都会有一定的逼近误差.因为特征简化后部分网格直径将会变大,所以 u_{h2} 对 u 的逼近误差将大于 u_{h1} 对 u 的逼近误差.正如逼近论中常用逼近误差的差异来衡量两种逼近方法的不同,本文用因特征简化而产生的增大的逼近误差来衡量模型中特征简化前后对有限元计算结果的影响.

2.2 特征简化后有限元计算结果误差分析

用有限元法去近似求解变分问题时,产生误差的原因很多.首先是用子空间 V_h 去代替容许函数空间 V ,即用投影 u_h 代替真实解 u ;其次是区域逼近(即用多角形去代替原问题域 Ω)和边值条件的近似;再次是计算刚度矩阵和载荷向量时采用的数值积分;最后还有求解代数方程组的舍入误差等,但一般来说最主要的还是第1种原因造成的逼近误差.有限元方法的误差通常用插值逼近误差 $\|u - \Pi_h u\|_V$ 来表示,其中 $\Pi_h : V \rightarrow V_h$ 是 V 到 V_h 的分片多项式插值算子, $u \in V$, $\Pi_h u$ 为 u 在 V 中的插值, $\|\cdot\|_V$ 表示 V 中的范数.

设 T_h 为区域 Ω 的一个剖分族.根据有限元理论^[11],在 Sobolev 空间 $W^{m,q}(\Omega)$ 上对仿射等价有限单元 $T \in T_h$ 有如下误差估计式:

$$|u - \Pi_h u|_{m,q,T} \leq c(\text{meas}(T))^{1/q-1/p} h_T^{k+1} \rho_T^{-m} |u|_{k+1,p,T}, \forall u \in W^{k+1,p}(T) \quad (1)$$

其中, $h_T = \text{diam}T = \sup_{x,y \in T} |x-y|$, $\rho_T = \sup\{\text{diam}(S), S \text{ 是包含在 } T \text{ 内的球}\}$,对于 $\forall p \in P_k(\Omega)$ 有 $\Pi_h p = p$,其中 $P_k(\Omega)$ 是 Ω 上的所有次数不高于 k 的多项式的集合, $|\cdot|_{m,q,T}$ 和 $|\cdot|_{k+1,p,T}$ 分别是定义在 Sobolev 空间 $W^{m,q}(T)$ 和 $W^{k+1,p}(T)$ 上的半范数,且 $W^{k+1,p}(T)$ 是 $W^{m,q}(T)$ 连续嵌入空间, c 是与有限单元类型和插值方式相关的常数, $\text{meas}(T)$ 是指 T 的测度.

假设剖分算法足够理想,使剖分是正则的,即 $\exists \sigma = \text{const} > 0$ 使

$$h_T / \rho_T \leq \sigma, \forall T \in T_h, h > 0, h \rightarrow 0 \quad (2)$$

则有

$$\sum_{T \in T_h} |u - \Pi_h u|_{m,q,T} \leq c' \left(\sum_{T \in T_h} (\text{meas}(T))^{1/q-1/p} \right) h_h^{k+1-m} |u|_{k+1,p,\Omega}, \forall u \in W^{k+1,p}(\Omega) \quad (3)$$

其中 $h_{T_h} = \max_{T \in T_h} (h_T)$,常数 c' 和 σ 有关.

设原问题域为 Ω ,其剖分族为 T_{h1} , Ω 中部分特征被简化后问题域转化为 Ω_2 ,其剖分族为 T_{h2} .记 $\Delta T_h = T_{h1} \cap T_{h2}$, $\Delta T_{h1} = T_{h1} - \Delta T_h$, $\Delta T_{h2} = T_{h2} - \Delta T_h$, $\Delta \Omega = \sum_{T \in \Delta T_{h1}} T$.不失一般性,设 $\Delta \Omega$ 为连通区域,若不连通则分为

若干个连通区域逐个考虑.设在问题域 Ω 上真实解为 u_1 ,在问题域 Ω_2 上真实解为 u_2 ,在实际计算中特征简化前后用户通过有限元软件计算后得到的计算结果分别为 $\Pi_{h1} u$ 以及 $\Pi_{h2} u$.考虑真实解 u_1 和真实解 u_2 ,它们之间的误差产生于用 Ω_2 逼近 Ω 的区域逼近误差,若对特征简化方法加以一定的限制,则区域逼近产生的误差远小于有限元方法产生的插值误差.因此,在建立衡量模型中特征被简化后对计算结果的影响的方法之前,首先引入如下两点假设:

假设 1. 忽略因特征简化产生的区域逼近的误差,即假设

$$\sum_{T \in \Delta T_{h1}} (\text{meas}(T))^{1/q-1/p} \approx \sum_{T \in \Delta T_{h2}} (\text{meas}(T))^{1/q-1/p}.$$

假设 2. 忽略问题域 Ω 上的真实解 u_1 和问题域 Ω_2 上的真实解 u_2 之间因区域逼近产生的误差,即假设

$u_1 \approx u_2$.

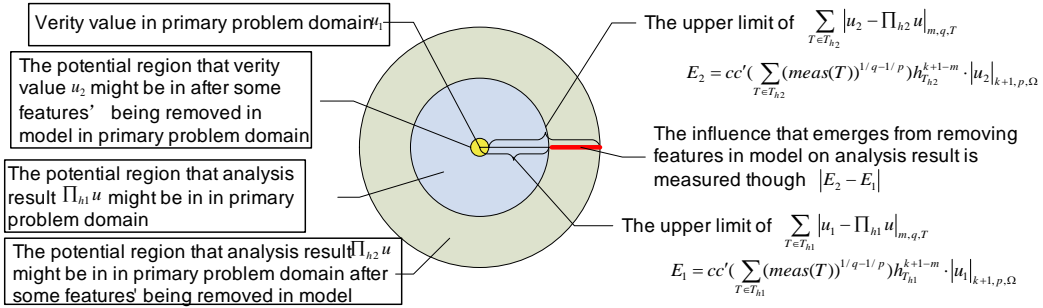


Fig.2 Measurement method of the error formed by feature displacement
图2 特征简化对计算结果影响的衡量方法示意图

因特征简化而产生的增大的逼近误差量应为 $\left| \sum_{T \in I_{h_1}} |u_1 - \Pi_{h_1} u|_{m,q,T} - \sum_{T \in I_{h_2}} |u_1 - \Pi_{h_2} u|_{m,q,T} \right|$. 如图 2 所示, 用 $\sum_{T \in I_{h_1}} |u_1 - \Pi_{h_1} u|_{m,q,T}$ 的上限 $cc' \left(\sum_{T \in I_{h_1}} (meas(T))^{1/q-1/p} \right) h_{h_1}^{k+1-m} \cdot |u_1|_{k+1,p,\Omega}$ 来衡量用 $\Pi_{h_1} u$ 逼近 u_1 产生的误差, 记为 E_1 ; 用 $\sum_{T \in I_{h_2}} |u_1 - \Pi_{h_2} u|_{m,q,T}$ 的上限来衡量用 $\Pi_{h_2} u$ 逼近 u_1 产生的误差, 由假设 2, $\sum_{T \in I_{h_2}} |u_1 - \Pi_{h_2} u|_{m,q,T}$ 可由 $\sum_{T \in I_{h_2}} |u_2 - \Pi_{h_2} u|_{m,q,T}$ 近似, 而 $\sum_{T \in I_{h_2}} |u_2 - \Pi_{h_2} u|_{m,q,T}$ 的上限为 $cc' \left(\sum_{T \in I_{h_2}} (meas(T))^{1/q-1/p} \right) h_{h_2}^{k+1-m} \cdot |u_2|_{k+1,p,\Omega}$, 记为 E_2 , 因此用 $|E_2 - E_1|$ 来衡量模型中特征被简化后对计算结果的影响, 结合假设 1、假设 2, 有

$$\begin{aligned}
 |E_2 - E_1| &= \left| cc' \left(\sum_{T \in I_{h_2}} (meas(T))^{1/q-1/p} \right) h_{h_2}^{k+1-m} \cdot |u_2|_{k+1,p,\Omega} - cc' \left(\sum_{T \in I_{h_1}} (meas(T))^{1/q-1/p} \right) h_{h_1}^{k+1-m} \cdot |u_1|_{k+1,p,\Omega} \right| \\
 &= \left| cc' \left(\sum_{T \in \Delta T_{h_2}} (meas(T))^{1/q-1/p} \right) h_{\Delta T_{h_2}}^{k+1-m} \cdot |u_2|_{k+1,p,\Delta \Omega} - cc' \left(\sum_{T \in \Delta T_{h_1}} (meas(T))^{1/q-1/p} \right) h_{\Delta T_{h_1}}^{k+1-m} \cdot |u_1|_{k+1,p,\Delta \Omega} \right| \\
 &\approx cc' \left| \left(\sum_{T \in \Delta T_{h_1}} (meas(T))^{1/q-1/p} \right) h_{\Delta T_{h_1}}^{k+1-m} - \left(\sum_{T \in \Delta T_{h_2}} (meas(T))^{1/q-1/p} \right) h_{\Delta T_{h_2}}^{k+1-m} \right| \cdot |u_1|_{k+1,p,\Delta \Omega} \\
 &\approx cc' \sum_{T \in \Delta T_{h_1}} (meas(T))^{1/q-1/p} \left| h_{\Delta T_{h_1}}^{k+1-m} - h_{\Delta T_{h_2}}^{k+1-m} \right| |u_1|_{k+1,p,\Delta \Omega}
 \end{aligned} \tag{4}$$

当有限单元类型和插值方式确定, 并且剖分满足式(2)时, 式(4)的右端即为衡量特征简化后对有限元分析结果影响的表达式. 特征简化后对计算结果的影响在 $W^{m,q}(T)$ 上的估计来自于 3 个因素:

- 特征简化对网格剖分产生影响的区域测度反映的要素 $\sum_{T \in \Delta T_{h_1}} (meas(T))^{1/q-1/p}$, 简记为 ΔT .
- 特征简化后网格直径改变量反映的要素 $|h_{\Delta T_{h_1}}^{k+1-m} - h_{\Delta T_{h_2}}^{k+1-m}|$, 简记为 ΔH .
- 特征简化对网格剖分产生影响的区域内函数 u 在 Sobolev 空间 $W^{k+1,p}(\Delta \Omega)$ 上的半范数 $|u|_{k+1,p,\Delta \Omega}$, 简记为 ΔU .

本文用简化误差 SE(simplification error)来表示特征简化前后对有限元计算结果的影响, 则 SE 应为关于 ΔT , ΔH 和 ΔU 的三元函数, 记为 $SE = SE(\Delta T, \Delta H, \Delta U) = k \Delta T \cdot \Delta H \cdot \Delta U$, 其中 $k = cc'$.

上述误差分析方法使得模型简化程度和有限元计算结果之间建立了联系, 令简化后模型的误差层次(level of error, 简称 LOE)值为相应的 SE, 则简化后模型的 LOE 值即是用来衡量简化后具有不同计算精度的模型层次, 模型的 LOE 值越小, 模型的计算结果越精确, 越大, 则模型的计算结果误差越大. 与上文中提到的模型的 LOD 值相比, LOE 值更能反映模型精度与计算精度之间的关系.

3 数据实例

本文以 ANSYS 提供的分析三维热传导问题的单元 Soild87 进行稳态热分析,以热通量在简化前后的误差变化为例,来验证模型简化后产生的简化误差和 3 个要素 ΔT , ΔH 和 ΔU 之间的关系.在 R^3 中,区域的测度即为区域的体积,因此下文将 $meas(T)$ 记为 $V(T)$.Soild87 是十结点四面体单元,它是在三维线性四面体单元的基础上建立起来的一种二阶单元,因此取 $k=2$.令 $m=1, q=1, p=\infty$,再根据积分第一中值定理有

$$|u - \Pi_h u|_{1,1,T} = \int_T |\partial u - \partial(\Pi_h u)| dx = \overline{|\partial u_T - \partial(\Pi_h u_T)|} \cdot V(T) \quad (5)$$

其中 $\overline{|\partial u_T - \partial(\Pi_h u_T)|}$ 表示 $|\partial u - \partial(\Pi_h u)|$ 在 T 上的均值.由传热学^[12]知识知热通量 $q = -\lambda \cdot \partial u$,因此单元上热通量的误差均值即为 $\lambda \overline{|\partial u_T - \partial(\Pi_h u_T)|}$,其中 λ 为材料的导热系数.ANSYS 后处理模块 Post1 提供了误差估计 TDSG,表述的恰是每个单元上的热通量的误差均值^[13],即为每个单元上 $\lambda \overline{|\partial u_T - \partial(\Pi_h u_T)|}$ 的取值,本文记模型所有单元上热通量误差和为 Σ .本文采用的验证方法是:首先用简化前模型进行分析,获得每个单元上的热通量误差均值,计算 $\Sigma_1 = \lambda \sum_{T \in T_{h1}} \overline{|\partial u_T - \partial(\Pi_{h1} u_T)|} \cdot V(T)$;再用简化后模型进行分析,获得每个单元上的热通量误差均值,计算 $\Sigma_2 = \lambda \sum_{T \in T_{h2}} \overline{|\partial u_T - \partial(\Pi_{h2} u_T)|} \cdot V(T)$;根据本文建立的误差衡量方法,则应有简化后误差:

$$SE(\Delta T, \Delta H, \Delta U) = \frac{1}{\lambda} |\Sigma_1 - \Sigma_2| \approx cc' \sum_{T \in \Delta T_{h1}} V(T) \cdot |h_{\Delta T_{h1}}^2 - h_{\Delta T_{h2}}^2| |u|_{3,\infty,\Delta\Omega} \quad (6)$$

由于 λ 为常数,则可以把式(6)写为

$$|\Sigma_1 - \Sigma_2| \approx \lambda cc' \sum_{T \in \Delta T_{h1}} V(T) \cdot |h_{\Delta T_{h1}}^2 - h_{\Delta T_{h2}}^2| |u|_{3,\infty,\Delta\Omega} \quad (7)$$

也即简化误差 SE 与 3 个要素的关系 $\Delta T = \sum_{T \in \Delta T_{h1}} V(T)$, $\Delta H = |h_{\Delta T_{h1}}^2 - h_{\Delta T_{h2}}^2|$ 和 $\Delta U = |u|_{3,\infty,\Delta\Omega}$ 的关系与 $|\Sigma_1 - \Sigma_2|$ 与 3 个要素的关系等价.分别固定 3 个要素中的两个要素,观察 $|\Sigma_1 - \Sigma_2|$ 和另外一个要素的关系.

3.1 简化误差和 ΔT 之间的关系验证

为验证简化误差和 ΔT 之间的关系,我们构造如下实验:

- (1) 实验模型:取图 1 中模型,将其中 8 个半径为 0.8 个单位,高为 2.4 个单位的小圆柱视为高曲率扫掠特征.
- (2) 固定 ΔH :将小圆柱简化为六边形柱,且设置小圆柱上网格直径为 0.2,简化后六边形柱上网格直径为 0.8,则 ΔH 固定.
- (3) 固定 ΔU :在模型中间圆孔处施加稳定面载荷 450℃,其余表面初始温度为 45℃,如图 3 所示.那么 8 个小圆柱到载荷面的距离相同,且材料属性一致,因此小圆柱处温度场函数相同^[12],从而固定了 ΔU .模型的材料属性见表 1.

(4) 改变 ΔT :将小圆柱简化为六边形柱,则 ΔT 正比于被简化小圆柱的体积.逐个增加被简化小圆柱的个数,那么 ΔT 将随着被简化小圆柱的个数增加而增加.记简化 $i(i=0,1,2,\dots,8)$ 个圆柱后特征简化对网格剖分产生影响的区域体积为 ΔT_i ,模型上所有单元上热通量误差和为 Σ_i .

根据如图 3 所示的实验方案,应有:

$$|\Sigma_i - \Sigma_0| \approx \lambda cc' |0.8^2 - 0.2^2| |u|_{3,\infty,\Delta\Omega} \cdot \Delta T_i, 1 \leq i \leq 8 \quad (8)$$

记 $K_1 = \lambda cc' |0.8^2 - 0.2^2| |u|_{3,\infty,\Delta\Omega}$,由于固定了 ΔH 和 ΔU ,所以 K_1 为常数.如果特征简化后的误差 SE 确为关于 ΔT , ΔH 和 ΔU 的三元函数,那么在固定 ΔH 和 ΔU 后,SE 应和 ΔT 成正比例函数关系.所获得数据见表 1,根据式(8),对表中数据 ΔT_i 和 $\Sigma_i - \Sigma_0 (1 \leq i \leq 8)$ 进行一元线性回归拟合来反映 SE 和 ΔT 之间的关系,可得 SE 和 ΔT 成正比例函数关系的可信度为 97.21%(如图 4 所示),因此可认为推导正确.

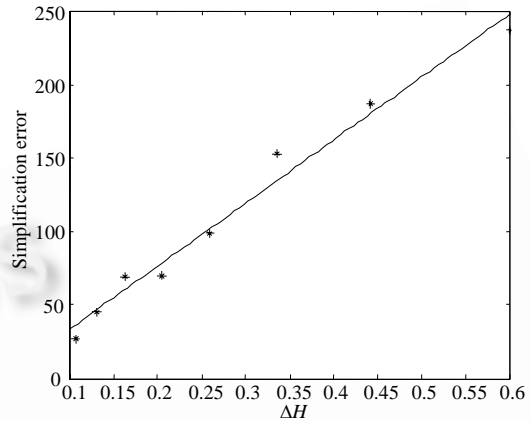
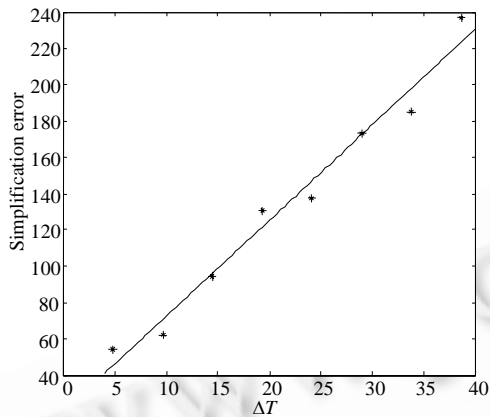
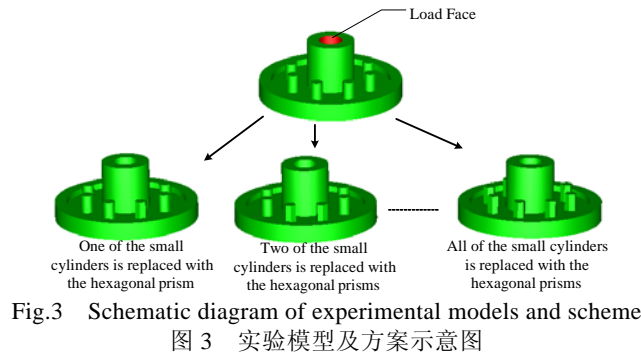


Table 1 Verification data of relationship between displacement error and ΔT
表1 简化误差和 ΔT 之间关系验证数据

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ΔT_i	0	4.825 5	9.651 0	14.476 5	19.301 9	24.127 4	28.952 9	33.778 4	38.603 9
Σ_i	2 021.5	2 075.8	2 083.4	2 116.0	2 152.2	2 158.9	2 194.7	2 206.7	2 258.5
$\Sigma_i - \Sigma_0$ $1 \leq i \leq 8$	---	54.280 3	61.880 3	94.480 3	130.680 3	137.380 3	173.180 3	185.180 3	236.960 4

3.2 简化误差和 ΔH 之间的关系验证

- (1) 实验模型:同上节.
- (2) 固定 ΔT :简化特征固定为模型中 8 个小圆柱,因此 ΔT 不变.
- (3) 固定 ΔU :同上节.
- (4) 改变 ΔH :将 8 小圆柱分别简化为 6,7,8,...,13 边形,设置小圆柱上的网格直径为 0.2,记为 h_0 ,相应模型上所有单元上热通量误差和为 Σ_0 .各多边形柱上网格直径为多边形边长,记为 $h_i (i = 6,7,8, \dots, 13)$,则 $\Delta H_i = h_i^2 - 0.2^2$,模型上所有单元上热通量误差和为 Σ_i ,

则根据上面的实验方案,应有:

$$|\Sigma_i - \Sigma_0| \approx \lambda c c' |u|_{3, \infty, \Delta \Omega} \Delta T \cdot (h_i^2 - 0.2^2), \quad 6 \leq i \leq 13 \quad (9)$$

Table 2 Verification data of relationship between displacement error and ΔH

表 2 简化误差和 ΔH 之间关系验证数据

i	0	6	7	8	9	10	11	12	13
ΔH_i	0	0.600 0	0.441 9	0.334 9	0.259 5	0.204 5	0.163 2	0.131 5	0.106 6
Σ_i	2 021.5	2 258.5	2 208.1	2 174.3	2 119.8	2 091.7	2 090.7	2 066.4	2 048.6
$\Sigma_i - \Sigma_0$	---	236.980 1	186.595 2	152.753 6	98.293 6	70.168 8	69.215 5	44.924 5	27.058 3

记 $K_2 = \lambda cc' |u|_{3,\infty,\Delta\Omega} \Delta T$, 同上一实验, 如果特征简化后的误差 SE 确为关于 ΔT , ΔH 和 ΔU 的三元函数, 那么在固定 ΔT 和 ΔU 后, K_2 为常数, 所以 SE 应和 ΔH 成正比例函数关系. 所获得数据见表 2, 对表中数据 ΔH_i 和 $\Sigma_i - \Sigma_0 (6 \leq i \leq 13)$ 进行一元线性回归拟合, SE 和 ΔH 成正比例函数关系的可信度为 98.05% (如上面图 5 所示), 因此可认为推导正确.

3.3 简化误差和 ΔU 之间的关系验证

- (1) 实验模型: 同上节.
- (2) 固定 ΔT : 同上节.
- (3) 固定 ΔH : 同第 3.1 节.
- (4) 改变 ΔU : 设置稳定面载荷温度分别为 $112.5 + 112.5i$ °C, $0 \leq i \leq 7$, 模型其余表面初始温度为 $11.25 + 11.25i$ °C, $0 \leq i \leq 7$. 其余条件及材料属性均不变, 相应的温度场分布函数记为 u_i , 根据传热学知识^[12]可知, $u_i = iu_0 (1 \leq i \leq 7)$, 从而有 $\Delta U_i = i\Delta U_0$. 简化前模型上所有单元上热通量误差和为 Σ_{0i} , 简化后模型上所有单元上热通量误差和为 Σ_{1i} ,

则根据上面的实验方案, 应有:

$$|\Sigma_{1i} - \Sigma_{0i}| \approx \lambda cc' \Delta T (0.8^2 - 0.2^2) \cdot \Delta U_i = \lambda cc' \Delta T (0.8^2 - 0.2^2) \cdot i\Delta U_0, \quad 0 \leq i \leq 7 \tag{10}$$

记 $K_3 = \lambda cc' \Delta T (0.8^2 - 0.04)$, 同上一实验, 如果特征简化后的误差 SE 确为关于 ΔT , ΔH 和 ΔU 的三元函数, 那么在固定 ΔT 和 ΔH 后, K_3 为常数, 所以 SE 应和 ΔU 成正比例函数关系, 考虑到 $\Delta U_i = i\Delta U_0$, 其中 ΔU_0 为常数, 因此 SE 和 ΔU 成正比例函数与 SE 和 i 成正比例函数关系等价. 所获得数据见表 3, 对表中数据 i 和 $\Sigma_{1i} - \Sigma_{0i}$ 进行一元线性回归拟合, SE 和 ΔU 成正比例函数关系的可信度为 98.33% (如图 6 所示), 因此推导正确.

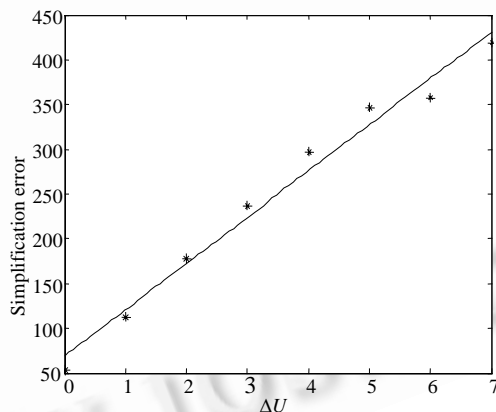


Fig.6 Fitting chart of displacement error and ΔU

图 6 简化误差和 ΔU 拟合图

Table 3 Verification data of relationship between displacement error and ΔU

表 3 简化误差和 ΔU 之间关系验证数据

i	0	1	2	3	4	5	6	7
Σ_{0i}	460.0	943.3	1 460.1	2 021.5	2 610.0	3 194.8	3 783.0	4 275.0
Σ_{1i}	512.9	1 056.1	1 637.6	2 258.5	2 907.5	3 541.0	4 140.7	4 694.6
$\Sigma_{1i} - \Sigma_{0i}$	52.920 0	112.778 9	177.543 4	236.960 4	297.509 2	346.215 8	357.710 5	419.515 7

4 结论及进一步工作

CAE 目前已经越来越广泛地应用于产品设计和优化过程中,但 CAD 系统建立的模型通常会由于其包含一些高曲率特征增加了有限元网格剖分的难度,甚至会导致网格剖分失败或有限元计算出错,对有限元模型的简化方法以及简化程度是目前 CAD-CAE 一体化研究的热点.根据本文的推导,得到以下两点主要结论:

(1) 多态理论体系的核心思想是在一定的误差范围内,节省计算资源,因此需要根据一定准则确定模型被简化的程度,也即需要建立衡量特征简化后产生的简化误差的方法.本文根据逼近论中常见的用逼近误差的差异来衡量两种逼近方法的不同的思想,建立了用因特征简化而产生的增大的逼近误差量来衡量简化误差的方法.

(2) 根据本文建立衡量简化误差的方法,对简化误差产生影响的应有 3 个要素,分别为特征简化对网格剖分产生影响的区域测度反映的要素 $\Delta T = \sum_{T \in \Delta T_{h1}} (meas(T))^{1/q-1/p}$ 、特征简化后网格剖分直径改变量反映的要素

$$\Delta H = \left| h_{\Delta T_{h1}}^{k+1-m} - h_{\Delta T_{h2}}^{k+1-m} \right| \text{ 以及被简化特征所在区域内函数 } u \text{ 在 Sobolev 空间 } W^{k+1,p}(\Delta\Omega) \text{ 上的半范 } \Delta U = \|u\|_{k+1,p,\Delta\Omega}.$$

本文以稳态热分析和 Soild87 单元为例,取特征简化后对温度场分布函数 u 的影响在 $W^{1,1}(T)$ 上的估计对此结论进行了佐证,置信度均在 97% 以上.根据推导过程,此结论对有限元分析其他领域(如热分析领域、声场分析领域等)或场函数 u 在其他 Sobolev 空间上的估计同样适用,具有普适性价值.

下一步工作的重点将针对基于模型误差层次的多态模型理论的研究展开,目前获得了影响要素应为 ΔT , ΔH 和 ΔU 的结论,但它们的具体数值尚没有给出显式的确定方法,也即还不能给出特征简化后对有限元计算结果影响的具体数值,下一步工作的重点是根据网格剖分算法,并结合具体领域知识(如热分析领域、声场分析领域)等,探索易于获得 ΔT , ΔH 和 ΔU 的方法,从而量化每一个可被简化的复杂特征在简化后对计算结果产生的简化误差,最终为特征简化实现模块提供简化策略.

致谢 在此,我们谨向对本文工作给与支持和建议的同行表示诚挚的感谢.

References:

- [1] Li ST, Zheng LY, Wang SC. An approach to product modeling based on feature sequencing in integrated environment. Journal of Computer Aided Design and Computer Graphics, 1999,11(5):420-425 (in Chinese with English abstract).
- [2] Zhang S, Shi FZ. Implementation of finite element method mesh generation from multiple trimmed free surfaces. Journal of Software, 2005,16(11):2008-2013 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/16/2008.htm>
- [3] Liu XP, Wu L, Luo YT, Mao ZQ, Zheng LP. Study on concept & mechanism of multi-state model in scientific computing. In: Pan YH, ed. Proc. of the 6th Int'l Conf. on CAID&CD. Int'l Academic Publishers, 2005. 750-755.
- [4] Lee SH. Feature-Based multi-resolution techniques for product design. Journal of Zhejiang University (Science A), 2006, 7(9):1535-1543.
- [5] Lee SH. A CAD-CAE integration approach using feature-based multi-resolution and multi-abstraction modeling techniques. Computer Aided Design, 2005,37(9):941-955.
- [6] Belaziz M, Bouras A, Brun JM. Morphological analysis for product design. Computer Aided Design, 2000,32(5):377-388.
- [7] Lee JY, Lee JH, Kim H, Kim HS. A cellular topology-based approach to generating progressive solid models from feature-centric models. Computer Aided Design, 2004,36(3):217-229.
- [8] Li B, Liu J. Detail feature recognition and decomposition in solid model. Computer Aided Design, 2002,34(5):405-414.
- [9] Lee SH. Feature-Based multi-resolution modeling of solids. ACM Trans. on Graphics, 2005,24(4):1417-1441.
- [10] Liu XP, Jin C, Li SJ. Research on multi-state model and its application in modeling of finite element simulation software. Journal of System Simulation, 2007,19(3):538-542 (in Chinese with English abstract).
- [11] Li KT, Huang AX, Huang QH. Finite Element Method and Its Application. Beijing: Science Press, 2006 (in Chinese).
- [12] Zhao ZN. Heat Transfer. Beijing: Higher Education Press, 2002 (in Chinese).

- [13] Moaveni S, Wrote; Wang S, *et al.*, Trans. Finite Element Analysis: The Theory and Application of ANSYS. 2nd ed., Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005 (in Chinese).

附中文参考文献:

- [1] 李书田,郑联语,汪叔淳.集成环境中基于特征顺序的产品建模方法研究.计算机辅助设计与图形学学报,1999,11(5):420-425.
 [2] 张苏,施法中.多裁减自由曲面生成有限元网格的实现.软件学报,2005,16(11):2008-2013. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/16/2008.htm>
 [10] 刘晓平,金灿,李书杰.有限元仿真分析软件中建模的多态机理研究.系统仿真学报,2007,19(3):538-542.
 [11] 李开泰,黄艾香,黄庆怀.有限元方法及其应用.北京:科学出版社,2006.
 [12] 赵镇南.传热学.北京:高等教育出版社,2002.
 [13] Moaveni S,著;王崧,等,译.有限元分析——ANSYS 理论与应用.第 2 版,北京:电子工业出版社,2005.



刘晓平(1964—),男,山东济南人,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为 CAD/CG, 并行计算.



吴敏(1986—),女,硕士生,主要研究领域为计算机辅助设计建模.



李书杰(1983—),女,硕士生,主要研究领域为计算机辅助设计建模.



金灿(1982—),男,博士生,主要研究领域为计算机辅助设计建模术.