

# 等距曲线的圆域 Bézier 逼近\*

陈笑<sup>1,2</sup>, 王国瑾<sup>1,2+</sup>

<sup>1</sup>(浙江大学 计算机图像图形研究所, 浙江 杭州 310027)

<sup>2</sup>(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

## Disk Bézier Curve Approximation of the Offset Curve

CHEN Xiao<sup>1,2</sup>, WANG Guo-Jin<sup>1,2+</sup>

<sup>1</sup>(Institute of Computer Graphics and Image Processing, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

<sup>2</sup>(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

+ Corresponding author: E-mail: amawgj@mail.hz.zj.cn

Received 2004-09-01; Accepted 2004-11-15

Chen X, Wang GJ. Disk Bézier curve approximation of the offset curve. *Journal of Software*, 2005,16(4): 616–624. DOI: 10.1360/jos160616

**Abstract:** To some extent, using a plane curve to approximate an offset curve of the plane Bézier curve is restricted. In this paper, a region approximation idea that means using a “fat curve” with a width to approximate the offset curve is proposed, and a complete set of algorithms to approximate offset curve using disk Bézier curve are given and implemented. In the algorithms, the optimal and uniform approximate curve of the offset curve as the central curve of the Disk Bézier curve is found by using Remez method, and then the upper optimal and uniform approximation principle is proposed to compute the error radius function of the Disk Bézier curve. Thus, the whole Disk Bézier curve can be obtained. In the end of this paper, the approximate effect of the Disk Bézier curve is not only analyzed and assessed, but also some specific examples are provided.

**Key words:** offset curve; disk Bézier curve; error; upper; optimal and uniform approximating polynomial

**摘要:** 用一条平面曲线来逼近平面 Bézier 曲线的等距曲线具有一定的局限性. 提出用一条带宽度的“胖曲线”来逼近上述等距曲线的区域逼近思想, 并建立与实现了圆域 Bézier 曲线等距逼近的整套算法, 包括应用 Remez 方法求出等距曲线的最佳一致逼近曲线作为圆域 Bézier 曲线的中心曲线, 提出上控最佳一致逼近的原理, 求出圆域 Bézier 曲线的误差半径函数, 以及确定整条圆域 Bézier 曲线, 最后还对该圆域 Bézier 逼近的效果做了分析和考核, 并给出了一些具体实例.

**关键词:** 等距曲线; 圆域 Bézier 曲线; 误差; 上控; 最佳一致逼近多项式

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60373033,60333010 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.2002CB312101 (国家重点基础研究发展规划(973))

作者简介: 陈笑(1982 - ),男,浙江宁波人,硕士生,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学,应用数学;王国瑾(1944 - ),男,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学,数字几何处理.

等距(offset)曲线也称为平行或位差曲线,是基曲线沿法向距离为常数的点的轨迹,在计算机辅助设计及加工(CAD/CAM)中有广泛应用.由于平面 Bézier 曲线的单位法矢包含平方根项,其等距曲线一般无法表示为有理 Bézier 的形式,所以多年来国际上用等距移动控制网格或基于插值和拟合的方法来对其进行逼近,收到了很好的成效.

但随着 CAD/CAM 研究的深入,把平面 Bézier 曲线的等距曲线用一条平面曲线来逼近的算法也呈现出一些局限性:第 1,人们常常需要从几何逼近的角度寻求用某种方式来严格描述一个带状平面区域,使得落在此区域内的任意一条曲线都可选用为相应于已知平面 Bézier 曲线的在可控误差条件下的近似等距曲线,以便在机器人行走路径规划、加工刀具轨迹设计及等距曲线表示形式转换等方面有更大的选择余地;第 2,在产品检查中,人们常常需要确定一个可控制的误差带,来实际度量或考核同一批产品表面某部位的曲线,与一条已知曲线的等距误差是否小于一个公差 $\epsilon$ ,作为产品合格的标准之一;第 3,在平面曲线的等距逼近中,人们需要用上述带着误差的区域作为判别多种多样等距逼近曲线的好坏标准.总之,必须寻求用一个带宽度的“胖曲线”来逼近已知 Bézier 曲线的等距线.

为了实现这一目标,区间 Bézier 曲线<sup>[1]</sup>不失为一个行之有效的工具,然而通过进一步的研究可以发现:1998 年, Lin 和 Rokne 提出的圆域(disk)Bézier 曲线<sup>[2]</sup>是一个更为理想的工具.这是因为,它同样是一条带宽度的“胖曲线”,但其边界能用更简单的显式表示,且其圆域控制顶点仅由 3 个(而区间控制顶点是 4 个)独立参数决定,圆域控制顶点的旋转又对圆域 Bézier 曲线没有影响.

本文的中心内容就是为圆域 Bézier 曲线对已知平面 Bézier 曲线的等距曲线提供一套逼近算法,算法的关键包括用 Remez 方法求出等距曲线的最佳一致逼近曲线作为圆域 Bézier 曲线的中心曲线;用一条尽量狭窄的误差半径为一个连续的参数函数刻画的圆域曲线包围已知 Bézier 曲线的等距曲线;再提出上控最佳一致逼近的原理求出圆域 Bézier 曲线来包围上述圆域曲线.

文中在公差预先给定的情况下,以及公差没有预先给定但圆域 Bézier 曲线的次数预先给定的情况下,对圆域 Bézier 逼近给出了应用方法和一些具体实例.结果表明,本文对等距曲线的圆域 Bézier 逼近是成功、有效的.

## 1 预备知识

### 1.1 平面圆域 Bézier 曲线<sup>[2]</sup>

定义 1. 有界闭集  $\alpha = [x_0; r] = \{x \in R^2 \mid \|x - x_0\|_2 \leq r, x_0 \in R^2, r \geq 0\}$  称为以点  $x_0$  为中心,  $r$  为半径的圆域.

定义 2. 两个圆域  $\alpha = [x_0^{(1)}; r_1]$ ,  $\beta = [x_0^{(2)}; r_2]$  及  $\alpha + \beta$  定义为  $\gamma = [x_0^{(3)}; r_3]$ ,  $x_0^{(3)} = x_0^{(1)} + x_0^{(2)}$ ,  $r_3 = r_1 + r_2$ ; 圆域  $\alpha = [x_0^{(1)}; r_1]$  与实数  $k$  的数乘定义为  $k\alpha = [x_0^{(2)}; r_2]$ ,  $x_0^{(2)} = kx_0^{(1)}$ ,  $r_2 = |k| r_1$ .

定义 3. 与  $n+1$  个圆域  $[P_i] = [x_0^{(i)}; r_i]$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 对应的圆域曲线

$$[P](t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) [P_i], 0 \leq t \leq 1,$$

称为  $n$  次圆域 Bézier 曲线,其中  $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$  称为 Bernstein 基函数,  $[P_i]$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 称为圆域控制顶点.

由定义 2 易得圆域 Bézier 曲线的中心表达式:

$$[P](t) = \left[ \sum_{i=0}^n B_i^n(t) x_0^{(i)}; \sum_{i=0}^n B_i^n(t) r_i \right], 0 \leq t \leq 1.$$

按照此形式,圆域 Bézier 曲线  $[P](t)$  可分成中心曲线部分  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) x_0^{(i)}$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) 和误差半径部分  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) r_i \geq 0$  ( $0 \leq t \leq 1$ ),前者是以  $x_0^{(i)}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 为控制顶点的平面  $n$  次 Bézier 曲线,后者是以  $r_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 为 Bézier 纵标的  $n$  次 Bernstein 多项式.而平面圆域 Bézier 曲线实质上是具有变半径  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) r_i$  的一个圆域按中心沿

曲线  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t)x_0^{(i)}$  运动而生成的一个扫掠域.

### 1.2 平面 Bézier 曲线的等距曲线

与已知平面 Bézier 曲线  $P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)P_i = (x(t), y(t)), 0 \leq t \leq 1$  相对应的距离为  $d$  的等距曲线可表示为

$$P_d(t) = (x_d(t), y_d(t)) = P(t) + d \cdot n(t), \quad n(t) = \frac{(y'(t) - x'(t))}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}, 0 \leq t \leq 1.$$

这里,  $P(t)$  称为母线,  $n(t)$  称为  $P(t)$  的单位法向量,  $d$  为带符号的偏离量.

## 2 应用 Remez 算法构造圆域 Bézier 曲线的中心曲线

为求得区间  $[0, 1]$  上等距曲线  $P_d(t)$  的最佳逼近曲线, 作为逼近  $P_d(t)$  的平面圆域 Bézier 曲线的中心曲线, 我们只须分别求出  $[0, 1]$  上  $P_d(t)$  的两个分量函数  $x_d(t)$  与  $y_d(t)$  的最佳逼近多项式.

对于最佳逼近多项式的计算, 目前已经有一些很好的算法, 在这些算法中, Remez 算法对于圆域 Bézier 曲线的中心曲线计算有潜在的实用价值. Remez 算法最早见于 1934 年 Remez 本人的论文, 也可见于 1957 年的专题论文. Remez 算法是从插值多项式出发, 逐步修改插值节点以接近预先要求的最佳逼近多项式. Remez 算法虽然需要一次次的迭代求解, 但由于具有很快的收敛速度, 因此算法效果十分显著. 实际上, 可以证明其收敛阶与 Newton 法相同, 还有人证明与 Newton 法几乎等价. 为应用方便, 这里我们只引述 Remez 算法在收敛性方面的重要定理<sup>[3]</sup>.

定义 4. 记  $C_{[a,b]}$  为闭区间  $[a, b]$  上的连续函数全体,  $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n \in C_{[a,b]}$ , 它们的线性组合  $\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x)$  称为  $n$  次广义多项式.

定义 5. 函数组  $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$  满足 Haar 条件是指  $n$  次不恒为 0 的广义多项式  $\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上至多有  $n$  个相异零点.

定理 1. 设函数组  $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$  满足定义 5 中描述的 Haar 条件,  $H_n = \text{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}, x \in [a, b]$ , 又设  $\Phi_n^*(x) = \sum_{i=0}^n a_i^* \varphi_i(x)$  是函数  $f$  在  $[a, b]$  上的最佳一致逼近多项式, 即  $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \Phi_n^*(x)| = \min_{\Phi_n(x) \in H_n} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \Phi_n(x)|$ , 而  $\Phi_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^n a_i^{(k)} \varphi_i(x)$  为由 Remez 算法经过第  $k$  次修正后确定的广义多项式, 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_n^{(k)}(x) = \Phi_n^*(x), x \in [a, b]$  成立.

Remez 第 1 算法的具体步骤<sup>[4]</sup>可描述如下:

第 1 步: 在  $[0, 1]$  上选取  $n+2$  个相异点  $x_i^{(0)}, i=0, 1, \dots, n+1, 0 \leq x_0^{(0)} < x_1^{(0)} < \dots < x_{n+1}^{(0)} \leq 1$  (通常取  $T_{n+2}(x) = \cos((n+1)\arccos(2x-1))$  的极值点), 再解一个具有  $n+2$  个未知数  $a_0^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}$  和  $\rho^{(0)}$  的线性方程组:

$$\sum_{j=0}^n a_j^{(0)} \varphi_j(x_i^{(0)}) + (-1)^{i+1} \rho^{(0)} = f(x_i^{(0)}), 0 \leq i \leq n+1.$$

此后, 记  $\Phi_n^{(0)}(x) = \sum_{i=0}^n a_i^{(0)} \varphi_i(x)$ , 及  $\rho_*^{(0)} = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - \Phi_n^{(0)}(x)| = |f(x_*^{(0)}) - \Phi_n^{(0)}(x_*^{(0)})|$ , 则有  $|\rho^{(0)}| \leq \rho_*^{(0)}$ .

若  $|\rho^{(0)}| = \rho_*^{(0)}$ , 则算法到此结束,  $\Phi_n^{(0)}(x)$  就是欲求的逼近多项式, 否则若  $|\rho^{(0)}| < \rho_*^{(0)}$ , 则算法转第 2 步.

第 2 步: 在第 1 步的基础上选取  $\{x_j^{(1)}\}_{j=0}^{n+1}$ , 分以下两种情形考虑:

若  $0 \leq x_*^{(0)} < x_0^{(0)}$  或  $x_{n+1}^{(0)} < x_*^{(0)} \leq 1$ , 则当  $f(x_*^{(0)}) - \Phi_n^{(0)}(x_*^{(0)})$  与  $f(x_0^{(0)}) - \Phi_n^{(0)}(x_0^{(0)})$  同号时, 就取  $x_0^{(1)} = x_*^{(0)}, x_j^{(1)} = x_j^{(0)}, j=1, 2, \dots, n+1$ ; 否则, 取  $x_0^{(1)} = x_*^{(0)}, x_j^{(1)} = x_{j-1}^{(0)}, j=1, 2, \dots, n+1$ ;

若  $x_j^{(0)} < x_*^{(0)} \leq x_{j+1}^{(0)}, 0 \leq j \leq n$ , 则当  $f(x_*^{(0)}) - \Phi_n^{(0)}(x_*^{(0)})$  与  $f(x_j^{(0)}) - \Phi_n^{(0)}(x_j^{(0)})$  同号时, 就取  $x_j^{(1)} = x_*^{(0)}, x_i^{(1)} = x_i^{(0)}$ ,

$i = 0, 1, \dots, n+1, i \neq j$ , 否则, 取  $x_{j+1}^{(1)} = x_s^{(0)}, x_i^{(1)} = x_i^{(0)}, i = 0, 1, \dots, n+1, i \neq j+1$ .

下面, 利用  $\{x_j^{(1)}\}_{j=0}^{n+1}$ , 按第 1 步的办法解得  $a_0^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}$  和  $\rho^{(1)}$ , 再记  $\Phi_n^{(1)}(x) = \sum_{i=0}^n a_i^{(1)} \varphi_i(x)$  以及

$$\rho_s^{(1)} = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - \Phi_n^{(1)}(x)| = |f(x_s^{(1)}) - \Phi_n^{(1)}(x_s^{(1)})|,$$

则有  $|\rho^{(1)}| \leq \rho_s^{(1)}$ .

若  $|\rho^{(1)}| = \rho_s^{(1)}$ , 则  $\Phi_n^{(1)}(x) = \sum_{i=0}^n a_i^{(1)} \varphi_i(x)$  即欲求的逼近多项式, 否则, 若  $|\rho^{(1)}| < \rho_s^{(1)}$ , 则以  $x_s^{(1)}, \{x_j^{(1)}\}_{j=0}^{n+1}$  和  $\Phi_n^{(1)}(x)$  分别代替  $x_s^{(0)}, \{x_j^{(0)}\}_{j=0}^{n+1}$  和  $\Phi_n^{(0)}(x)$ , 按第 2 步的办法继续进行下去, 如此, 直到第  $k$  步, 有  $|\rho^{(k)}| = \rho_s^{(k)}$  为止, 此时,  $\Phi_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^n a_i^{(k)} \varphi_i(x)$  即欲求逼近多项式.

在实际操作时, 可先选定一个公差  $\varepsilon_0$ , 进行了  $k$  步以后, 若有  $0 < \rho_s^{(k)} - |\rho^{(k)}| < \varepsilon_0$  时, 即可停止.

应用上述的 Remez 第 1 算法, 可求得  $[0, 1]$  上对等距曲线  $P_d(t)$  的近似最佳一致逼近曲线:

$$P_a(t) = (x_a(t), y_a(t)), 0 \leq t \leq 1.$$

其中,  $x_a(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) x_i^{(a)}, y_a(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) y_i^{(a)}, 0 \leq t \leq 1$ .

上述的 Remez 第 1 算法, 亦称单一交换法, 即从点  $\{x_j^{(0)}\}_{j=0}^{n+1}$  到  $\{x_j^{(1)}\}_{j=0}^{n+1}$  时, 其中仅变化了一点, 该点为误差函数在整个大区间上的某个最大值点. 我们也可以采用 Remez 第 2 算法<sup>[5,6]</sup>, 亦称同时交换法, 即从点  $\{x_j^{(0)}\}_{j=0}^{n+1}$  到  $\{x_j^{(1)}\}_{j=0}^{n+1}$  时, 其中同时变化了多点, 这些点为误差函数在每个函数值同号的小区间上的某个最大值点. 因此, 同时交换法有可能使得  $\{x_j^{(1)}\}_{j=0}^{n+1}$  中完全不含有  $\{x_j^{(0)}\}_{j=0}^{n+1}$  中的点. 可以证明, 在迭代次数  $k$  较少以及逼近阶数  $n$  较小的情况下, Remez 第 1 算法比 Remez 第 2 算法具有更高的收敛效率; 在迭代次数  $k$  较多以及逼近阶数  $n$  较大的情况下, Remez 第 2 算法比 Remez 第 1 算法具有更高的收敛效率.

### 3 上控最佳一致逼近原理构造圆域 Bézier 曲线的误差半径函数

为构造圆域 Bézier 曲线, 我们分两步进行:

第 1 步: 选取一条尽量狭窄的以连续函数  $r(t), 0 \leq t \leq 1$  为误差半径的圆域曲线, 包围已知平面 Bézier 曲线的等距曲线  $P_d(t)$ .

方法 1:  $r(t) = \max(|x_a(t) - x_d(t)|, |y_a(t) - y_d(t)|), 0 \leq t \leq 1$ .

方法 2:  $r(t) = \sqrt{(x_a(t) - x_d(t))^2 + (y_a(t) - y_d(t))^2}, 0 \leq t \leq 1$ .

方法 3: 先作一条通过定点  $P_a(t)$ , 方向为  $(-y'_a(t), x'_a(t))$  的直线, 与等距线  $P_d(t)$  交于点  $(x_d(t_0), y_d(t_0)), t_0$  可由如下表达式求出:

$$x'_a(t)(x_d(t_0) - x_a(t)) + y'_a(t)(y_d(t_0) - y_a(t)) = 0,$$

再令

$$r(t) = \sqrt{(x_a(t) - x_d(t_0))^2 + (y_a(t) - y_d(t_0))^2}, 0 \leq t \leq 1.$$

容易看出, 相应于任意时刻  $t_0 \in [0, 1]$ , 一定存在某个时刻  $t \in [0, 1]$ , 使得  $P_d(t_0) \in [P_a(t); r(t)]$ , 即圆域  $\{|P_a(t); r(t)|, 0 \leq t \leq 1\}$  是对点  $\{P_d(t_0) | 0 \leq t_0 \leq 1\}$  的一个闭覆盖. 换言之, 我们求得了包围等距曲线  $P_d(t)$  的一条圆域曲线.

以上确定误差半径的 3 种方法中, 方法 1 和方法 2 计算简单, 但误差较大; 方法 3 采用变参数误差分析的方法, 几何意义鲜明, 虽然计算较繁, 但误差较小.

第 2 步: 选取一条尽量狭窄的圆域 Bézier 曲线, 包围第 1 步中选取的圆域曲线. 由 Weierstrass 逼近定理可知, 对已知平面 Bézier 曲线的等距曲线  $P_d(t) = (x_d(t), y_d(t)), 0 \leq t \leq 1$  和任意给定的公差  $\varepsilon > 0$ , 一定同时存在次数  $n$

充分大的两个多项式  $x_d^*(t)$  和  $y_d^*(t)$ , 使得对  $t \in [0, 1]$  一致地有

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |x_d(t) - x_d^*(t)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}, \max_{0 \leq t \leq 1} |y_d(t) - y_d^*(t)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}.$$

特别是取在  $x_d^*(t)$  和  $y_d^*(t)$  为  $x_d(t)$  和  $y_d(t)$  的最佳一致逼近多项式时, 以上两式自然成立.

再设  $x_a(t)$  和  $y_a(t)$  分别是对多项式  $x_d^*(t)$  和  $y_d^*(t)$  应用 Remez 算法在第  $k$  次迭代后最终确定的逼近多项式, 取 Bernstein 基函数  $B_i^n(t)$  为定义 4 中的  $\varphi_i(x)$ , 根据定理 1, 又有

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |x_a(t) - x_d^*(t)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}, \max_{0 \leq t \leq 1} |y_a(t) - y_d^*(t)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}.$$

综合上述 4 式, 我们就有

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |x_a(t) - x_d(t)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \max_{0 \leq t \leq 1} |y_a(t) - y_d(t)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

容易验证, 对于上述第 1 步中 3 种选取方法的任何一种误差半径函数  $r(t)$ , 我们都有  $r(t) < \varepsilon, \forall t \in [0, 1]$ . 由此得到如下定理.

**定理 2.** 对已知平面 Bézier 曲线的等距曲线  $P_d(t) = (x_d(t), y_d(t))$  和任意给定的公差  $\varepsilon > 0$ , 当逼近的中心曲线次数  $n$  充分大时, 总存在一条平凡生成的  $n$  次圆域 Bézier 曲线, 其中心表达形式中的中心曲线  $P_a(t) = (x_a(t), y_a(t))$  由 Remez 算法构造得到, 而误差半径函数为  $r_a(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)r_i^{(a)}$ , 其中取  $r_i^{(a)} \equiv \max_{0 \leq t \leq 1} r(t)$ ,  $r(t)$  为用上述第 1 步中 3 种方法的任何一种构造得到, 使得该圆域 Bézier 曲线能够将等距曲线  $P_d(t)$  包围在内, 并且满足  $r_a(t) < \varepsilon, \forall t \in [0, 1]$ .

值得注意的是, 一般的计算机辅助设计系统只能处理一定次数的多项式曲线, 实质上, 已知平面 Bézier 曲线的等距曲线的最佳逼近曲线的次数是受到制约的. 因此, 我们转而考虑在半径函数  $r(t)$  已经确定, 且中心曲线次数  $n$  固定的条件下, 让圆域 Bézier 逼近误差最小. 即在所有满足不等式  $p_n(t) \geq r(t), t \in [0, 1]$  的  $n$  次多项式函数  $p_n(t)$  中, 寻找一个使得  $\max_{0 \leq t \leq 1} |p_n(t) - r(t)|$  最小的多项式, 不妨称其为  $n$  次上控最佳一致逼近多项式函数. 这种函数的存在性由附录的定理 A 给出.

尽管存在性定理可以被证明, 但是具体寻找出一个非线性约束条件下的  $n$  次上控最佳一致逼近多项式函数却是逼近论的一个经典问题, 又是一个难题<sup>[7]</sup>. 为此, 下面给出上述问题的一个近似算法.

第 1 步: 设闭区间  $[0, 1]$  上  $n$  次多项式的全体为  $\Pi_n$ ,  $r(t)$  的  $n$  次最佳一致逼近多项式为  $r_n^*(t)$ ,  $\Delta(r, \Pi_n) = \max_{0 \leq t \leq 1} |r(t) - r_n^*(t)| = \min_{r_n(t) \in \Pi_n} \max_{0 \leq t \leq 1} |r(t) - r_n(t)|$ . 再设  $r_n^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^n r_i^{(k)} B_i^n(t)$  为对连续函数  $r(t)$  施行 Remez 算法经过第  $k$  次修正后确定的  $n$  次多项式, 用来逼近  $r_n^*(t)$ . 由定理 1 得到

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |r_n^{(k)}(t) - r_n^*(t)| \leq \varepsilon_k, \varepsilon_k \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty.$$

于是,

$$r_n^*(t) - \varepsilon_k \leq r_n^{(k)}(t) \leq r_n^*(t) + \varepsilon_k, t \in [0, 1] \tag{1}$$

由  $r_n^*(t)$  的性质得知

$$r(t) - \Delta(r, \Pi_n) \leq r_n^*(t) \leq r(t) + \Delta(r, \Pi_n), t \in [0, 1]. \tag{2}$$

综合以上两式得到

$$-(\varepsilon_k + \Delta(r, \Pi_n)) \leq r_n^{(k)}(t) - r(t) \leq \varepsilon_k + \Delta(r, \Pi_n), t \in [0, 1].$$

所以,

$$E_k = \max_{0 \leq t \leq 1} |r_n^{(k)}(t) - r(t)| \leq \varepsilon_k + \Delta(r, \Pi_n) \tag{3}$$

第 2 步: 由上式易知

$$0 \leq r_n^{(k)}(t) + E_k - r(t) \leq 2E_k, t \in [0, 1].$$

若记

$$r_a(t) = r_n^{(k)}(t) + E_k \quad (4)$$

则有

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |r_a(t) - r(t)| \leq 2E_k, r_a(t) \geq r(t), t \in [0, 1] \quad (5)$$

由上式及式(2)可得

$$r_a(t) - r_n^*(t) \geq -\Delta(r, \Pi_n), t \in [0, 1].$$

又由式(1),(3),(4)可得

$$r_a(t) - r_n^*(t) \leq 2\varepsilon_k + \Delta(r, \Pi_n), t \in [0, 1].$$

综合以上两式可得

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |r_a(t) - r_n^*(t)| \leq 2\varepsilon_k + \Delta(r, \Pi_n) \quad (6)$$

由式(5)我们知道,由式(4)定义的  $n$  次多项式函数  $r_a(t)$  上控  $r(t)$ .

再由式(6)可知,函数  $r_a(t)$  与  $r(t)$  的  $n$  次最佳一致逼近多项式  $r_n^*(t)$  之间最多只相差  $2\varepsilon_k + \Delta(r, \Pi_n)$ . 其中  $\varepsilon_k \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty, \Delta(r, \Pi_n) = \min_{r_n(t) \in \Pi_n} \max_{0 \leq t \leq 1} |r_n(t) - r(t)|$ , 所以  $r_a(t)$  可近似地看作是  $r(t)$  的  $n$  次上控最佳一致逼近多项式函数.

关于  $r_a(t)$  的算法,可由  $r_n^{(k)}(t)$  的定义得出

$$r_a(t) = \sum_{i=0}^n r_i^{(a)} B_i^n(t), r_i^{(a)} = r_i^{(k)} + E_k, t \in [0, 1].$$

由前面的分析知道,对任意一个时刻  $t_0 \in [0, 1]$ ,一定存在某个时刻  $t \in [0, 1]$ ,使得点  $P_d(t_0) \in [P_a(t); r(t)]$ ,即  $\|P_d(t_0) - P_a(t)\|_2 \leq r(t)$ ,现在由式(5)可知  $r(t) \leq r_a(t)$ ,于是又有  $P_d(t_0) \in [P_a(t); r_a(t)]$ ,其中  $r_a(t)$  是  $[0, 1]$  上的  $n$  次多项式函数.这就表明,我们已经选出一条尽量狭窄的圆域 Bézier 曲线  $[P_a(t); r_a(t)]$ ,包围已知平面 Bézier 曲线的等距曲线  $P_d(t)$ .这里我们指出,本文提出和用到的一整套逼近方法容易推广到对任意的连续曲线,而不仅局限于 Bézier 曲线的等距曲线.

#### 4 圆域 Bézier 曲线的等距逼近的应用及实例

上一节中,我们已经在公差  $\varepsilon$  预先给定的情况下,以及公差没有预先给定但是圆域 Bézier 曲线的次数  $n$  预先给定的情况下,分别求出了一条尽量狭窄的圆域 Bézier 曲线  $[P_a(t); r_a(t)]$ ,包围已知平面 Bézier 曲线的等距曲线  $P_d(t)$ .

如果把上述圆域 Bézier 曲线  $[P_a(t); r_a(t)]$  形象地看成是一条“带子”,那么以这条带子为基准,我们就可以对用各种方法建立起来的对于已知平面 Bézier 曲线的等距曲线  $P_d(t)$  的逼近 Bézier 曲线作一个分类:完全落在此带子内部的逼近 Bézier 曲线为第 1 类,而不完全落在此带子内部的逼近 Bézier 曲线为第 2 类.显然:

- 当公差  $\varepsilon$  预先给定时,第 1 类逼近 Bézier 曲线满足预先的公差要求,第 2 类逼近 Bézier 曲线不满足预先的公差要求.由于圆域 Bézier 曲线包含了控制顶点  $P_i \in [P_i], i = 0, 1, \dots, n$  的所有  $n$  次 Bézier 曲线,所以这些  $n$  次 Bézier 曲线都是满足公差  $\varepsilon$  要求的对已知平面 Bézier 曲线的等距曲线的一种合格的逼近曲线.

- 当公差  $\varepsilon$  没有预先给定但是逼近 Bézier 曲线的次数  $n$  预先给定时,第 1 类逼近 Bézier 曲线一定比第 2 类逼近 Bézier 曲线的逼近效果要好.

也就是说,利用圆域 Bézier 曲线和公差  $\varepsilon$  的调节作用,可以把各种等距逼近曲线的逼近效果作一番比较.在产品外形检验中有类似的作用.

例 1: 设已知的平面 Bézier 曲线为  $P(t) = (x(t), y(t))$ , 其 6 个控制顶点为:

$$P_0 = (220, 100), P_1 = (80, 140), P_2 = (140, 180), P_3 = (280, 230), P_4 = (140, 290), P_5 = (220, 330).$$

它的距离  $d = -20$  的负等距曲线为  $P_d(t) = (x_d(t), y_d(t))$ , 设公差  $\varepsilon$  没有预先给定,但是圆域 Bézier 曲线的次数预先给定为  $n = 5$ . 那么使用 Remez 第 1 算法,分别经过 3 次迭代和 2 次迭代就可以分别求出  $x_d(t)$  与  $y_d(t)$  的

的 5 次近似最佳一致逼近多项式  $x_a(t), y_a(t)$ . 即我们得到了圆域 Bézier 曲线的中心曲线  $P_a(t) = (x_a(t), y_a(t))$ , 它的 6 个控点分别为

$$Q_0 = (215, 81), Q_1 = (26, 141), Q_2 = (163, 248), Q_3 = (232, 145), Q_4 = (123, 325), Q_5 = (211, 348).$$

并且满足:

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{x_a(t) - x_d(t)}{x_d(t)} \right| \leq 1.79 \times 10^{-7}, \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{y_a(t) - y_d(t)}{y_d(t)} \right| \leq 1.18 \times 10^{-7}.$$

下面,先用方法 3 求出表示误差半径的连续函数  $r(t)$ ,如图 1 所示的虚线.为求相应的 5 次近似上控最佳一致逼近多项式  $r_a(t)$ ,首先应使用 Remez 算法,按照算法的终止条件,经过 6 次迭代,求出  $r(t)$  的 5 次近似最佳一致逼近多项式  $r_5^{(6)}(t)$ ,其 Bézier 纵标和相应的  $E_6$  值为

$$r_0^{(6)} = 0.65, r_1^{(6)} = 1.39, r_2^{(6)} = 2.36, r_3^{(6)} = 2.27, r_4^{(6)} = 3.26, r_5^{(6)} = 0.03, E_6 = \max_{0 \leq t \leq 1} |r_5^{(6)}(t) - r(t)| = 1.20.$$

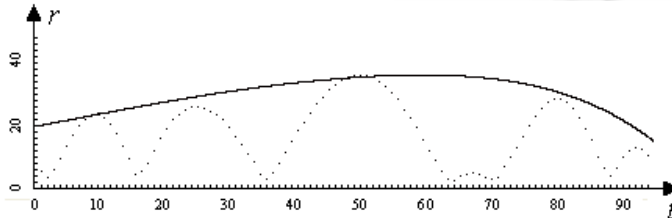


Fig.1 The error radius function  $r(t)$  (dashed) and its upper optimal and uniform approximating polynomial  $r_a(t)$  (real line)

图 1 误差半径函数  $r(t)$  (虚线)与其近似上控最佳一致逼近多项式  $r_a(t)$  (实线)

于是,进一步求得  $r_a(t)$  的 Bézier 纵标为

$$r_0^{(a)} = 1.85, r_1^{(a)} = 2.59, r_2^{(a)} = 3.56, r_3^{(a)} = 3.47, r_4^{(a)} = 4.46, r_5^{(a)} = 1.88.$$

由此得到误差函数  $r(t)$  的 5 次近似上控最佳一致逼近多项式  $r_a(t)$ ,如图 1 所示的实线.

这样,把中心曲线及近似上控最佳一致逼近多项式函数结合起来,我们就选出一条尽量狭窄的圆域 Bézier 曲线  $[P_a(t); r_a(t)]$ ,包围已知平面 Bézier 曲线等距曲线  $P_d(t)$ ,如图 2 所示.

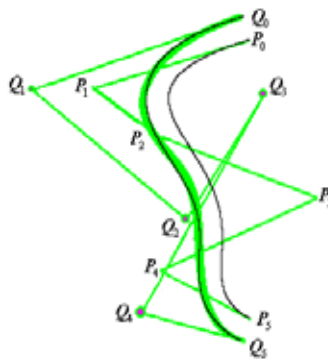


Fig.2 The Disk Bézier curve of 5 degree (shadow area)

图 2 5 次圆域 Bézier 曲线(阴影区域)

为了考核“带子”的选取是否得当,我们考察了 Legendre 最佳平方逼近法<sup>[8]</sup>所产生的平面 Bézier 曲线的等距曲线在本文生成的带子内部摆动情况.为此,分两种情形考察:

情形 1:基于控制顶点偏移的无端点约束 5 次 Legendre 最佳平方逼近法.设  $\{L_k(t)\}_{k=0}^n, t \in [0, 1]$  为 Legendre

基底,则逼近曲线的参数形式为  $\left( \sum_{k=0}^5 x_k L_k(2t-1), \sum_{k=0}^5 y_k L_k(2t-1) \right)$ . 曲线如图 3(左)所示,其中控制顶点坐标为

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-16.7126, -3.1949, 5.9810, -0.5996, 5.6125, 1.0136),$$

$$(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (1.7952, 11.1133, -10.2640, 13.1161, 10.1664, -5.8464).$$

情形 2:基于单位法矢逼近的有端点约束 17 次 Lengendre 最佳平方逼近法.逼近曲线的参数形式为

$$B_0^{17}(t)\mathbf{n}_d(0) + (1-t)t\left(\sum_{k=0}^{15}x_kL_k(2t-1), \sum_{k=0}^{15}y_kL_k(2t-1)\right) + B_{17}^{17}(t)\mathbf{n}_d(1).$$

经计算易知,  $\mathbf{n}_d(0) = (-5.494, -19.230)$ ,  $\mathbf{n}_d(1) = (-8.944, 17.888)$ .曲线如图 3(右)所示,其中控制顶点坐标为  $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}) = (-92.1750, -30.4489, -31.6801, -25.2502, 27.5695, 1.5684, -0.2166, 21.7478, -1.8100, -4.7364, 3.3019, -6.1165, -1.9999, 2.7259, -2.0942, 0.6406)$ .

$$(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15}) = (-1.3181, 8.0942, -67.1657, 68.8926, 43.8610, -6.9312, 18.1920, -6.1842, -15.9288, 5.4182, -4.6761, -4.6937, 5.5887, -0.3138, -0.2914, 2.8971).$$

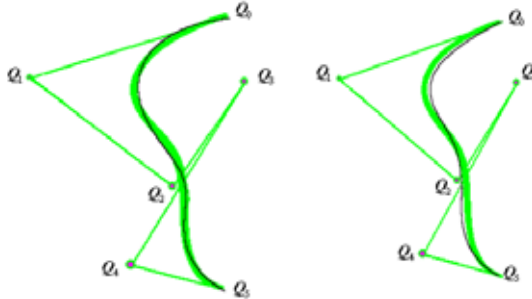


Fig.3 The approximate offset curve using Lengendre approximation method: case1 (left), case2 (right)

图 3 用 Lengendre 最佳平方逼近得到的等距逼近曲线:情形 1(左),情形 2(右)

由图 3 可见,情形 1 中的等距逼近曲线几乎落在带子中,而情形 2 中的等距逼近曲线却部分留在带子之外.这是因为逼近曲线有严格端点约束所致.本文的圆域 Bézier 曲线提供了一种判别等距曲线逼近效果的手段.

最后,从计算所得的圆域控制顶点里,如果我们分别如此取两批点列:

$$Q_0 = (216, 81), Q_1 = (26, 143), Q_2 = (166, 248), Q_3 = (232, 148), Q_4 = (127, 325), Q_5 = (211, 349) \text{ (图 4 中左图);}$$

$$Q_0 = (215, 80), Q_1 = (24, 141), Q_2 = (163, 245), Q_3 = (229, 145), Q_4 = (123, 329), Q_5 = (210, 348) \text{ (图 4 中右图)}$$

生成两条 Bézier 曲线,如图 4 所示,再与图 3 中两条 Lengendre 最佳平方逼近曲线进行比较,可知逼近程度更优.

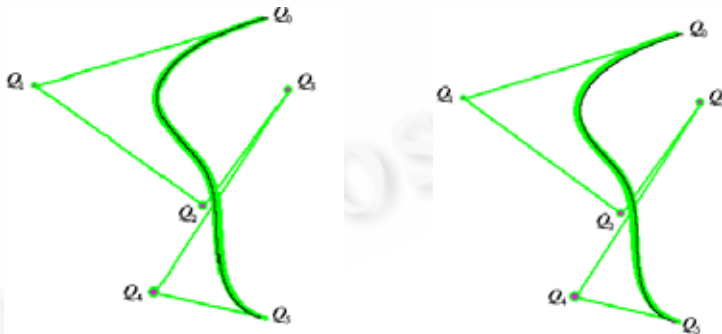


Fig.4 The specific application of disk Bézier curve in geometric design

图 4 圆域 Bézier 曲线在几何设计中的具体应用

这说明利用圆域 Bézier 逼近可以很方便地得到对于已知 Bézier 曲线的等距曲线的无数条逼近曲线,它们一般无法用以往的等距逼近方法得到,而精度却比 Lengendre 最佳平方逼近曲线来得高,同时具有适合于 CAD 系统应用的 Bézier 形式,因而在几何设计中大有用武之地.

References:

[1] Sederberg TW, Farouki RT. Approximation by Interval Bezier curve. IEEE Computing Graphics and its Application, 1992,12(5):87-95.



- [2] Lin Q, Rokne JG. Disk Bezier curve. Computer Aided Geometric Design, 1998,15(7):721-737.
- [3] Wang DR, Yang ZH. An Introduction to Numerical Approximation. Beijing: Higher Education Press, 1990.56-63 (in Chinese).
- [4] Xie TF, Zhou SP. Approximation Theory of Real Functions. Hangzhou: Hangzhou University Press, 1997. 49-52 (in Chinese).
- [5] Wang DR, Yang ZH. An Introduction to Numerical Approximation. Beijing: Higher Education Press, 1990. 51-56 (in Chinese).
- [6] Jiang EX, Zhao FG. Numerical Approximation. Shanghai: Fudan University Press, 1995. 117-118 (in Chinese).
- [7] Dzijadyk BK (written), Shen SC, Fang QQ, Lou YR, Xing FC (translated). Beijing: Beijing University Press, 1982. 83-89 (in Chinese).
- [8] Liu LG, Wang GJ. Optimal approximation to curve offset based on shifting control points. Journal of Software, 2002,13(3), 398-403 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/13/398.pdf>

#### 附中文参考文献:

- [3] 王德人,杨忠华.数值逼近引论.北京:高等教育出版社,1990.56-63.
- [4] 谢庭藩,周颂平.实函数逼近论.杭州:杭州大学出版社,1997.49-52.
- [5] 王德人,杨忠华.数值逼近引论.北京:高等教育出版社,1990.51-56.
- [6] 蒋尔雄,赵风光.数值逼近.上海:复旦大学出版社,1995.117-118.
- [7] 嘉德克 BK 著,沈燮昌,方企勤,娄元仁,刑富冲,译.多项式一致逼近函数导论.北京:北京大学出版社,1982.83-89.
- [8] 刘利刚,王国瑾.基于控制顶点偏移的等距曲线最优逼近.软件学报,2002,13(3):398-403. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/13/398.pdf>

#### 附录

定理 A. 对于  $[0, 1]$  上给定的一个非负连续函数  $r(t)$ , 以及固定的次数  $n$ , 一定存在一个满足  $p_n(t) \geq r(t), t \in [0, 1]$  的  $n$  次多项式函数  $p_n(t)$ , 使得它在所有满足此性质的  $n$  次多项式函数中,  $\max_{0 \leq t \leq 1} |p_n(t) - r(t)|$  达到最小. 特别是当  $r(t)$  为多项式函数时,  $p_n(t)$  就取为  $r(t)$ .

证明: 设  $r(t)$  和  $f(t)$  为闭区间  $[0, 1]$  上的连续函数,  $\Pi_n$  为闭区间  $[0, 1]$  上的  $n$  次多项式全体, 再记  $A = \{p_n(t) - r(t) \mid p_n(t) \in \Pi_n, p_n(t) - r(t) \geq 0, t \in [0, 1]\}$ ,  $\|\cdot\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$ . 容易证明,  $A$  在  $\|\cdot\|_\infty$  定义下是闭集. 记  $m = \inf\{\|p_n(t) - r(t)\|_\infty \mid p_n(t) - r(t) \in A\}$ , 容易证明  $m \geq 0$ . 考虑到  $r(t)$  为闭区间  $[0, 1]$  上的连续函数, 取  $p_n^0(t) - r(t) \in A, \exists l \in R, \forall t \in [0, 1],$  有  $p_n^0(t) - r(t) \leq l$ , 从而有  $0 \leq m \leq l$ . 接下来可以取到序列  $p_n^{(k)}(t) - r(t) \in A$ , 使得  $\|p_n^{(k)}(t) - r(t)\|_\infty \rightarrow m, k \rightarrow +\infty$ . 因此,  $\exists K_0 \in Z^+, \forall k \geq K_0,$  有  $\|p_n^{(k)}(t) - r(t)\|_\infty \leq l$ . 当然  $\forall k \geq K_0, \forall t \in [0, 1],$  有  $0 \leq p_n^{(k)}(t) - r(t) \leq l$ . 因此,  $p_n^{(k)}(t) - r(t)$  在  $[0, 1]$  上一致有界. 又因为有限维空间  $A$  是局部紧的, 因此  $\{p_n^{(k)}(t) - r(t)\}$  有收敛子列  $\{p_n^{(k_j)}(t) - r(t)\}, p_n^{(k_j)}(t) - r(t) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} p_n(t) - r(t), j \rightarrow +\infty$ . 由  $A$  是闭的可知,  $p_n(t) - r(t) \in A$ . 所以  $\|p_n^{(k_j)}(t) - r(t)\|_\infty \rightarrow \|p_n(t) - r(t)\|_\infty$ , 其中  $p_n(t) - r(t) \in A$ . 再由  $\|p_n^{(k)}(t) - r(t)\|_\infty \rightarrow m, k \rightarrow +\infty$  以及  $\|p_n^{(k)}(t) - r(t)\|_\infty$  和  $\|p_n^{(k_j)}(t) - r(t)\|_\infty$  极限的同一性可知:  $m = \|p_n(t) - r(t)\|_\infty, p_n(t) - r(t) \in A$ .