

## 梯度矢量流 Snake 模型临界点剖析\*

王元全<sup>+</sup>, 贾云得

(北京理工大学 计算机科学技术系, 北京 100081)

### Analysis of the Critical Point of the Gradient Vector Flow Snake Model

WANG Yuan-Quan<sup>+</sup>, JIA Yun-De

(Department of Computer Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-10-86343158, E-mail: wang\_yuanquan@yahoo.com.cn

**Wang YQ, Jia YD. Analysis of the critical point of the gradient vector flow snake model. *Journal of Software*, 2006,17(9):1915–1921.** <http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/1915.htm>

**Abstract:** Gradient vector flow (GVF) snake shows high performance at capture-range enlarging and boundary concavity convergence, however, the initial contours encounter a so-called critical point problem (CPP). The initial contour must contain the critical points inside the object and exclude those outside the object, otherwise, the final result would be far from the expected. This paper investigates the CPP of the GVF snake and points out that, serving as an external force field for snake models, gradient vector flow could be effective only under some restrictions. Also, it is proved that the theoretical foundation, the Navier-Stokes equation for viscous fluid flow, for the solution to this CPP in literatures is incorrect. Finally, an empirical solution to the CPP is presented and its performance is validated by experiments.

**Key words:** GVF (gradient vector flow) snake; critical point; image segmentation; Navier-Stokes equation; viscous fluid flow

**摘要:** 作为经典 Snake 模型的一个变体,梯度矢量流(gradient vector flow,简称 GVF)Snake 在扩大 Snake 轮廓的捕捉范围和深度凹陷区域的收敛上具有卓越的性能.但 GVF Snake 在初始化时存在一个临界点问题:在目标内部的临界点必须在初始 Snake 轮廓的内部;在目标外部的临界点必须在 Snake 轮廓的外部.否则,Snake 轮廓将不能收敛到正确的结果.对 GVF Snake 的临界点问题进行探讨,详细分析了临界点的影响因素,指出 GVF 场只有在合适的条件下才是有效的;证明了相关文献中从粘性流体力学的 Navier-Stokes 方程来解决临界点问题的理论基础是不对的;还给出了临界点问题的一个简单、有效的解决方案,并用实验证明了其有效性.

**关键词:** GVF(gradient vector flow,简称 GVF) Snake;临界点;图像分割;Navier-Stokes 方程;粘性流体力学

中图分类号: TP391 文献标识码: A

图像分割作为图像分析的重要内容之一,是目标重建、识别等问题的基础,其目的是要将图像划分为一些有意义的互不重叠的区域,但由于杂质、噪声等的干扰,使得经典的图像分割方法如边缘检测、阈值等往往得

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60543007 (国家自然科学基金)

Received 2005-03-07; Accepted 2005-08-25

不到一个理想的结果,这也使得图像分割成为一个经典的难题.

近年来,主动轮廓模型(包括参量主动轮廓模型<sup>[1]</sup>和几何主动轮廓模型<sup>[2]</sup>)成为图像分析领域的一个研究热点.参量主动轮廓模型,即 Snake 模型,是一种能量曲线,通过极小化如下的能量泛函来确定目标轮廓

$$E(c) = \int_0^1 \frac{1}{2} [\alpha(s) |c'(s)|^2 + \beta(s) |c''(s)|^2] + E_{ext}(c) ds \quad (1)$$

其中,前两项刻画曲线的性质;第 3 项则由图像梯度来构造,吸引曲线朝目标运动.它将目标轮廓的初始估计、曲线性质、图像信息和先验知识融于一个统一的过程中;另一方面,它在分割目标边缘的过程中寻找能量泛函的局部极小点,而非全局最小点.但它具有如下不足:弱边界泄漏;初始轮廓要离真实的目标较近;不易收敛到目标的深度凹陷区域;拓扑不可变等.国内外对 Snake 模型有广泛的研究,如 Wang 在分割心脏核磁共振图像左心室外轮廓时提出了预测-校正两步形变的方法<sup>[3]</sup>,该方法改变了约束引入的方式;Li 在用 Snake 模型跟踪运动目标时,将其外力用块运动矢量加权<sup>[4]</sup>;Park 则整合了梯度方向信息并提出了方向 Snake 模型<sup>[5]</sup>;而 Xu 等人提出的梯度矢量流(gradient vector flow,简称 GVF)<sup>[6]</sup>和广义梯度矢量流(generalized GVF,简称 GGVF)Snake 模型<sup>[7]</sup>在改善 Snake 轮廓的捕捉范围和深度凹陷区域的分割上具有卓越的性能.对 GVF 和 GGVF,国内外也有广泛的研究.如 Zhou 在 GGVF 的计算中,将边缘图用模糊算子增强,并把其结果叫做广义模糊梯度矢量流(generalized fuzzy gradient vector flow,简称 FGGVF)<sup>[8]</sup>;Tang 在跟踪血管边缘时,在多尺度下计算 GVF<sup>[9]</sup>;Paragois 则在几何主动轮廓模型(geometric active contour,简称 GAC)中整合 GVF<sup>[10]</sup>,加快了 GAC 的速度,提高了其鲁棒性.但在 GVF Snake 中,Snake 轮廓在初始化时将会遇到一个问题,本文称其为临界点问题(critical point problem,简称 CPP):在目标内部的临界点必须包含在初始 Snake 轮廓的内部;在目标外部的临界点必须在 Snake 轮廓的外部.否则,Snake 轮廓将不能收敛到正确的结果.以上提到的工作中都没有谈到这个问题,只有文献[11]指出了这一现象,并试图从粘性流体力学的 Navier-Stokes(N-S)方程来阐述 GVF 的机理,由此给出一个解决方案.

本文探讨 GVF Snake 模型的临界点问题,指出这些临界点依赖于边缘检测的效果和目标形状、平滑参数  $\mu$  和  $|\nabla f|^2$  的相对大小、方程求解的迭代次数等,并分析了相互之间的影响关系;同时,我们指出证明文献[12]中所给解决方案的理论基础是错误的,即 GVF 并不是 N-S 方程所代表的流动.我们还将对 GVF Snake 的临界点问题给出一个简单的解决方案.

## 1 GVF Snake 模型的临界点分析

对于式(1)定义的能量泛函,由变分法的原理出发,可以将其转化为 Euler 方程:

$$\alpha c'(s) - \beta c''(s) - \nabla E_{ext} = 0 \quad (2)$$

这是该能量泛函取极小值的必要条件.Xu 等人将式(2)看成一个内外力的平衡方程

$$F_{int} + F_{ext} = 0 \quad (3)$$

其中,  $F_{int} = \alpha c'(s) - \beta c''(s)$ ,  $F_{ext} = -\nabla E_{ext}$ .以此为出发点,Xu 等人提出了一种新的外力场,即梯度矢量流(GVF)外力场,来代替传统的图像梯度外力场.它通过极小化如下能量泛函得到

$$\varepsilon = \iint \mu |\nabla \vec{v}|^2 + |\nabla f|^2 |\vec{v} - \nabla f|^2 dx dy \quad (4)$$

其中,  $\vec{v} = [u(x, y), v(x, y)]$  就是梯度矢量场; $f$  是图像的边缘,可以由其他边缘检测算子得到或者用图像梯度来近似.由变分法得到的 Euler 方程的解就成为式(4)取极小值的必要条件,其相应的 Euler 方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \nabla^2 u - (u - f_x)(f_x^2 + f_y^2) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \nabla^2 v - (v - f_y)(f_x^2 + f_y^2) \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $\nabla^2$  是 Laplace 算子.Xu 等人将它解释为一个广义的扩散方程<sup>[6]</sup>,它将  $\nabla f$  向外延拓:当  $|\nabla f|$  很小时,式(4)中的平滑项(第 1 项)起主导作用,它将产生一个缓慢变化的场;当  $|\nabla f|$  较大时,式(4)中的梯度项(第 2 项)起主导作用,文献[6]认为:这时  $\vec{v} = \nabla f$  将会使式(4)达到极小.当  $\mu=0$  时,就退化为经典的图像梯度外力场情况;当  $\mu$  逐渐增大时,平滑作用逐渐增大,使得 GVF 场的作用范围也逐渐扩大,平滑项也在一定程度上消除了噪声的影响.Xu 等人在随

后的研究论文中指出<sup>[7]</sup>:在靠近边缘的地方,即 $|\nabla f|$ 较大的地方,常数 $\mu$ 对 $\nabla f$ 的平滑过大,以至于 Snake 轮廓不能进入狭长的凹陷区域,因而提出了广义 GVF 模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla f|)\nabla^2 u - h(|\nabla f|)(u - f_x) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = g(|\nabla f|)\nabla^2 v - h(|\nabla f|)(v - f_y) \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $g(|\nabla f|) = \exp(-|\nabla f|/k)$ ,  $h(|\nabla f|) = 1 - g(|\nabla f|)$ . 参数  $k$  的作用与  $\mu$  类似,但由于  $g(\cdot)$  中考虑了  $|\nabla f|$  的影响,使得  $g(\cdot)$  是自适应的,并且  $g(\cdot)$  和  $h(\cdot)$  是一个此消彼长的关系.因此在边缘附近, $g(\cdot)$  将会很小,而  $h(\cdot)$  将会较大.

无论是 GVF 还是 GGVF,都会将  $\nabla f$  由  $|\nabla f|$  大的地方向  $|\nabla f|$  小的地方扩散,因而扩大了 Snake 模型的捕捉范围,也能较好地进入深度凹陷区域.但我们在大量实验过程中发现:在 GVF(包括 GGVF)场中存在某些点,这些点对 Snake 轮廓的初始化具有重要的影响:当这些点在目标内部时,初始 Snake 轮廓必须包含这些点;而当该点在目标外部时,初始 Snake 轮廓必须不包含这些点,否则将不能收敛到正确的结果.这就是 GVF Snake 在初始化时遇到的问题.本文把它叫做临界点问题.这些临界点可以看成是 GVF 场的源,如图 1(a)中箭头所指,图的正中心就是临界点. Xu 等人在分割这一目标时,给出了两个看似任意的初始轮廓(如图 1(b)、图 1(c)所示<sup>[6]</sup>),其实他们都将这个临界点包含在其内部.

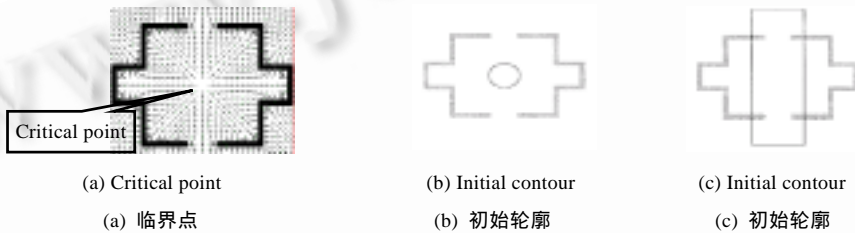


Fig.1 Critical points and its effect on initial contour  
图 1 临界点及对初始化的影响

临界点的存在对 GVF Snake 的初始化提出了新的要求:当 GVF 场中包含多个临界点时,要根据分割的目标给出一个恰当的初始轮廓.因而在临界点分布较复杂的情况下,GVF Snake 不仅不能改善轮廓的初始化,反而对初始轮廓提出了更高的要求.我们通过在合成图像和实际图像上的大量实验发现,临界点的分布与以下几个因素相关:

(1) 与  $\nabla f$  的分布相关,即与目标的形状和边缘检测的效果相关.当图像为黑白图像时, $\nabla f$  描述了目标的形状;而当图像为灰度图像时, $\nabla f$  实际代表了边缘检测的结果.图像由于受噪声的污染, $\nabla f$  的分布也会显得凌乱.在通过极小化式(4)中的能量泛函将  $\nabla f$  向外延拓时, $\nabla f$  中由于噪声而产生的局部极值将会生成额外的临界点.因此,在灰度图像中,要想得到一个理想的 GVF 场,图像中目标区域要求比较均匀.我们用以下两幅图像来说明( $\mu=0.2$ , 迭代 200 次,时间步长为 0.5),图 2(a)是一幅包含一个矩形和一个圆的黑白图像,在矩形中间包含一条线段,线段上的点都是临界点;在圆中,只有圆心才是临界点;而在矩形和圆之间的曲线也是临界点,初始 Snake 轮廓必须不包含这条曲线上的点.另一个例子是一幅心脏 MR 图像,图像灰度不均,为了减少噪声的影响,我们对原始图像作高斯平滑,其标准差为  $\sigma$ .图 2(b)是原始的心脏图像,以分割左心室内轮廓为目标,图 2(c)给出了  $\sigma=1$  时的 GVF 场,图 2(d)给出了  $\sigma=2.5$  时的 GVF 场(这时  $\mu$  和  $\sigma$  的取值与文献[6]一样,而时间步长和迭代次数在文献[6]中没有给出),图中白色的圆圈即为临界点.对比这两个结果,当  $\sigma$  值更大,即  $\nabla f$  的效果更好时,GVF 场更规则.

(2) 与平滑系数  $\mu$  (GGVF 中的  $K$ ) 的大小相关.为了说明这一问题,取  $\mu=0.45$ ,其他条件与图 2(c)相同(CFL 条件仍然满足).这时的结果显然更加平滑(如图 3(a)所示),临界点减少.增大  $\mu$  值也就加大平滑作用,但  $\mu$  的平滑作用与高斯平滑的作用是不一样的,对比图 3(a)和图 2(d)的结果不难发现,图 3(a)中目标的结构部分被抹平(图中的白色框所示).这也说明,对于灰度不均的图像,GVF 的性能将会受到影响:要么只能得到一个不十分理想的 GVF 场;要么目标的结构可能抹平.一般来说,选择较大尺度的高斯平滑和较小的  $\mu$  值能得到相对好的结果.

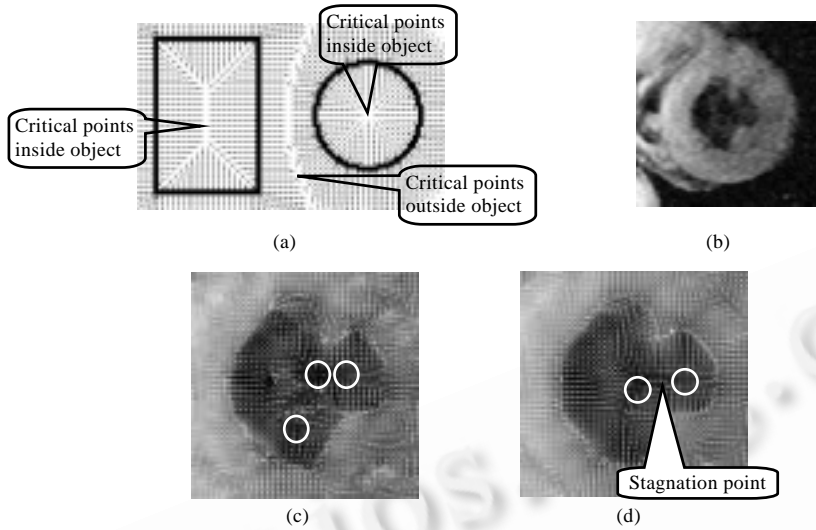


Fig.2 Effect of  $\nabla f$  on critical points

图 2  $\nabla f$  对临界点的影响

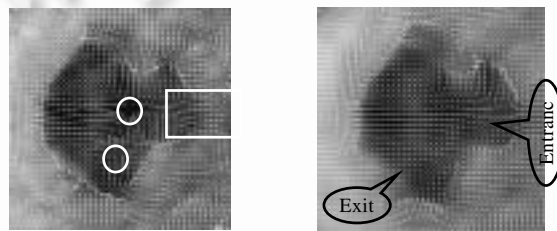


Fig.3 Effect of smoothing parameter and iteration number on critical points

图 3 平滑系数和迭代次数对临界点的影响

(3) 与求解方程(5)(或者式(6))迭代的次数相关.以图 2(d)中的结果为例,将迭代次数增加到 1 万次,这时的 GVF 场已经面目全非,如图 3(b)所示,GVF 向量场从右边流入,从左下角流出.这样的结果作为 Snake 模型的外力场,无论初始轮廓如何,都得不到理想的结果.进一步增加迭代次数至 2 万次时,所得结果几乎不变,这表明图 3(b)的结果是方程(5)的最后收敛解.这也说明,尽管文献[6]中要求采用最后收敛解,但文献[6]并没有采用最后收敛解,而且,我们也不需要最后的收敛解,我们需要的只是一个中间结果.顺便提一句,时间步长也会给 GVF 场的结构带来影响,但增大时间步长只是加快了收敛过程.

因此,要想得到一个理想的 GVF 场,待分割的区域要比较均匀,还要选取适当的平滑参数和迭代次数.同时,在初始化时还要有适当的机制来避免临界点.

## 2 Navier-Stokes 方程及 GVF 的机理

在上一节中,我们通过大量的实验分析了 GVF 场的影响因素,但未能够从理论上给出解释.文献[11]对这一问题作了探讨,对粘性流体力学的 Navier-Stoke 方程进行了简化,认为 GVF 场是一个不可压缩层流模型,由此给出一个解决方案,并用层流的性质证明其方案是正确的.不可压缩粘性流的 Navier-Stoke 方程为<sup>[12,13]</sup>

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vv_y = \mu \nabla^2 u - P_x \\ v_t + uv_x + vv_y = \mu \nabla^2 v - P_y \end{cases} \quad (7)$$

这是不可压缩粘性流体的动量方程,其中,  $\vec{v} = [u, v]$  为流体的流速;  $P$  为流场的压力;  $\mu$  为粘性系数.当雷诺数很小时,上述方程可以简化为<sup>[13]</sup>

$$\begin{cases} u_t = \mu \nabla^2 u - P_x \\ v_t = \mu \nabla^2 v - P_y \end{cases} \quad (8)$$

这是不可压缩粘性层流的动量方程.通过对比式(8)和式(5),文献[11]令

$$\begin{cases} P_x = u - f_x \\ P_y = v - f_y \end{cases} \quad (9)$$

将方程(8)和方程(5)统一起来,给出一种解决方案,并利用式(8)所代表的流动性质来证明其方案是正确的.

我们认为这种做法是错误的,因为流体在流动过程中不仅满足动量方程(动量守恒),而且还满足如下连续性方程(质量守恒):

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (10)$$

其中, $\rho$ 为密度.对于不可压缩流,密度为常数,因此,

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (11)$$

即

$$u_x + v_y = 0 \quad (12)$$

对于不可压缩层流有<sup>[13]</sup>

$$\nabla^2 P = 0 \quad (13)$$

结合式(11)、式(13),在式(9)两边取散度得

$$\nabla^2 f = 0 \quad (14)$$

这意味着  $f$  是一个调和函数.但式(5)中的  $f$  是边缘图,往往不是调和的.同时,采用实验手段很容易验证 GVF 场  $\vec{v} = [u, v]$  并不满足式(12)(事实上,由于  $\vec{v}$  与迭代次数有关,即  $\vec{v} = \vec{v}(t) = [u(t), v(t)]$ ,满足式(12)意味着对一定范围内所有的  $t, u_x + v_y = 0$ ).也就是说,GVF 矢量场并不能由方程(8)所代表的流动来描述.因此,以式(8)所代表的流动的性质来解决式(5)中的问题是不合理的.正如文献[13]所指出的,我们并不能按任意指定的速度场来构造一个流动.

事实上,GVF 场和流体的流动有重大区别,对于不可压缩流体,在流动过程中必须同时满足方程(7)和式(11).也就是说,流体流动过程中的速度分量  $u, v$  是耦合的,而式(5)中的  $u, v$  则是独立的,因为式(4)中的泛函本质上可以写成如下两个独立的泛函:

$$\varepsilon_1 = \iint \mu |\nabla u|^2 + |\nabla f|^2 |u - f_x|^2 \, dx dy \quad (15.1)$$

$$\varepsilon_2 = \iint \mu |\nabla v|^2 + |\nabla f|^2 |v - f_y|^2 \, dx dy \quad (15.2)$$

通过极小化  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  分别得到  $u$  和  $v$ .文献[6]认为,当  $|\nabla f|$  较大时,  $\vec{v} = \nabla f$  将会使式(4)达到极小.事实上,只有当  $\mu \ll |\nabla f|^2$  时才会成立,而当  $\mu \ll |\nabla f|^2$  时却起不到平滑作用.另外,通过变分法得到的方程(5)也只是式(4)取极小值的必要条件,这些原因使得 GVF 的形成机理非常复杂.

### 3 GVF Snake 临界点问题的解决方案

GVF 作为 Snake 模型的外力,性能卓越,但临界点的存在对 Snake 轮廓的初始化形成了新的干扰.从所给出的实验结果来看,应该说文献[11]的方法是可行的,但不能从理论上证明其有效性.这里我们给出一种经实验证明有效的方法,该方法直接找到目标内部的临界点,然后在其周围给出初始轮廓.

对于目标内部的临界点,其八邻域中点的 GVF 矢量都不指向该点.对于点  $p$  和其八邻域中的点  $q, \vec{qp}$  为由  $q$  指向  $p$  的单位矢量,  $\vec{v}_q$  是  $q$  处的 GVF 矢量,则临界点按如下方法计算,

$$\vec{v}_q \cdot \vec{qp} \leq 0 \quad (16)$$

受目标形状的影响,在均匀区域中可能存在多个临界点.两个相邻的不连通临界点之间存在一个类似于层流中的滞止点(如图 2(d)所示).从这两个临界点发出的 GVF 矢量要么在滞止点终止,要么在目标的边缘终止.

基于这样的观察,我们这样解决临界点问题:

- 1) 先对目标所在区域作一个估计;
- 2) 根据式(16)找到该区域中的所有临界点;
- 3) 在这些临界点周围给出一个初始轮廓,这个 Snake 轮廓将在 GVF 外力的作用下向目标边缘靠近,最后分割出目标轮廓.

为了说明临界点对初始轮廓的影响,我们首先在合成图像上进行了实验,如图 4(a)所示.由于初始轮廓没有包含目标内的临界点,最后的结果都没有分割出目标.在图 4(b)中,我们首先找到了目标中的临界点,然后自动给出一个初始轮廓,由于这些临界点都包含在初始轮廓中,最后的分割结果较为理想.在图 4(c)中,我们对图 2(b)中的左心室图像进行分割,这个实验也展示了自动寻找临界点,然后给出初始轮廓,最后得到了一个理想的分割结果.在这几个实验中,我们分别给出了初始轮廓、中间结果和最后的结果.

最后,我们在一套心脏 MR 图像上实验了这种通过寻找临界点然后自动给出初始轮廓的方法.对于每一个图像层,在一个心动周期中采样 21 帧图像.我们只需要对第 1 帧图像判断左心室所在的区域,然后寻找临界点并给出初始轮廓,而对于后续的图像,我们以前一帧图像的分割结果作为参照区域.图 4(d)给出了一个图像层上的分割结果,对每一帧图像都给出了初始轮廓和最后的分割结果.由于排除了临界点的影响,最后的分割结果是比较理想的.

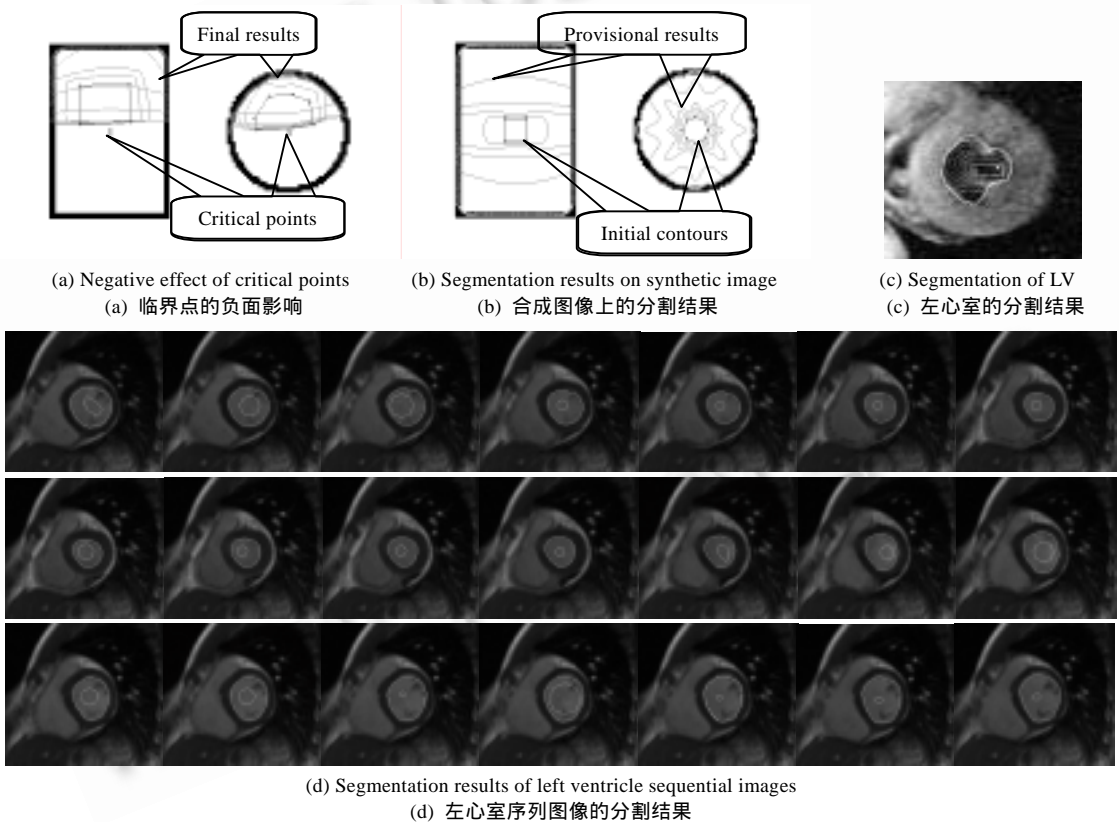


Fig.4 Segmentation results

图 4 分割结果

### 4 结 论

作为 Snake 模型的一种外力,GVF 在扩大其捕捉范围和深度凹陷区域的收敛上具有卓越的性能,但其中所包含的问题被广大研究人员所忽视.本文探讨 GVF 的临界点问题,在大量实验的基础上指出:临界点受如下 3 个因素的影响:边缘检测的效果、平滑系数和迭代次数.这对生成理想的 GVF 场具有重要的指导意义;证明了文

献[11]中试图从粘性流体力学的角度来解决 GVF 临界点问题的理论基础是错误的;澄清了一个事实,即文献[6]中并没有使用方程(5)的收敛解,我们也不需要最终的收敛解,而只是一个中间结果.本文还对临界点问题给出了一个简单的解决方案,实验结果表明,这种方案是有效的.GVF 的机理非常复杂,至今没有文献能够给出一个完美的解释.进一步探讨 GVF 的机理是我们正在深入研究的问题.

致谢 衷心感谢香港中文大学计算机科学与工程系王平安教授为我们提供了多套心脏 MR 图像.

#### References:

- [1] Kass M, Witkin A, Terzopoulos D. Snake: Active contour models. *Int'l J. Computer Vision*, 1988,1(4):321–331.
- [2] Siddiqui K, Lauriere YB, Tannenbaum A, Zucker, SW. Area and length minimizing flows for shape segmentation. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1998,7(3):433–443.
- [3] Wang YQ, Tang M, Heng PA, Xia DS, Wang PA. A new two-step-deformation snake with application to LV epicardium segmentation of cardiac MR images. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2004,17(1):46–51 (in Chinese with English abstract).
- [4] Li J, Zhou JL, Yu SS, Chen JZ, He XC. Sequential image segmentation using block-motion weighted snakes model. *Journal of Computer Research and Development*, 2003,40(2):277–282 (in Chinese with English abstract).
- [5] Park HW, Schoepflin T, Kim Y. Active contour model with gradient directional information: Directional snake. *IEEE Trans. on Circuits and Systems for Video Technology*, 2001,11(2):252–256.
- [6] Xu C, Prince JL. Snakes, shapes and gradient vector flow. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1998,7(3):359–369.
- [7] Xu C, Prince JL. Generalized gradient vector flow external forces for active contours. *Signal Processing*, 1998,71(2):131–139.
- [8] Zhou SJ, Liang B, Chen WF. A new approach to the motion estimation of cardiac image sequences: Active contours motion tracking based on the generalized fuzzy gradient vector flow. *Chinese Journal of Computers*, 2003,26(11):1470–1478 (in Chinese with English abstract).
- [9] Tang JH, Acton ST. Vessel boundary tracking for intravital microscopy via multiscale gradient vector flow snakes. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, 2004,51(2):316–324.
- [10] Paragios N, Mellina-Gottardo O, Ramesh V. Gradient vector flow fast geometric active contours. *IEEE Trans. on PAMI*, 2004,26(3): 402–407.
- [11] Ray N, Acton ST, Altes T, de Lange EE, Brookeman JR. Merging parametric active contours within homogeneous image regions for MRI-based lung segmentation. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 2003,22(2):189–199.
- [12] Wang YQ. Numerical simulation of fluid flow using adaptive triangular mesh [MS. Thesis]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 1998 (in Chinese with English abstract).
- [13] White FM. *Fluid Mechanics*. 5th ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.

#### 附中文参考文献:

- [3] 王元全,王平安,夏德深,王平安.基于预测-校正改进 Snake 的心脏 MR 图像左心室外轮廓分割.模式识别与人工智能,2004,17(1): 46–51.
- [4] 李军,周敬利,余胜生,陈加忠,何小诚.基于块运动矢量加权的 Snakes 模型及在序列图像分割中的应用.计算机研究与发展,2003, 40(2):277–282.
- [8] 周寿军,梁斌,陈武凡.心脏序列图像运动估计新方法:基于广义模糊梯度矢量流的形变曲线运动估计与跟踪.计算机学报, 2003,26(11):1470–1478.
- [12] 王元全.应用三角形自适应网格的流场数值模拟[硕士学位论文].南京:南京理工大学,1998.



王元全(1973 - ),男,湖南岳阳人,博士,主要研究领域为医学图像分析,核医学.



贾云得(1962 - ),男,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为人工智能,计算机视觉,媒体计算,医学图像分析.