ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.17, No.4, April 2006, pp.713−719
DOI: 10.1360/jos170713

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

子共代数与共同余共关系*

周晓聪+， 舒忠梅

(中山大学 计算机科学系,广东 广州 510275)

Subcoalgebras and Cocongruence Corelations

ZHOU Xiao-Cong+， SHU Zhong-Mei

(Department of Computer Science, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-20-84034709, E-mail: isszxc@mail.sysu.edu.cn, http://www.cs.sysu.edu.cn/xczhou/zxc.htm

Zhou XC, Shu ZM. Subcoalgebras and cocongruence corelations. *Journal of Software*, 2006,17(4):713−719. http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/713.htm

Abstract: The study of coalgebraic methods, as one of the active areas for theoretical computer science in recent years, is widely used in concurrence computing model, automat theory, and the foundations of object-oriented technology. Through using category theory, this paper investigates the properties of subcoalgebras, especially, the properties of subcoalgebras on Set, the category of sets and functions. This paper shows that all the subcoalgebras on Set are regular. Furthermore, using the correspondence between the cocongruence corelations and the subcoalgebras on Set, a way to construct the co-generated subcoalgebra is given in this paper.
Key words: coalgebra; subcoalgebra; corelation; category theory

摘 要: 共代数方法是近几年来理论计算机科学的研究热点之一,在并行计算模型、自动机及面向对象技术的理论基础方面有着广泛的应用.以范畴理论为工具讨论子共代数的性质,特别是集合范畴上的子共代数的性质,证明了集合范畴上的子共代数都是正则子共代数.进一步利用共同余共关系与子共代数之间的对应,给出了集合范畴上共生成子共代数的一种构造方式.
关键词: 共代数;子共代数;共关系;范畴理论
中图法分类号: TP301 文献标识码: A

代数方法已经在抽象数据类型、程序设计语言的形式语义等计算机科学领域有了深入研究与广泛应用,而共代数方法则是近 10 年来才逐渐引起计算机科学工作者的注意与研究.然而,自 Aczel[1],Rutton[2],Jacob[3]等人的开创性工作以来,共代数方法在自动机理论、并发程序的语义、面向对象程序的规范等计算机科学领域有了广泛的应用,而人们对共代数方法的范畴论基础、共代数逻辑等方面的研究也日益深入.我们在文献[4]中对共代数方法的范畴论基础、共代数逻辑及共代数方法的应用研究等方面进行了综述.

由于计算机科学中的共代数方法研究只有近 10 年的历史,因此,有关共代数方法本身的一些理论基础问题仍需深入研究.例如,互模拟(bisimulation)这一概念最初在进程代数中提出,在共代数方法中得到了进一步的抽

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60403013 (国家自然科学基金); the Natural Science Foundation of Guangdong Province of China under Grant No.031542 (广东省自然科学基金)

Received 2005-03-01; Accepted 2005-10-10

象与推广,已成为共代数方法的核心概念之一,但目前许多结果都是针对集合范畴而言的[2,5,6],如何将其很好地推广到一般范畴仍是一个值得探讨的理论问题[7−10].

子共代数与互模拟、积共代数之间存在着十分密切的关系[6,11,12],有关子共代数的并、交、生成子共代数及共生成子共代数等性质是许多学者所关注的问题[13,14].对这些问题的深入研究有助于共代数方法在计算机学科的各个领域更好地应用.

在对共代数方法的研究中我们发现:基于关系(relation)理论的互模拟在共代数理论中应用广泛,但共关系(corelation)理论仍未引起人们的太多注意.目前,也有一些学者开始重视对共关系理论的研究,如 Kurz 等人试图使用基于共关系的共同余描述共代数之间的行为等价[7];Wolter 研究了共关系的一些基本性质[15],并指出它在共等式(coequation)规范研究中有十分重要的作用.但从总体上说,共关系理论及其在共代数方法中的应用研究仍处于起步阶段.

在 Kurz,Wolter 等人工作的基础上,我们对共关系的基本性质作了进一步的研究,并探讨了共代数上共关系的一些基本性质.本文目标是在 Gumm[5,13],Hughes[8]等人工作的基础上,利用共同余(cocongruence)共关系与子共代数之间的对应,给出集合范畴的共生成子共代数的一种构造方法.

本文需要一些范畴理论的基础知识,特别是有关单射(monomorphism)与满射(epimorphism)、极限(limit)与共极限(colimit),以及伴随函子(adjoint functor)的知识,有关内容可参考标准的范畴论文献(如文献[16,17]等).

1 基础知识

1.1 共代数与同态

目前已有不少介绍共代数理论的文献,其中以文献[2]最为有名,文献[5,18,19]也是了解共代数方法极好的参考文献.给定自函子$\Omega:C\to C$,Ω-共代数是二元组(X,ξ),其中,X 是范畴 C 的对象,称为该共代数的载体(carrier),$\xi:X\to\Omega X$ 是范畴 C 的射,称为该共代数的结构(structure)射或变迁(transition)射.共代数(X,ξ)和(Y,ζ)之间的同态 $f:(X,\xi)\to(Y,\zeta)$是范畴 C 的射 $f:X\to Y$ 且满足$\Omega f\circ\xi=\zeta\circ f$.所有$\Omega$-共代数构成一个范畴,记为 C_Ω.

共代数范畴 C_Ω的忘却函子(forgetful functor)$U:C_\Omega\to C$ 将共代数(X,ξ)映射为 X,将同态 $f:(X,\xi)\to(Y,\zeta)$映射为$f:X\to Y$.U 是忠实函子(faithful functor),从而反射单射和满射,即若同态 f 是 C 的单射(满射),则 f 也是 C_Ω的单射(满射).

忘却函子 U 最重要的性质是创建范畴 C 的共极限,即若 C 有某种共极限,则 C_Ω也有该种共极限,且与 C 有相同的构造方式.例如,共积是共极限的一种,因此若范畴 C 有共积,即任意两个对象 X 和 Y 有共积$(X+Y,\kappa_X:X\to X+Y,\kappa_Y:Y\to X+Y)$,则对任意共代数$(X,\xi)$和$(Y,\zeta)$,存在唯一的结构射$\chi:(X+Y)\to\Omega(X+Y)$使得$\kappa_X,\kappa_Y$ 都是同态,从而C_Ω也有共积.

1.2 共代数范畴的分解系统

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "w"'] \\
B \arrow[r, "m"'] & D
\end{tikzcd}
$$

设 E 和 M 都是范畴 C 的一组射构成的类(class,区别于集合).若(E,M)满足:(i)范畴 C 的所有同构射同时属于 E 和 M;(ii) E 和 M 都对射的复合封闭;(iii) 范畴 C 的任意射都有(E,M)-分解,即对任意射 $f:X\to Y$,存在 $e\in E,m\in M$,使得 $f=m\circ e$;(iv) $\forall e\in E,\forall m\in M,e$ 正交于(orthogonal to)m,记为 $e\perp m$,即对范畴 C 的任意射 f,g,若 $m\circ f=g\circ e$,则存在唯一的射 w,使得 $w\circ e=f$ 且 $m\circ w=g$(见左图),则称范畴 C 是(E,M)范畴.这时,射 f 的分解 $f=m\circ e$ 在同构的意义下唯一,即若还存在 $m'\in M,e'\in E$,使得 $f=m'\circ e'$,则存在同构射 w,使得 $e'=w\circ e$ 且 $m'\circ w=m$.

对于集合范畴 *Set*,所有满函数构成的类 Epi 和所有单函数构成的类 Mono 满足上述性质.因此,*Set* 是(Epi,Mono)范畴.对于一般范畴 C,既是满射又是单射的射不一定是同构射,因此一般不是(Epi,Mono)范畴.

对于共代数范畴同态的分解,Hughes 引入了所谓殆共正则范畴(almost co-regular category)的概念[8].说范畴 C 是殆共正则范畴,若它有共核及(Epi,RegMono)分解,这里,RegMono 是 C 的所有正则单射构成的类.Hughes 证

明了如下定理(实际上,Hughes 是针对代数范畴证明相应的对偶性质,即文献[8]的定理 1.2.13).

定理 **1.1**. 给定范畴 C 是殆共正则范畴且自函子 $\Omega:C\to C$ 保持正则单射,则 C_Ω也有(Epi,RegMono)分解,且为忘却函子 $U:C_\Omega\to C$ 反射和保持,即对任意同态 $f:(X,\xi)\to(Y,\zeta)$,设 $f:X\to Y$ 在 C 分解是 $f=m\circ e:X\to X'\to Y$,则存在唯一的结构射$\chi:X'\to\Omega X'$,使得 m 是正则单同态 $m:(X,\xi)\to(X',\chi)$,而 e 是满同态 $e:(X',\chi)\to(Y,\zeta)$.进一步地,U 保持和反射满射与正则单射,即同态 f 是 C_Ω的满射(正则单射),当且仅当它是 C 的满射(正则单射).

集合范畴 Set 有共核,且它的任意单射都是正则单射,所以 Set 是殆共正则范畴.另一方面,集合范畴的任意自函子$\Omega:Set\to Set$ 都保持定义域非空的单射(因为存在左逆),而对任意共代数(X,ξ),空函数$\varnothing:\varnothing\to X$ 总是正则单同态,因为总有空共代数$(\varnothing,\varnothing:\varnothing\to\Omega\varnothing)$,而且空同态$\varnothing:(\varnothing,\varnothing)\to(X,\xi)$是同态 $\kappa_X,\kappa'_X:(X,\xi)\to(X+X,\chi)$的均等射,这里,$\kappa_X,\kappa'_X$是共积的注入函数.于是有如下推论:

推论 **1.2**. 对集合范畴的任意自函子$\Omega:Set\to Set$,共代数范畴 Set_Ω有(Epi,RegMono)分解,且为忘却函子 $U:C_\Omega\to C$ 反射和保持,即对任意同态 $f:(X,\xi)\to(Y,\zeta)$,像集 $f(X)$上存在唯一的结构射$\chi:f(X)\to\Omega(f(X))$,使得 m 为正则单同态,e 为满同态.这里,m,e 是函数 $f:X\to Y$ 在 Set 的分解 $f=m\circ e:X\to f(X)\to Y$.进一步地,$U$ 反射和保持满射与正则单射,即同态 f 是满同态,当且仅当 f 是满函数;而同态 f 是正则单同态,当且仅当 f 是单函数.

注意:当 f 是范畴 Set_Ω的单同态时,f 不一定是单函数,因为忘却函子并不保持单射.根据著名的函子$(-)_2^3$,容易构造反例说明单同态不一定是单函数.可以参考文献[6]中第 2.4 节对函子$(-)_2^3$ 的讨论构造这种反例.值得一提的是,由此可推知,文献[5]的定理 3.48 说范畴 Set_Ω存在(同构意义下)唯一的(Epi,Mono)分解是错误的.实际上,一个同态既是满同态又是单同态时,不一定是同构.

1.3 共关系

对于范畴 C,对象 X 和 Y 之间的共关系是三元组 $\mathbf{R}=(R,r_X:X\to R,r_Y:Y\to R)$,其中 R 是 C 的对象,且 r_X ,r_Y 是范畴 C 的联合满射(jointly epi),即对任意射 $f,g:R\to Z$,若 $f\circ r_X=g\circ r_X$ 且 $f\circ r_Y=g\circ r_Y$,则 $f=g$.

对于任意对象 X,显然$\Delta_X=(X,id_X,id_X)$是 X 上(即 X 与 X 之间)的共关系,称为恒等共关系.对于任意两个对象 $X,Y,(X+Y,\kappa_X,\kappa_Y)$是 X 与 Y 之间的共关系.更一般地,当范畴 C 有共积时,(R,r_X,r_Y)是 X 与 Y 之间的共关系,当且仅当$[r_X,r_Y]:X+Y\to R$ 是满射.

由于集合范畴有共积,所以集合 X 和 Y 之间的共关系(R,r_X,r_Y)等价于以共积 $X+Y=\{\langle 0,x\rangle|x\in X\}\cup\{\langle 1,y\rangle|y\in Y\}$为共域的满射 $e=[r_X,r_Y]:X+Y\to R$,从而也等价于 $X+Y$ 上的一个划分.例如,集合 X 上的恒等共关系Δ_X相当于划分$\{\{\langle 0,x\rangle,\langle 1,x\rangle\}|x\in X\}$,因此,恒等共关系实际上与恒等关系$\Delta_X=\{\langle x,x\rangle|x\in X\}$等价.

我们将 X 与 Y 之间的所有共关系记为 $\mathbf{Corel}(X,Y)$.共关系之间可定义序:给定范畴 C 及对象 X 和 Y,设$\mathbf{R}=(R,r_X,r_Y)$和 $\mathbf{T}=(T,t_X,t_Y)$都是 X 和 Y 之间的共关系,定义 $\mathbf{R}\le\mathbf{T}$,当且仅当存在射 $w:R\to T$,使得 $t_X=w\circ r_X$ 且 $t_Y=w\circ r_Y$.显然,这里的 e 唯一且是满射.任意一族共关系(即一组共关系构成的集合)的上确界可由广义外推给出.因此,当 $\mathbf{Corel}(X,Y)$本身是集合时,它就是完备偏序集,其中最小元正是共关系$(X+Y,\kappa_X,\kappa_Y)$.

对偶于自反、对称、传递关系,也可定义共自反、共对称、共传递共关系[15],并进一步得到共等价共关系的概念.特别地,对于集合范畴,我们证明了:

引理 **1.3**. 集合 X 上的共关系 $\mathbf{R}=(R,r,r')$是共等价共关系$\Leftrightarrow\mathbf{R}\le\Delta_X\Leftrightarrow(R,r,r')$是 r,r'的均等射的共核.

进一步地,对于集合范畴,由于任意单函数都是正则单射,且是该单函数的共核的均等射,因此可建立共等价共关系与正则子对象之间的一一对应:X 上的所有共等价共关系 $\mathbf{CoeqCorel}(X)$与 X 的所有子对象 $\mathbf{Sub}(X)$是同构的完全偏序集.

2 子共代数与共同余共关系

给定自函子$\Omega:C\to C$,共代数(X,ξ)的子共代数定义为(X,ξ)的子对象 $m:(Y,\zeta)\to(X,\xi)$,且 $m:Y\to X$ 也是范畴 C 的单射,即子共代数是由忘却函子所保持的单同态.当然,读者不妨将(Y,ζ)看作(X,ξ)的子共代数.类似地,(X,ξ)的正则子共代数是为忘却函子所保持的正则单同态.我们将(X,ξ)的所有子共代数记为 $\mathbf{SubCoalg}(X,\xi)$,所有正则子共代数记为 $\mathbf{RegSubCoalg}(X,\xi)$.

对于集合范畴上的自函子Ω:$Set\to Set$,共代数(X,ξ)的子共代数是 m:$(Y,\zeta)\to(X,\xi)$,m:$Y\to X$ 是单函数.前面推论 2.2 表明,忘却函子将单函数反射为正则单射,从而 m 作为同态是正则单同态.因此,m:$(Y,\zeta)\to(X,\xi)$就是(X,ξ)的正则子共代数,即有如下定理:

定理 2.1. 给定自函子Ω:$Set\to Set$,共代数(X,ξ)的任意子共代数 m:$(Y,\zeta)\to(X,\xi)$都是正则子共代数.

定理虽简单,但它使得通过共同余共关系考虑共生成子共代数成为可能.而且,这也使得 Gumm[5,6],Rutten[2] 关于集合范畴子共代数的一些结果可以推广到一般范畴,正如 Hughes 的博士论文[8]所做的工作.Hughes 的博士论文[8]研究了一般范畴上正则子共代数的性质,但没有将它与集合范畴的子共代数性质联系起来.

给定自函子Ω:$C\to C$,共代数(X,ξ)和(Y,ζ)之间的共关系$((R,\rho),r_X,r_Y)$称为准共同余共关系(precocongruence corelation).若(R,r_X,r_Y)在范畴 C 也是对象 X 与 Y 之间的共关系,即准共同余共关系是忘却函子保持的共关系.

引理 2.2. 给定自函子Ω:$C\to C$ 且范畴 C 有共积.X 与 Y 之间的共关系(R,r_X,r_Y)可成为(X,ξ)和(Y,ζ)之间的准共同余共关系当且仅当存在(唯一的)结构射ρ:$R\to\Omega R$,使得 r_X,r_Y 都成为同态.

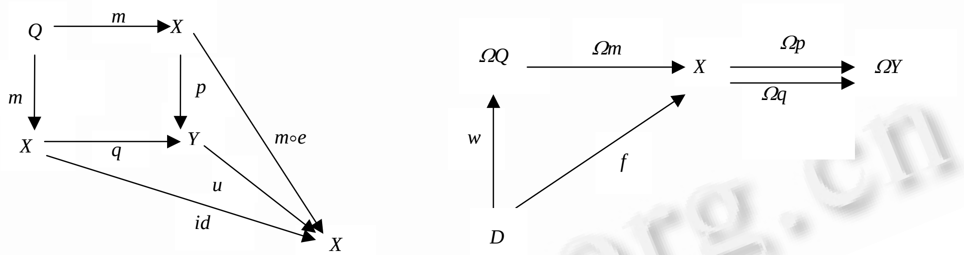
证明:因为范畴有共积时,(R,r_X,r_Y)是共关系,当且仅当$[r_X,r_Y]$是满射,而忘却函子又保持和反射满射. □

进一步地,(X,ξ)上的共关系$((R,\rho),r,r')$被称为共同余共关系(cocongruence corelation),如果(R,r,r')在范畴 C 是对象 X 上的共等价共关系.显然,恒等共关系$((X,\xi),id,id)$是(X,ξ)上的共同余共关系.

最重要的是我们可以证明,对于集合范畴的任意自函子Ω:$Set\to Set$,若$((R,\rho),r,r')$是(X,ξ)上的共同余共关系,则在范畴 Set_Ω,同态 r,r'存在均等射.首先可以证明如下引理:

引理 2.3. 给定自函子Ω:$Set\to Set$,若函数 p,q:$X\to Y$ 是它的均等射(Q,m)的共核,且 $Q\neq\varnothing$,则$(\Omega Q,\Omega m)$是$\Omega p,\Omega q$ 的均等射.

证明:因为 m 是单函数且 Q 非空,因此存在左逆 $e\circ m=id_Q$,从而 $m\circ e\circ m=m$,根据共核的性质,存在射 u:$P\to X$,使得 $u\circ p=m\circ e$ 且 $u\circ q=id$,见下图左边:



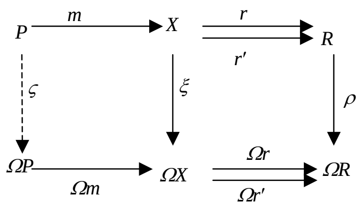
于是对任意射 f:$D\to X$,若$\Omega p\circ f=\Omega q\circ f$,则可令 $w=\Omega e\circ f$,从而有

$$\Omega m\circ w=\Omega m\circ\Omega e\circ f=\Omega u\circ\Omega p\circ f=\Omega u\circ\Omega q\circ f=f.$$

若还存在 w'使得$\Omega m\circ w'=f$,则 $w'=\Omega e\circ\Omega m\circ w'=\Omega e\circ f=w$.因此,$(\Omega Q,\Omega m)$确实是$\Omega p,\Omega q$ 的均等射. □

定理 2.4. 给定自函子Ω:$Set\to Set$,若$((R,\rho),r,r')$是(X,ξ)上的共同余共关系,则在范畴 Set_Ω,同态 r,r'存在均等射$((P,\varsigma),m)$,且 r,r'是 m 的共核.

证明:设 r,r'在集合范畴 Set 的均等射是(P,m),我们证明存在结构射ς:$P\to\Omega P$ 使得 m 是同态,且是 r,r'均等射.若 $P=\varnothing$,则显然存在空函数使得$(P,\varnothing)$是共代数,而 m(这时也是空函数)是同态,且是 r,r'的均等射,因为当 r,r'的均等射是空函数时,意味着不存在任何函数 f,使得 $r\circ f=r'\circ f$,当然也就不存在任何同态使得该等式成立.因此,空同态也是同态 r,r'的均等射.



若 $P\neq\varnothing$,则根据上面的引理,$(\Omega Q,\Omega m)$是$\Omega r,\Omega r'$的均等射,见右图.

由 r,r'都是同态有

$$\Omega r\circ\xi\circ m=\rho\circ r\circ m=\rho\circ r'\circ m=\Omega r'\circ\xi\circ m.$$

从而根据均等射的性质,存在ς:$P\to\Omega P$,使得$\xi\circ m=\Omega m\circ\varsigma$,即 m 是同态.

对任意同态 f:$(Y,\zeta)\to(X,\xi)$,若 $r\circ f=r'\circ f$,则因为作为函数 m 是 r,r'的均等射,因此存在唯一的函数 k:$Y\to P$,使得 $f=m\circ k$,由 f 是同态且 m 是单射,不难证明 k 是同态,从而在范畴 Set_Ω,同态 m 也是 r,r'的均等射.进一步地,由于在

范畴 Set 中 (R,r,r') 是 m 的共核且忘却函子创建共极限,从而在范畴 Set_{Ω},r,r' 也是 m 的共核. □

根据上面定理 2.1,对于集合范畴上的自函子,(X,ξ) 的子共代数 $m:(Y,\zeta)\to(X,\xi)$ 都是正则子共代数,从而 m 都是它的共核 $((R,\rho),r,r')$ 的均等射.这样,(X,ξ) 的所有子共代数 **SubCoalg**(X,ξ) 与 (X,ξ) 上的所有共同余共关系 **Cocong**(X,ξ) 建立了一一对应,且此对应使得这两个完全偏序集同构.

定理 **2.5**. 给定集合范畴上的自函子 Ω,(X,ξ) 的所有子共代数 **SubCoalg**(X,ξ) 与 (X,ξ) 上的所有共同余共关系 **Cocong**(X,ξ) 是两个同构的完全偏序集.

证明:求子共代数的共核和求共同余共关系的均等射建立了 **SubCoalg**(X,ξ) 和 **Cocong**(X,ξ) 之间的双射,且这两个操作分别保持子共代数和共同余共关系的序,而保序的双射是格之间的同构. □

3 共生成子共代数的构造

利用上面所给出的子共代数与共同余共关系之间的同构,可以给出共生成子共代数的构造.首先,我们给出共生成子共代数的定义:

定义 **3.1**. 给定自函子 $\Omega:C\to C$ 和共代数 (X,ξ),X 的子对象 $m:Y\to X$ 的共生成(cogenerate)子共代数 $[m]$ 是 (X,ξ) 被该子对象包含的最大子共代数,即它满足:(1) $[m]$ 是 (X,ξ) 的子共代数,且 m 和 $[m]$ 作为 X 的子对象有 $[m]\le m$;(2) 对 (X,ξ) 的任意子共代数 $n:(Z,\chi)\to(X,\xi)$,若在范畴 C 有 $n\le m$,则在范畴 C_{Ω} 也有 $n\le[m]$.

对集合范畴的自函子 $\Omega:Set\to Set$ 上的共代数 (X,ξ),由于集合 X 的子对象 $m:Y\to X$ 可认为是 X 的子集 $m(Y)$,所以共生成子共代数是被 X 的子集 $Y\subseteq X$ 包含的最大子共代数.Rutten 等人证明:对于共代数 (X,ξ) 和 (Y,ζ),$X\cup Y$ 存在结构射 $\chi:(X\cup Y)\to\Omega(X\cup Y)$ 使得包含函数 $m:X\to X\cup Y$ 和 $n:Y\to X\cup Y$ 是同态,从而在 **SubCoalg**(X,ξ) 中,$(X\cup Y,\chi)$ 是 (X,ξ) 和 (Y,ζ) 的上确界.进一步地,此结论可以推广到任意一族共代数的并,即 **SubCoalg**(X,ξ) 的上确界 $\vee$ 可由集合并给出,这意味着,对任意共代数 (X,ξ),X 的子集 Y 总是存在共生成子共代数 $\vee\{(Y_i,\zeta_i)|Y_i\subseteq Y\}$.

但这并没有给出共生成子共代数的构造方式.为利用子共代数与共同余共关系之间的同构给出共生成子共代数的具体构造方式,这里再给出共生成准共同余共关系的定义.

定义 **3.2**. 给定自函子 $\Omega:C\to C$ 及共代数 (X,ξ) 和 (Y,ζ).对象 X 和 Y 之间的共关系 $\mathbf{R}=(R,r_X,r_Y)$ 的共生成准共同余共关系,记为 $[\mathbf{R}]=([R],[r_X],[r_Y])$,是 (X,ξ) 和 (Y,ζ) 之间被该关系包含的最大准共同余共关系,即:(1) $([R],[r_X],[r_Y])$ 是 (X,ξ) 和 (Y,ζ) 之间准共同余共关系,且作为范畴 C 的共关系有 $[\mathbf{R}]\le\mathbf{R}$;(2) 对 (X,ξ) 和 (Y,ζ) 之间任意准共同余共关系 $\mathbf{T}=((T,\chi),t_X,t_Y)$,若在范畴 C 有 $\mathbf{T}\le\mathbf{R}$,则在范畴 C_{Ω} 也有 $\mathbf{T}\le[\mathbf{R}]$.

在一定条件下,我们可以给出共生成准共同余共关系的构造:

定理 **3.1**. 给定范畴 C 是有共积的殆共正则范畴且函子 $\Omega:C\to C$ 保持正则单射.若忘却函子 $U:C_{\Omega}\to C$ 有右伴函子 $H:C\to C_{\Omega}$,则对任意共代数 (X,ξ) 和 (Y,ζ),X 和 Y 之间的共关系 $\mathbf{R}=(R,r_X,r_Y)$ 有共生成准共同余共关系.

$$\begin{tikzcd} X+Y \arrow[r, "\eta_\chi"] \arrow[d, "e"'] & H(X+Y) \arrow[d, "Hr"] \\ {[R]} \arrow[r, "m"'] & HR \end{tikzcd}$$

证明:设伴随函子 $(U\dashv H)$ 的单位变换(unit)是 $\eta:Id\Rightarrow HU$.对于 (X,ξ) 和 (Y,ζ) 的共积 $(X+Y,\chi)$ 有同态 $\eta_\chi:(X+Y,\chi)\to H(X+Y)$.对于共关系 (R,r_X,r_Y),我们有满射 $r=[r_X,r_Y]:X+Y\to R$,且 $Hr:H(X+Y)\to HR$ 也是同态.

根据定理 1.1,这时,范畴 C_{Ω} 有(Epi,RegMono)分解,所以可考虑同态 $Hr\circ\eta_\chi:(X+Y,\chi)\to H(X+Y)\to HR$ 的分解 $m\circ e:(X+Y)\to[R]\to HR$,见左图.

我们证明 $[\mathbf{R}]=([R],e\circ\kappa_X,e\circ\kappa_Y)$ 就是 (R,r_X,r_Y) 的共生成准共同余共关系.

首先证明 $[\mathbf{R}]\le\mathbf{R}$.设伴随函子 $(U\dashv H)$ 的共单位变换(counit)是 $\varepsilon:UH\Rightarrow Id_C$,特别地,对于 $X+Y$ 有 $\varepsilon_{XY}:H(X+Y)\to(X+Y)$,根据伴随函子的性质,对共代数 $(X+Y,\chi)$ 有 $\varepsilon_{XY}\circ\eta_\chi=id$.见下图:

$$\begin{tikzcd} H(X+Y) \arrow[r, "Hr"] \arrow[d, "\varepsilon_{XY}"'] & HR \arrow[d, "\varepsilon_R"] \\ X+Y \arrow[r, "r"'] & R \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X+Y \arrow[r, "\eta_\chi"] \arrow[d, "r"'] & H(X+Y) \arrow[d, "Hr"] \\ R & HR \arrow[l, "\varepsilon_R"] \end{tikzcd}$$

于是,$\varepsilon_R\circ m\circ e=\varepsilon_R\circ Hr\circ\eta_\chi=r\circ\varepsilon_{XY}\circ\eta_\chi=r$,这就表明$[\mathbf{R}]\le\mathbf{R}$.

对(X,ξ)和(Y,ζ)之间的任意准共同余共关系 $\mathbf{T}=((T,\tau),t_X,t_Y)$,有满射 $t=[t_X,t_Y]$,若 $\mathbf{T}\le\mathbf{R}$,即存在射 $w:T\to R$ 使得 $r=w\circ t$,见下图:

$$\begin{tikzcd}
X+Y \arrow[r, "t"] \arrow[d, "e"'] & T \arrow[d, "Hw\circ\eta_\tau"] \arrow[dl, "u"'] \\
{[R]} \arrow[r, "m"'] & HR
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X+Y \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\eta_\chi"'] & T \arrow[d, "\eta_\tau"'] \arrow[dr, "Hw\circ\eta_\tau"] & \\
H(X+Y) \arrow[r, "Ht"'] & HT \arrow[r, "Hw"'] & HR
\end{tikzcd}$$

于是,$Hw\circ\eta_\tau\circ t=Hw\circ Ht\circ\eta_\chi=Hr\circ\eta_\chi=m\circ e$,从而由 t 是满射,m 是正则单射有 $t\perp m$,即存在射 $u:T\to[R]$,使得 $e=u\circ t$,即 $\mathbf{T}\le[\mathbf{R}]$.综上表明:$([R],e\circ\kappa_X\ e\circ\kappa_Y)$就是$(R,r_X,r_Y)$的共生成准共同余共关系. □

具体到集合范畴,上述定理意味着:当自函子$\Omega:Set\to Set$ 使得忘却函子 $U:Set_\Omega\to Set$ 存在右伴函子时,给定共代数(X,ξ),可给出 X 上的共关系(R,r,r')的共生成准共同余共关系的构造.进一步地,对于 X 上的共等价共关系 $\mathbf{R}$,由于$[\mathbf{R}]\le\mathbf{R}\le\Delta_X$,因此$[\mathbf{R}]$也是共等价共关系,从而是$(X,\xi)$上的共同余共关系.也就是说,我们有:

引理 **3.2**. 给定自函子$\Omega:Set\to Set$ 及其共代数(X,ξ),X 上的共等价共关系的共生成准共同余共关系是(X,ξ)上的共同余共关系.

利用这一点,对于 X 的子对象 $m:Y\to X$,我们可以考虑 m 的共核 $\mathbf{R}=(R,r,r')$,它是 X 上的共等价共关系.$\mathbf{R}$ 的共生成准共同余共关系$[\mathbf{R}]=(([R],\rho),[r],[r'])$是$(X,\xi)$上的共同余共关系.而在范畴 Set_Ω,同态$[r],[r']$存在均等射$[m]$:$([P],\varsigma)\to(X,\xi)$,我们证明这就是 m 的共生成子共代数.

定理 **3.3**. 给定自函子$\Omega:Set\to Set$ 及共代数(X,ξ).设 X 的子对象 $m:Y\to X$ 的共核是 $\mathbf{R}=(R,r,r')$,而 $\mathbf{R}$ 的共生成共同余共关系是$[\mathbf{R}]=(([R],\rho),[r],[r'])$,则同态$[r],[r']$的均等射$[m]:([P],\varsigma)\to(X,\xi)$是 m 的共生成子共代数.

证明:根据定理 2.4,这时,同态$[r],[r']$也是$[m]$共核,而 X 上的共等价共关系与 X 的子对象一一对应,因此,$[\mathbf{R}]\le\mathbf{R}$ 意味着也有$[m]\le m$.

对(X,ξ)的任意子共代数 $n:(Z,\zeta)\to(X,\xi)$,设 $n\le m$.考虑同态 n 的共核 $\mathbf{T}=((T,\chi),t,t')$,则 n 也是同态 t,t'的均等射.同样,由于共等价共关系与子对象(均等射)一一对应,因此,$n\le m$ 意味着作为共等价共关系有 $\mathbf{T}\le\mathbf{R}$,从而根据共生成共同余共关系的性质,有 $\mathbf{T}\le[\mathbf{R}]$.再利用子共代数与共同余共关系之间的一一对应,就有 $n\le[m]$,这就表明$[m]$是 m 的共生成子共代数. □

结合上面两个定理,当自函子$\Omega:Set\to Set$ 使得共代数范畴的忘却函子存在右伴函子时,我们就得到了共生成子共代数的一种具体构造方式.

4 结束语

共代数方法是理论计算机科学近 10 年新兴起的研究领域之一,它本身的一些基础问题还需要进一步探索和研究.本文以范畴论为工具,从共关系理论的角度,利用共同余共关系与子共代数之间的对应,给出了集合范畴的共生成子共代数的一种构造方式.由于共生成子共代数与共代数范畴的结构、积共代数以及互模拟之间有紧密的联系[8,11],这里所给出的构造方式可用于对积共代数、互模拟的性质作进一步的研究.

对共关系理论的研究也有助于研究共代数以及基于状态的系统的性质描述.由于对象是一种基于状态的系统,因此,这种研究对于将共代数用于研究面向对象技术的理论基础有十分重要的作用.实际上,研究共代数的共等式规范描述[15],从而描述与验证软件系统的性质,是共代数方法在计算机科学中的重要应用之一.

References:

[1] Aczel P. Non-Well-Founded Set. Standford University: CSLI Press, 1988.

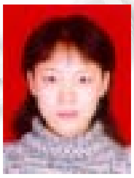
[2] Rutten J. Universal coalgebra: A theory of systems. Theoretical Computer Science, 2000,249(1):3–80.

[3] Jacobs B. Objects and classes, co-algebraically. In: Freitag B, Jones CB, Lengauer C, Schek HJ, eds. Object-Orientation with Parallelism and Persistence. Kluwer Academic Publishers, 1996. 83–103.
[4] Zhou XC, Shu ZM. A Survey on the coalgebra methods in computer science. Journal of Software, 2003,14(10):1161–1171 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/1161.htm
[5] Gumm HP. Elements of the general theory of coalgebras. Lecture Notes. Rand Africans University, 1999. http://www.mathematik.uni-marburg.de/~gumm/Papers/publ.html
[6] Gumm HP, Schröder T. Coalgebraic structure from weak limit preserving functors. Electronic Notes in Theoretcial Computer Science, 2000,33:111–131.
[7] Kurz A. Logics for coalgebras and applications to computer science [Ph.D. Thesis]. München: Ludwig-Maximilians-Universität München, 2000.
[8] Hughes J. A study of categories of algebras and coalgebras [Ph.D. Thesis]. Pittsburgh: Carnegie Mellon University, 2001.
[9] Hughes J, Jacobs B. Simulations in coalgebra. Theoretical Computer Science, 2004,327(1–2):71–108.
[10] Rothe J. Behavioural equivalences for coalgebras [Ph.D. Thesis]. Dresden: Technischen Universität Dresden, 2004.
[11] Gumm HP, Schröder T. Products of coalgebras. Algebra Universalis, 2001,46(1-2):163–185.
[12] Gumm HP, Schröder T. Types and coalgebraic structure. Algebra Universalis, 2005,53(2-3):229–252.
[13] Gumm HP, Schröder T. Coalgebras of bounded type. Mathematical Structures in Computer Science, 2002,12(5):565–578.
[14] Jacobs B. Comprehension for coalgebras. Electronic Notes in Theoretcial Computer Science, 2002,65(1):1–23.
[15] Wolter U. On corelations, cokernels, and coequations. Electronic Notes in Theoretcial Computer Science, 2000,33:317–336.
[16] Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
[17] Borceux F. Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
[18] Kurz A. Coalgebras and modal logic. Lecture Notes, ESSLLI, 2001. http://www.cs.le.ac.uk/people/akurz/works.html
[19] Pattinson D. An introduction to the theory of coalgebras. Lecture Notes, NASSLLI, 2003. http://www.pst.informatik.uni-muenchen.de/~pattinso/Publications/

附中文参考文献:

[4] 周晓聪,舒忠梅.计算机科学中的共代数方法的研究综述.软件学报,2003,14(10):1161–1171. http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/1161.htm

周晓聪(1971－),男,湖南常宁人,博士,副教授,主要研究领域为形式语义学,面向对象技术的形式理论基础,软件体系结构.



舒忠梅(1974－),女,讲师,CCF 高级会员,主要研究领域为形式语义学,软件体系结构.