

Wang-Said 型广义 Ball 曲线的降阶*

江平, 檀结庆⁺

(合肥工业大学 应用数学研究所, 安徽 合肥 230009)

Degree Reduction of Generalized Ball Curves of Wang-Said Type

JIANG Ping, TAN Jie-Qing⁺

(Institute of Applied Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-551-2901463 ext 8924, Fax: +86-551-2904410, E-mail: jqtan@mail.hf.ah.cn

Jiang P, Tan JQ. Degree reduction of generalized ball curves of Wang-Said type. Journal of Software, 2006,17 (Suppl.):93-102. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/s93.htm>

Abstract: In this paper, the authors discuss the degree reduction of generalized Ball curves of Wang-Said type by perturbation and the best uniform approximation respectively. The approximation error and relative approximation error are given and the two different methods are compared by some examples.

Key words: generalized ball curves of Wang-Said type; generalized ball curves; degree reduction; best uniform approximation; perturbation method

摘要: 主要讨论 WSGB 曲线的两种不同的降阶算法,分别为扰动法和最佳一致逼近法,给出了两种方法所得降阶曲线与原曲线的逼近误差与相对逼近误差,并通过实例对两种降阶算法进行了比较.

关键词: 广义 Ball 曲线; WSGB 曲线; 降阶; 最佳一致逼近; 扰动法

广义 Ball 曲线是对 Ball^[1]在 CONSURF 系统中首次提出的三次 Ball 基函数的推广,具体的有 Said-Ball 曲线与 Wang-Ball 曲线,国内外有很多作者对广义 Ball 曲线的性质进行了研究^[2-10].广义 Ball 曲线与 Bézier 曲线有许多类似的性质,如计算稳定性、对称性、凸包性、端点插值性、几何不变性等,在曲线求值及升降阶的计算速度方面,Ball 曲线明显优于 Bézier 曲线.2000 年邬^[9]根据 Wang-Ball 和 Said-Ball 曲线的特点,又提出了两族新的带位置参数的广义 Ball 曲线(WSGB 型曲线和 SBGB 型曲线).WSGB 包含了 Said-Ball 曲线与 Wang-Ball 曲线以及介于两者之间的曲线,这两族新的广义 Ball 曲线具有许多与广义 Ball 曲线和 Bézier 曲线共有的性质.但它们具有比 Bézier 更有效的递归算法,更适合于曲线次数的提高或降低.同时通过选取不同的位置参数还能适当地调整曲线的位置.江^[13]给出了 WSGB 基函数的对偶基,并利用对偶基实现了从 Bézier 曲线到 WSGB 曲线的互换.

升降阶变换处理是 CAGD 中相当重要和热门的研究课题之一.不同的 CAD/CAM 系统中所使用的基的最

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.10171026, 60473114 (国家自然科学基金); the Research Funds for Young Innovation Group, Education Department of Anhui Province of China under Grant No.2005TD03 (安徽省教育厅科技创新团队基金); the Project of Scientific Research for Young University Teachers of Anhui Province of China under Grant No.2005jq1016zd (安徽省高等学校青年教师资助科研计划)

Received 2006-03-15; Accepted 2006-09-11

高次数的限制范围和要求是不同的,为了实现不同阶数的曲线曲面的数据转换,必须对高次曲线曲面进行降阶变换处理.国内外很多学者对 Bézier 曲线/曲面、B - 样条曲线的降阶逼近做了大量的研究工作^[13-19].Watkins 和 Worsley 在 L_∞ 空间内利用 Tchebyshev 多项式的最小零偏差性质,通过把 Bernstein 基变为 Tchebyshev 基,降阶,再变为 Bernstein 基,得到高精度降阶逼近算法;Eck^[13]在 L_2 空间用约束 Legendre 多项式所给出的最小二乘逼近考虑了 Bézier 曲线的降阶逼近问题;Brunnett^[14]探讨了这种逼近的几何意义;Bogacki^[15]则通过基转换矩阵来进行 Bézier 曲线的降阶逼近;陈^[16]讨论了区间 Bézier 曲线的降阶逼近问题;胡^[17]利用扰动控制顶点和约束最小二乘方法来实现降阶;Chen^[18]通过预先确定部分降阶逼近曲线的控制顶点来满足端点所需保持的几何插值信息给出了 Bézier 曲线的保端点插值近似最佳一致降阶逼近算法和最佳最小二乘降阶逼近算法.Piegl^[19]先将 B 样条曲线分解成若干段 Bézier 曲线,然后对各段 Bézier 曲线进行降阶,最后删除多余节点的方法得到 B 样条曲线的降阶.

关于广义 Ball 曲线的降阶,文献[3]曾讨论了 Said-Ball 曲线与 Wang-Ball 曲线的降阶,文献[9]给出了 WSGB 曲线的升阶,但关于 WSGB 曲线的降阶问题鲜有文献涉及,本文将分别应用控制顶点扰动法及 Tchebyshev 多项式最佳一致逼近法这两类方法,给出了 WSGB 曲线的降阶算法.实验表明,用最佳一致逼近法效果显然比扰动法好,若利用扰动法得到的降阶曲线不能达到预期的误差,则可以先利用 WSGB 曲线的细分算法^[12]对曲线做细分,再逐段用扰动法降阶.而且在用扰动法对 $n(n \geq 3)$ 次 WSGB 曲线降阶时,所得曲线必定插值端点,而利用最佳一致逼近法则不一定,且运算量较大.WSGB 曲线的降阶算法的给出,丰富了广义 Ball 曲线的算法理论,提高了广义 Ball 曲线的工程应用价值.

定义^[9] 给定 R^2 或 R^3 中 $n+1$ 个控制点 $\{p_i\}, i=0,1,\dots,n$. 对于给定整数 $0 \leq L \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$, 称曲线

$$r(u; n, L) = \sum_{i=0}^n p_i \beta_i(u; n, L), 0 \leq u \leq 1 \quad (1)$$

为 n 次 WSGB 型曲线,其中

$$\beta_i(u; n, L) = \begin{cases} \binom{\lfloor n/2 \rfloor - L + i}{i} u^i v^{\lfloor n/2 \rfloor - L + 1}, & 0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - L - 1; \\ 2^{i - \lfloor n/2 \rfloor + L} \binom{2\lfloor n/2 \rfloor - 2L}{\lfloor n/2 \rfloor - L} u^i v^{i+2}, & \lfloor n/2 \rfloor - L \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1; \\ 2^L \binom{2\lfloor n/2 \rfloor - 2L}{\lfloor n/2 \rfloor - L} u^{\lfloor n/2 \rfloor} v^{\lceil n/2 \rceil}, & i = \lfloor n/2 \rfloor; \\ 2^L \binom{2\lfloor n/2 \rfloor - 2L}{\lfloor n/2 \rfloor - L} u^{\lceil n/2 \rceil} v^{\lfloor n/2 \rfloor}, & i = \lceil n/2 \rceil; \\ \beta_{n-i}(1-u; n, L), & \lceil n/2 \rceil + 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (2)$$

为定义在区间 $[0,1]$ 上的 WSGB 基函数, $u = 1 - v$, $\lfloor x \rfloor$ 表示小于或等于 x 的最大整数, $\lceil x \rceil$ 表示大于或等于 x 的最小整数.显然,当 $L = 0$ 时,曲线 $r(u; n, 0)$ 为 Said-Ball 曲线;当 $L = \lfloor n/2 \rfloor - 1$ 时,曲线 $r(u; n, \lfloor n/2 \rfloor - 1)$ 为 Wang-Ball 曲线;当 $1 \leq L \leq \lfloor n/2 \rfloor - 2$ 时,曲线 $r(u; n, L)$ 则位于两者之间.

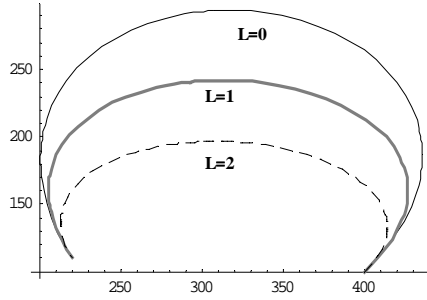


Fig.1 WSGB curve $r(u;7,L)$
图 1 WSGB 型曲线 $r(u;7,L)$

为讨论问题方便,首先介绍 Bernstein-Bézier 基函数 $B_i^n(u)$ 与 n 次 WSGB 基函数 $\{\beta_i(u;n,L)\}$ 及 Tchebyshev 多项式 $T_n(t) = \cos(n \arccos(t))$ 的转换公式.

引理 1. n 次 Bernstein-Bézier 基函数 $B_i^n(u)$ 可由 n 次 WSGB 基函数 $\{\beta_i(u;n,L)\}$ 表示^[12]:

$$\begin{cases} B_i^n(u) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} c_{i,j} \beta_j(u;n,L) + \sum_{j=0}^{\lceil n/2 \rceil - 1} c_{i,n-j} \beta_{n-j}(u;n,L), \\ B_{n-i}^n(u) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} c_{i,n-j} \beta_j(u;n,L) + \sum_{j=0}^{\lceil n/2 \rceil - 1} c_{i,j} \beta_{n-j}(u;n,L). \end{cases} \quad 0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor.$$

其中

$$c_{i,j} = \binom{n}{i} \hat{c}_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \binom{n}{i} \binom{\lfloor (n-1)/2 \rfloor + L - i}{j-i} \binom{\lfloor n/2 \rfloor - L + j}{j}^{-1}, & i \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor - L - 1, \\ 2^{\lfloor n/2 \rfloor - j - L} \binom{n}{i} \binom{2\lfloor n/2 \rfloor - 2L}{\lfloor n/2 \rfloor - L}^{-1} \left[\binom{2j-n}{j-i} - \sum_{s=\lfloor n/2 \rfloor - L - 1}^{j-2} 2^{j-2-s} \binom{2s-n+2}{s-i} \right], & \lfloor n/2 \rfloor - L \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor, j \geq i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$c_{i,n-j} = \binom{n}{i} \hat{c}_{i,j} = \begin{cases} -2^{\lfloor n/2 \rfloor - j - L} \binom{n}{i} \binom{2\lfloor n/2 \rfloor - 2L}{\lfloor n/2 \rfloor - L}^{-1} \sum_{s=\lfloor n/2 \rfloor - L - 1}^{j-2} 2^{j-2-s} \binom{2s-n+2}{s-i}, & \lfloor n/2 \rfloor - L + 1 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor, j \geq i + 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$c_{n-i,n-j} = c_{ij} \quad (0 \leq i, j \leq n).$$

引理 2. Bernstein 基函数与 Tchebyshev 基函数之间有下列关系式^[14]:

$$T_n(2t-1) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} \frac{\binom{2n}{2i}}{\binom{n}{i}} B_i^n(t) := \sum_{i=0}^n \alpha_i B_i^n(t)$$

1 WSGB 型曲线的降阶

下面讨论如何将 n 次的 WSGB 型曲线(1)降阶成 $n-1$ 次曲线

$$\hat{r}(u; n-1, L) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i \beta_i(u; n-1, L), 0 \leq u \leq 1 \tag{3}$$

的问题,具体用扰动法和最佳一致逼近法讨论 WSGB 曲线的降阶问题.

引理 3.^[9] n 次的 WSGB 型曲线(1)可精确降阶为 $n-1$ 次的 WSGB 型曲线,即如果

$$P_m = \begin{cases} p_{m+1}, n = 2m + 1; \\ \frac{p_{m-1} + p_{m+1}}{2}, n = 2m; \end{cases}$$

成立,则存在 \bar{p}_i 使得

$$r(u; n, L) = \sum_{i=0}^n p_i \beta_i(u; n, L) = r(u; n-1, L) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{p}_i \beta_i(u; n-1, L)$$

1) 当 $n=2m+1$ 时

$$r(u; 2m+1, L) = \sum_{i=0}^{2m+1} p_i \beta_i(u; 2m+1, L) = \sum_{i=0}^{2m} \bar{p}_i \beta_i(u; 2m, L)$$

其中 $\bar{p}_i = \begin{cases} p_i, 0 \leq i \leq m; \\ p_{i+1}, m+1 \leq i \leq 2m \end{cases}$

2) 当 $n=2m$ 时

$$r(u; 2m, L) = \sum_{i=0}^{2m} p_i \beta_i(u; 2m, L) = \sum_{i=0}^{2m-1} \bar{p}_i \beta_i(u; 2m-1, L)$$

其中 $\bar{p}_i = \begin{cases} \frac{(m-L+i)p_i - ip_{i-1}}{m-L}, 0 \leq i \leq m-1-L; \\ \frac{2(2m-1-2L)p_i - (m-1-L)(p_{m-L-2} + p_{m+L+2})}{2(m-L)}, m-L \leq i \leq m-1; \\ \frac{2(2m-1-2L)p_{i+1} - (m-1-L)(p_{m-L-2} + p_{m+L+2})}{2(m-L)}, m \leq i \leq m+L-1; \\ \frac{(3m-1-L-i)p_{i+1} - (2m-1-i)p_{i+2}}{m-L}, m+L \leq i \leq 2m-1; \end{cases}$

由定义可知, n 次 WSGB 曲线的 x^n 项系数为

$$lec(r) = \begin{cases} (-1)^m 2^L \binom{2m-2L}{m-L} (p_{m+1} - p_m), & n = 2m + 1 \\ (-1)^m 2^{L-1} \binom{2m-2L}{m-L} (2p_m - p_{m+1} - p_{m-1}), & n = 2m \end{cases} \tag{4}$$

则曲线 $r(u; n, L)$ 为 $r(u; n-1, L)$ 的充要条件为

$$\Delta p_m = 0, \quad n = 2m + 1; \quad \Delta^2 p_{m-1} = 0, \quad n = 2m.$$

1.1 扰动法

通过对曲线(1)的控制顶点适当的扰动,若添加扰动后的曲线退化为 $n-1$ 次 WSGB 曲线,即

$$\tilde{r}(u; n, L) = \sum_{i=0}^n (p_i + \varepsilon_i) \beta_i(u; n, L) = \hat{r}(u; n-1, L) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i \beta_i(u; n-1, L), 0 \leq u \leq 1$$

则该曲线即为曲线(1)的 $n-1$ 次逼近,由引理 3,且有关系式

当 $n=2m+1$ 时

$$q_i = \begin{cases} p_i + \varepsilon_i, & 0 \leq i \leq m; \\ p_{i+1} + \varepsilon_{i+1}, & m+1 \leq i \leq 2m \end{cases} \quad (5)$$

当 $n=2m$ 时

$$q_i = \begin{cases} \frac{(m-L+i)(p_i + \varepsilon_i) - i(p_{i-1} + \varepsilon_{i-1})}{m-L}, & 0 \leq i \leq m-1-L; \\ \frac{2(2m-1-2L)(p_i + \varepsilon_i) - (m-1-L)(p_{m-L-2} + \varepsilon_{m-L-2} + p_{m+L+2} + \varepsilon_{m+L+2})}{2(m-L)}, & m-L \leq i \leq m-1; \\ \frac{2(2m-1-2L)(p_{i+1} + \varepsilon_{i+1}) - (m-1-L)(p_{m-L-2} + \varepsilon_{m-L-2} + p_{m+L+2} + \varepsilon_{m+L+2})}{2(m-L)}, & m \leq i \leq m+L-1; \\ \frac{(3m-1-L-i)(p_{i+1} + \varepsilon_{i+1}) - (2m-1-i)(p_{i+2} + \varepsilon_{i+2})}{m-L}, & m+L \leq i \leq 2m-1; \end{cases} \quad (6)$$

因此,讨论 n 次 WSGB 曲线的降阶问题即为讨论适当的扰动 ε_i ,使得扰动后的 $n-1$ 次曲线与原曲线的误差最小,也即转化为求解优化问题:

$$\begin{cases} \text{Min} \sum_{i=0}^n \|\varepsilon_i\|^2 \\ \Delta p_m + \Delta \varepsilon_m = 0 \end{cases}, n=2m+1 \quad \text{或} \quad \begin{cases} \text{Min} \sum_{i=0}^n \|\varepsilon_i\|^2 \\ \Delta^2 p_{m-1} + \Delta^2 \varepsilon_{m-1} = 0 \end{cases}, n=2m.$$

而由约束优化法,易得

1) 当 $n=2m+1$ 时

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0, & i=0,1,\dots,m-1,m+2,\dots,2m \\ \frac{p_{m+1} - p_m}{2}, & i=m \\ \frac{p_m - p_{m+1}}{2}, & i=m+1 \end{cases} \quad (7)$$

代入式(5),得

$$q_i = \begin{cases} p_i, & 0 \leq i \leq m-1, \\ \frac{p_{m+1} + p_m}{2}, & i=m \\ p_{i+1}, & m+1 \leq i \leq 2m, \end{cases}$$

2) 当 $n=2m$ 时

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0, & i = 0, 1, \dots, m-2, m+2, \dots, 2m \\ \frac{1}{3}(p_{m+1} + p_{m-1} - 2p_m), & i = m \\ \frac{1}{6}(2p_m - p_{m+1} - p_{m-1}), & i = m \pm 1 \end{cases} \quad (8)$$

代入式(6)即可得到相应的 q_i , 特别地, 有

$$q_i = \begin{cases} \frac{m+i}{m}p_i - \frac{i}{m}p_{i-1}, & 0 \leq i \leq m-2, \\ \frac{2m-1}{m} \frac{5p_{m-1} + 2p_m - p_{m+1}}{6} - \frac{m-1}{m}p_{m-2}, & i = m-1, \\ \frac{2m-1}{m} \frac{5p_{m+1} + 2p_m - p_{m-1}}{6} - \frac{m-1}{m}p_{m+2}, & i = m \\ \frac{3m-i-1}{m}p_{i+1} - \frac{2m-i-1}{m}p_{i+2}, & m+1 \leq i \leq 2m-1, \end{cases} \quad (L=0)$$

$$q_i = \begin{cases} p_i, & 0 \leq i \leq m-2, \\ \frac{1}{6}(5p_{m-1} + 2p_m - p_{m+1}), & i = m-1, \\ \frac{1}{6}(5p_{m+1} + 2p_m - p_{m-1}), & i = m \\ p_{i+1}, & m+1 \leq i \leq 2m-1, \end{cases} \quad (L=m-1)$$

且由此可以看出, 当 $n \geq 3$ 时, 利用扰动法的 WSGB 曲线降阶是保两端点插值的.

1.2 最佳一致逼近法

为计算方便, 先将 $n-1$ 次 WSGB 曲线(3)升阶为 n 次曲线

$$\hat{r}(u; n-1, L) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i \beta_i(u; n-1, L) = \sum_{i=0}^n \hat{q}_i \beta_i(u; n, L),$$

根据 Tchebyshev 最佳逼近理论, 易得下述引理:

引理 4.^[14] 若 n 次多项式 $p(t)$ 可表示为

$$p(t) = \sum_{i=0}^n \bar{f}_i T_i(2t-1), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

则 $n-1$ 次多项式

$$q(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{f}_i T_i(2t-1), \quad 0 \leq t \leq 1$$

为 $p(t)$ 的最佳一致逼近, 其中 $T_n(t)$ 为 Tchebyshev 多项式 $T_n(t) = \cos(n \arccos(t))$.

定理 1. 由(3)定义的 $n-1$ 次 WSGB 曲线 $\hat{r}(u; n-1, L)$ 为由(1)定义的 n 次 WSGB 曲线 $r(u; n, L)$ 的最佳一致逼近, 其中

$$\hat{c}_j = p_j - \frac{lec(r)}{2^{2n-1}} \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} \binom{2n}{2i} \hat{c}_{ij}, \quad j=0, 1, \dots, n \quad (9)$$

且 \hat{c}_{ij} 满足引理 1, $lec(r)$ 由(4)定义.

证明:由引理 4,有

$$\hat{r}(u; n-1, L) = r(u; n, L) - lec(r) \frac{1}{2^{2n-1}} T_n(2u-1), \tag{10}$$

而由引理 1 与引理 2,

$$\begin{aligned} T_n(2u-1) &= \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} \binom{2n}{2i} \binom{n}{i}^{-1} B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} \binom{2n}{2i} \binom{n}{i}^{-1} \sum_{j=0}^n c_{ij} \beta_j(u; n, L) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} \binom{2n}{2i} \hat{c}_{ij} \beta_j(u; n, L), \end{aligned}$$

比较式(10)两边的同次幂系数,则可知式(9)成立,故定理得证.

2 误差

为刻画降阶曲线对原曲线的逼近程度,定义逼近误差与相对误差分别为

$$error = \|\hat{r}(u; n-1, L) - r(u; n, L)\|_{\infty}, \quad \bar{e} = error / \|r(u; n, L)\|_{\infty},$$

其中

$$\|r(u; n, L)\|_{\infty} = \max(\max_{0 \leq i \leq n} x_i - \min_{0 \leq i \leq n} x_i, \max_{0 \leq i \leq n} y_i - \min_{0 \leq i \leq n} y_i).$$

下面给出上述两种降阶法对应的误差计算.

定理 2. 扰动法与最佳一致逼近法所得降阶曲线 $\hat{r}(u; n-1, L)$ 与原曲线 $r(u; n, L)$ 的逼近误差为

1) 扰动法

$$error = \begin{cases} 2^{L-2m} \binom{2m-2L}{m-L} \|p_{m+1} - p_m\|_{\infty}, & n = 2m+1, \\ 2^{L-2m} \binom{2m-2L}{m-L} \|\Delta^2 p_{m-1}\|_{\infty}, & n = 2m, \end{cases} \tag{11}$$

2) 最佳一致逼近降阶法

$$error = \begin{cases} 2^{L-2n+1} \binom{2m-2L}{m-L} \|p_{m+1} - p_m\|_{\infty}, & n = 2m+1, \\ 2^{L-2n} \binom{2m-2L}{m-L} \|\Delta^2 p_{m-1}\|_{\infty}, & n = 2m. \end{cases} \tag{12}$$

证明: 只讨论 $n=2m+1$ 情形,对于 $n=2m$ 可以同理得到.

由扰动法及式(7),有

$$\begin{aligned} &\|\hat{r}(u; n-1, L) - r(u; n, L)\|_{\infty} \\ &= \|\varepsilon_m \beta_m(u; n, L) - \varepsilon_{m+1} \beta_{m+1}(u; n, L)\|_{\infty} \\ &\leq \frac{1}{2} \|p_{m+1} - p_m\|_{\infty} (\|\beta_m(u; n, L)\|_{\infty} + \|\beta_{m+1}(u; n, L)\|_{\infty}) \\ &= \frac{1}{2} \|p_{m+1} - p_m\|_{\infty} 2^L \binom{2m-2L}{m-L} (\|u^m(1-u)^{m+1}\|_{\infty} + \|u^m(1-u)^{m+1}\|_{\infty}) \end{aligned}$$

而 $u^m(1-u)^{m+1} \leq \frac{1}{4^m}$, 故有(11)成立. 而由(10),得最佳一致逼近降阶时误差为

$$\|\hat{r}(u; n-1, L) - r(u; n, L)\|_{\infty} = \left\| lec(r) \frac{1}{2^{2n-1}} T_n(2u-1) \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{2^{2n-1}} \|lec(r)\|_{\infty},$$

再由(4),即可得(12).故定理成立.

3 数值实例

如图所示,图 1 为 WSGB 曲线 $r(u;7,L)$,其控制顶点为 $\{(220, 110), (160, 220), (180, 340), (260, 400), (355, 425), (470, 320), (490, 200), (420, 100)\}$.图 2 为 $L=1$ 时相应的 WSGB 曲线的降阶曲线图,其中图 2.1 中降阶后曲线的控制顶点为 $\{(220, 110), (160, 220), (180, 340), (307.5, 412.5), (470, 320), (490, 200), (420, 100)\}$,图 2.2 中降阶后曲线的控制顶点为 $\{(219.861,109.963), (164.314,221.135), (150.313,332.188), (307.5,412.5), (499.688,327.813), (485.686,198.865), (420.139,100.037)\}$.图 3 为曲线 $r(u;6,L)$ 的降阶曲线图,其中曲线 $r(u;6,L)$ 的控制顶点为 $\{(220, 130), (160, 220), (220, 340), (300, 400), (370, 350), (420, 200), (400, 160)\}$,其中图 3.1 中降阶后曲线的控制顶点为 $\{(200,130), (440/3,250), (2365/9,4055/9), (3055/9,4325/9), (1280/3,640/3), (400,160)\}$,图 3.2 中降阶后曲线的控制顶点为 $\{(200.029,130.322), (139.077,254.849), (184.6,488.096), (409.6,503.096), (428.975,208.721), (400.029,160.322)\}$.且曲线 $r(u;7,1)$ 用扰动法与最佳一致逼近法的降阶误差分别为 17.813,0.139,相对误差分别为 $\bar{e}=0.0539, 0.0004$;曲线 $r(u;6,0)$ 用扰动法与最佳一致逼近法的降阶误差分别为 34.375,0.537,相对误差分别为 $\bar{e}=0.127, 0.002$,而 $r(u;6,1)$ 相应的误差分别为 20.625,0.322,相对误差分别为 $\bar{e}=0.0764, 0.0012$.图 2.1 和图 2.2 所示为曲线 $r(u;7,1)$ 的降阶,其中实线为原曲线(控制多边形),虚线为降阶后曲线(控制多边形);图 3.1 和图 3.2 所示为曲线 $r(u;6,L)$ 的降阶,其中实线为原曲线(控制多边形),虚线为降阶后曲线(控制多边形).

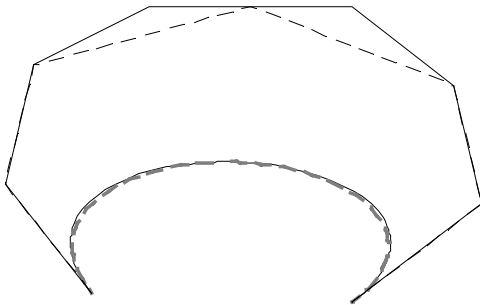


Fig.2.1 Degree reduction of $r(u;7,1)$ by perturbation

图 2.1 利用扰动法对曲线 $r(u;7,1)$ 的降阶

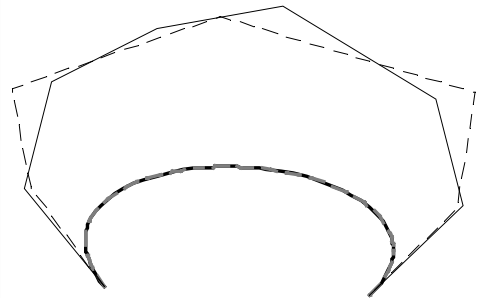


Fig.2.2 Degree reduction of $r(u;7,1)$ by uniform approximation

图 2.2 利用最佳一致逼近法对曲线 $r(u;7,1)$ 的降阶

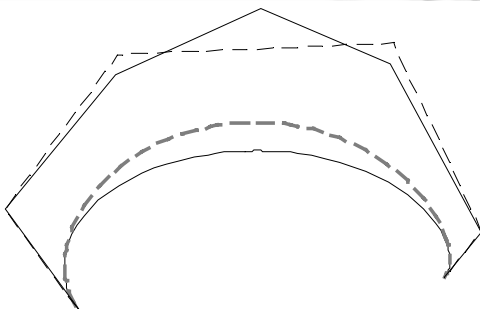


Fig.3.1 Degree reduction of $r(u;6,0)$ by perturbation

图 3.1 利用扰动法对曲线 $r(u;6,0)$ 的降阶

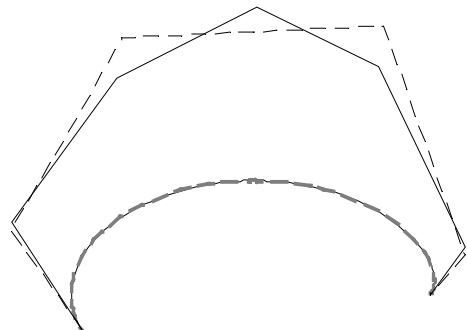


Fig.3.2 Degree reduction of $r(u;6,1)$ by uniform approximation

图 3.2 利用最佳一致逼近法对曲线 $r(u;6,1)$ 的降阶

4 结 论

本文主要利用扰动法及最佳一致逼近法讨论了 WSGB 曲线的降阶算法.实验表明,从逼近效果而言,用最佳一致逼近法效果显然比扰动法好,但若利用扰动法得到的降阶曲线不能达到预期的误差,则可以先利用 WSGB 曲线的细分算法^[12]对曲线做细分,再逐段用扰动法降阶;从端点插值的要求而言,在用扰动法对 $n(n \geq 3)$ 次 WSGB 曲线降阶时,所得曲线必定插值端点,而利用最佳一致逼近法则不一定;从计算时间上而言,用扰动法耗时较少.

致谢 在此,我们向对本文的工作给予支持和建议的老师表示感谢.

References:

- [1] Wang GJ, Wang GZ, Zheng JM. Computer Aided Geometric Design. Beijing: China Higher Education Press; Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. 99–112 (in Chinese).
- [2] Wang GJ. Ball curve of high degree and its geometric properties. Appl. Math. A Journal of Chinese Universities (Series A), 1987,2(1): 126–140 (in Chinese with English abstract).
- [3] Said HB. Generalized ball curve and its recursive algorithm. ACM Trans. on Graph, 1989,8(4):360–371.
- [4] Goodman TNT, Said HB. Shape-Preserving properties of the generalized Ball basis. Computer Aided Geometric Design, 1991,8(2):115–121.
- [5] Goodman TNT, Said HB. Properties of the generalized Ball curves and surfaces. Computer Aided Design, 1991,23 (8):554–560.
- [6] Hu SM, Wang GZ, Jin TG. Properties of two types of generalized Ball curves. Computer Aided Design, 1996,28(2):125–133.
- [7] Othman W, Goldman RN. The dual basis functions for the generalized Ball basis of odd degree. Computer Aided Geometric Design, 1997,14(5):571–582.
- [8] Huynh NP, Nattawit D. Efficient algorithms for Bézier curves. Computer Aided Geometric Design, 2000,17(3):247–250.
- [9] Wu HY. Unifying representation of Bézier curve and generalized Ball curves. Appl. Math. Journal of Chinese Univ. Ser. B, 2000, 15(1):109–121.
- [10] Wu HY. Two new types of generalized Ball curves. Acta Mathematica Applicatae Sinica, 2000,23(2):196–205 (in Chinese with English abstract).
- [11] Jiang P, Wu HY. Dual basis function for Wang-Ball basis and its application. Journal of Computer Aided Design and Computer Graphics, 2004,16(4):454–458 (in Chinese with English abstract).
- [12] Jiang P, Wu HY, Tan JQ. The dual functionals for the generalized Ball basis of Wang-Said type and basis transformation formulas. Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2006,15(3):248–256.
- [13] Eck M. Least squares degree reduction of Bézier curves. Computer Aided Design, 1995,27(11):845–853.
- [14] Brunnett G, Schreiber T, Braun J. The geometry of optimal degree reduction of Bézier curves. Computer Aided Geometric Design, 1996,13(8):773–788.
- [15] Bogacki P, Weinstein SE, Xu Y. Degree reduction of Bézier curves by uniform approximation with endpoint interpolation. Computer Aided Design, 1995,27(9):651–661.
- [16] Chen FL, Lou WP. Degree reduction of interval Bézier curves. Computer Aided Design, 2000,32(8):571–582.
- [17] Hu SM, Sun JG, Jin TG. Approximate degree reduction of Bézier curves. Tsinghua Science and Technology, 1998,3(2):997–1000.
- [18] Chen GD, Wang GJ. Optimal multi-degree reduction of Bézier curves with constraints of endpoints continuity. Computer Aided Geometric Design, 2002,19(6):365–377.
- [19] Piegl L, Tiller W. Algorithm for degree reduction of B-spline curves. Computer Aided Design, 1995,27(2):101–110.

附中文参考文献:

- [1] 王国瑾,汪国昭,郑建民.计算机辅助几何设计.北京:高等教育出版社,斯普林格出版社,2001.99–112.
- [2] 王国瑾.高次 Ball 曲线及其几何性质.高校应用数学学报(A 辑),1987,2(1):126–140.

- [10] 邬弘毅. 两类新的广义 Ball 曲线. 应用数学学报, 2000, 23(2): 196-205.
- [11] 江平, 邬弘毅. Wang-Ball 基函数的对偶基及其应用. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(4): 454-458.



江平(1972 -),女,安徽枞阳人,博士,副教授,主要研究领域为计算机辅助几何设计.



檀结庆(1962 -),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为非线性数值逼近理论,计算机辅助几何设计.

www.jos.org.cn

www.jos.org.cn