

5 元饱和最优布尔函数的计数问题*

谢敏^{1,2+}, 裴定一¹

¹(信息安全国家重点实验室(中国科学院研究生院),北京 100049)

²(计算机网络与信息安全教育部重点实验室(西安电子科技大学),陕西 西安 710071)

On the Number of 5-Variable Best Boolean Functions

XIE Min^{1,2+}, PEI Ding-Yi¹

¹(State Key Laboratory of Information Security (Graduate School of Chinese Academy of Sciences), Beijing 100049, China)

²(Key Laboratory of Computer Networks and Information Security (Xidian University), Ministry of Education, Xi'an 710071, China)

+ Corresponding author: E-mail: xiekemin@163.com

Received 2003-11-17; Accepted 2004-03-02

Xie M, Pei DY. On the number of 5-variable best boolean functions. *Journal of Software*, 2005,16(4):595-600.

DOI: 10.1360/jos160595

Abstract: The n -variable and m -resilient ($m > n/2 - 2$) Boolean functions achieving both the upper bound on nonlinearity $2^{n-1} - 2^{m+1}$ and the upper bound on algebraic degree $n - m - 1$ must have three valued Walsh spectra: $0, \pm 2^{m+2}$, which are called saturated best (SB in short). Using the known results of weight distributions of the cosets of the (32,6) Reed-Muller code and a new construction method for SB functions gives the number of the 5-variable SB functions.

Key words: nonlinearity; correlation immunity; Walsh transform; best function

摘要: 同时达到代数次数上界 $n - m - 1$ 和非线性度上界 $2^{n-1} - 2^{m+1}$ 的 n 元 m 阶弹性布尔函数 ($m > n/2 - 2$) 具有 3 个 Walsh 谱值: $0, \pm 2^{m+2}$, 这样的函数被称为饱和最优函数 (saturated best, 简称 SB)。将利用 (32,6) Reed-Muller 码陪集重量的分布, 从一种全新的构造角度出发, 给出 $n=5$ 的饱和最优函数的个数。

关键词: 非线性度; 相关免疫; Walsh 谱; 最优函数

中图法分类号: TP309 文献标识码: A

布尔函数在信息安全领域有着很好的应用, 具有良好密码性质的函数在密码体制中发挥着重要作用。具有 3 个 Walsh 谱值的布尔函数受到了广大学者的关注 (如 Sarkar^[5], Tarannikov^[9])。众所周知, n 元 m 阶弹性函数 ($m > n/2 - 2$) 最大可能的非线性度为 $2^{n-1} - 2^{m+1}$, 最大的代数次数为 $n - m - 1$, 同时达到这两个上界的函数具有 3 个 Walsh 谱值: $0, \pm 2^{m+2}$ 。这类平衡布尔函数被称为饱和最优函数 (saturated best, 简称 SB), 在流密码领域具有很好的

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.19931010 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.G1999035804 (国家重点基础研究发展规划(973))

作者简介: 谢敏(1976-), 女, 湖南桃源人, 博士, 主要研究领域为密码学, 信息安全; 裴定一(1941-), 男, 教授, 主要研究领域为密码学, 信息安全。

应用价值.对一个三谱值 n 元 m 阶弹性函数($m>n/2-2$),只要代数次数和非线性度之一达到其上界,则另一个亦达到其上界.

我们用 (n,m,d,x) 记非线性度为 x 代数次数为 d 的 n 元 m 阶弹性布尔函数.具有相同参数的函数 (n,m,d,x) 若存在,将是不唯一的.设整数 $i \geq 0, j \geq 1$, 令 $f_{i,0}$ 表示 $(3+2i, i, 2+i, 2^{2+2i}-2^{i+1})$ SB 函数(注意条件 $m>n/2-2$), $f_{i,j}$ 表示 $(n_j, m_j, 2+i, x_j)$ SB 函数,其中 $n_j=n_{j-1}+1, m_j=m_{j-1}+1, x_j=2x_{j-1}$.这样,我们得到了饱和最优函数序列 $SBS(i)$.可以证明任意 SB 函数一定属于某一序列 $SBS(i)(i \geq 0)$ ^[5].易证,若 $f_{i,j}$ 为函数序列 $SBS(i)$ 中的第 j 个函数,则 $g=Y \oplus f_{i,j}$ (Y 不出现在 $f_{i,j}$ 中)是序列 $SBS(i)$ 中的函数 $f_{i,j+1}$.利用类似 Maiorana-McFarland 函数构造方法,对所有 $t \geq t_0$ 可以构造 $f_{i,t}$, 其中 $2^{1+i}=3+i+t_0$ ^[5].

序列 $SBS(0)$ 和 $SBS(1)$ 中的所有函数都已知,而构造初始函数 $f_{i,0}, i \geq 2$ 还相当困难.Pasalic, Johansson, Maitra 和 Sarkar^[3]构造出了 $(7,2,4,56)$ 函数,即 $f_{2,0}$.但构造初始函数 $f_{i,0}, i \geq 3$ 还是一个未解决的问题.在 $(7,2,4,56)$ 函数已有的构造方法中^[3,11],都用到了 5 个变元的饱和最优函数,即 $(5,1,3,12)$ 函数.如果能搞清楚所有 $(5,1,3,12)$ 函数的分布性质,就能很好地控制 $(7,2,4,56)$ 函数的构造,进而推动变元个数更大的饱和最优函数的构造.本文将研究 $(5,1,3,12)$ 函数的计数问题,利用已有关于 $(32,6)$ Reed-Muller 码陪集重量分布的结果,确切地给出所有 $(5,1,3,12)$ 函数的总数.同时,我们也找到了 $(5,1,3,12)$ 函数的一些有价值的分布特征.

$\{0,1\}^n$ 上函数 f 的 Walsh 变换定义为

$$W_f(\lambda) = \sum_x (-1)^{f(x)+\lambda \cdot x}, \lambda \in \{0,1\}^n \quad (1)$$

其中 x 遍历 $\{0,1\}^n$.它的逆变换定义为

$$(-1)^{f(x)} = 2^{-n} \sum_{\lambda} W_f(\lambda) (-1)^{\lambda \cdot x} \quad (2)$$

其中 λ 遍历 $\{0,1\}^n$.我们有 Parseval 等式 $\sum_{\lambda} W_f^2(\lambda) = 4^n$.

1 关于三 Walsh 谱函数的构造

设 f 为具有三 Walsh 谱值: $0, \pm d$ 的 n 元函数, k 为使得 $W_f(\lambda) \neq 0$ 的 $\lambda \in \{0,1\}^n$ 的个数.由 Parseval 等式可知 $k \cdot d^2 = 2^n$, 可见 k 为一个平方数,记 $k=s^2$, 则有 $d^2=(2^n/s)^2$, 因而 $s|2^n$, 记 $s=2^r$, 则 $k=2^{2r}=4^r$.

设 $NZ(f) = \{\lambda | W_f(\lambda) \neq 0\} = \{\lambda_i = (\lambda_{1,i}, \dots, \lambda_{n,i})^t, 1 \leq i \leq k\}$ (这里视 λ_i 为列向量) 是函数 f 具有非零 Walsh 谱值的位置的集合.下文中, $NZ(f)$ 亦表示其相应的 $\{0,1\}$ 上的 $n \times k$ 阶矩阵.

为方便起见,我们引入 k 维向量 $h=(h_1, h_2, \dots, h_k)$ 来表示 f 非零 Walsh 谱值相应的符号,其中

$$h_i = \begin{cases} 0, & W_f(\lambda_i) > 0 \\ 1, & W_f(\lambda_i) < 0 \end{cases}$$

关于三谱值函数 f 的 $NZ(f)$, 我们有如下定理.不失一般性,我们假设 $f(0)=0$. Walsh 谱值为正值的个数 $a=2^{2r-1}+2^{r-1}$.

定理 1^[11] $NZ(f)$ 矩阵的 n 个行向量生成的线性子空间 $\{\lambda^j = (\lambda_{j,1}, \lambda_{j,2}, \dots, \lambda_{j,k}), 1 \leq j \leq 2^n\}$ 满足如下性质: 对任意 $j, 1 \leq j \leq 2^n$, 记 $\lambda^{j+} = (\lambda_{j,1}, \lambda_{j,2}, \dots, \lambda_{j,a})$, $\lambda^{j-} = (\lambda_{j,a+1}, \lambda_{j,a+2}, \dots, \lambda_{j,k-a})$, 其中, $a=2^{2r-1}+2^{r-1}$, $h_l = 0 (1 \leq l \leq a)$, $h_l = 1 (1 \leq l \leq k-a)$, 则 λ^{j+} 与 λ^{j-} 两部分具有相同个数的 1, 或相同个数的 0.

基于定理 1, 我们可以利用下面的方法来构造三谱值布尔函数.

寻找 $(n+1) \times k$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix} NZ(f) \\ h \end{pmatrix}$ 使 $NZ(f)$ 满足定理 1 中的条件, 且其各列向量两两不同. 其中, $\begin{pmatrix} NZ(f) \\ h \end{pmatrix}$ 表示将符号向量 h 添加在 $NZ(f)$ 后.

易知在不考虑 $\begin{pmatrix} NZ(f) \\ h \end{pmatrix}$ 各列的顺序下, 不同的 $\begin{pmatrix} NZ(f) \\ h \end{pmatrix}$ 对应不同的函数. 这样构造函数 f 的问题, 就转为构造相应的矩阵 $\begin{pmatrix} NZ(f) \\ h \end{pmatrix}$ 了. 如果能找到该相应的矩阵, 我们就可以利用 Walsh 逆变换(2) 得到函数 f .

具体来说,对(5,1,3,12)函数,有 $d=2^{m+2}=2^{1+2}=8$,则 $k=4^{5-1-2}=16$,构造(5,1,3,12)函数就等于构造满足以下条件的矩阵 $\begin{pmatrix} NZ(f) \\ h \end{pmatrix}_{6 \times 16}$: $NZ(f)$ 满足定理 1 中条件; $NZ(f)$ 各列向量(16 个)两两不同;16 个列向量的重量均大于等于 2.(☆)

2 (5,1,3,12)函数的计数

文献[1]给出了(32,6)Reed-Muller 码陪集重量分布的结果,为我们提供了寻找(5,1,3,12)函数的范围.

定义等价关系^[1]:5 元函数 f 和 g 是等价的当且仅当存在 5 阶二元可逆矩阵 $\mu, a, b \in \{0,1\}^5$ 及 $c \in \{0,1\}$, 使

$$g(x) = f(x \cdot \mu + a) + x \cdot b + c \tag{3}$$

这里,我们视 x, a 为行向量, b 为列向量.

定理 2^[1]. 按以上等价关系,5 个变量的布尔函数可分为 48 个等价类,其中次数为 3,非线性度为 12 的等价类仅有如下两个:(1) $x_1x_2x_3+x_1x_4+x_2x_5+A_5(x)$;(2) $x_1x_2x_3+x_1x_4x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_5+A_5(x)$.其中, $A_5(x)$ 为 5 元仿射函数的集合.

下文中所说的“函数陪集”是指关于仿射函数 $A_5(x)$ 的陪集.

引理 1. 在等价类(1),(2)中,每一函数陪集内的平衡函数占陪集内函数总数的一半.

证明:由文献[1]可知,两个等价类中每一函数 Walsh 谱值非零的个数均为 16 个.注意到,函数的非零 Walsh 谱值个数即为函数陪集中不平衡函数个数的一半.因而,每一函数陪集中有 32 个平衡函数,32 个非平衡函数.由此得证. \square

引理 2^[7]. 在变量的仿射变换作用下,函数的代数次数、非线性度及平衡性是不变的.

由此得知,要寻找(5,1,3,12)函数,只需考虑定理 2 中的两个等价类.

下面我们来考察一下确定等价关系的变换(3)对函数 f 所对应的矩阵 $\begin{pmatrix} NZ(f) \\ h \end{pmatrix}$ 有什么作用.

引理 3. f, g 为 5 元布尔函数, $g(x) = f(xM + a) + x \cdot b + c$, 其中 M 为 5 阶二元可逆矩阵, $a, b \in \{0,1\}^5, c \in \{0,1\}$, 令 f, g 对应的符号向量为 h_f, h_g , 则

$$(1) NZ(g) = M \cdot NZ(f) + B, B = \overbrace{(b, b, \dots, b)}^{16}, (2) h_g = h_f + h, \text{ 其中 } h = a \cdot NZ(f) + C, C = \overbrace{(c, c, \dots, c)}^{16}.$$

证明:考虑两函数的 Walsh 变换,我们有

$$W_f(\lambda) = (-1)^{a\lambda+c} W_g(M \cdot \lambda + b) \tag{*}$$

事实上,

$$\begin{aligned} (-1)^{a\lambda+c} W_g(M \cdot \lambda + b) &= (-1)^{a\lambda+c} \sum_{x \in \{0,1\}^5} (-1)^{g(x)+x(M \cdot \lambda + b)} = \sum_{x \in \{0,1\}^5} (-1)^{f(xM+a)+x \cdot b + c + x(M \cdot \lambda + b) + a\lambda + c} \\ &= \sum_{x \in \{0,1\}^5} (-1)^{f(xM+a)+(xM+a)\lambda} = W_f(\lambda). \end{aligned}$$

由(*)可知, M, b 改变函数非零 Walsh 谱位置, a, c 改变函数非零 Walsh 谱值的符号. 由此即得引理结论. \square

由我们的构造方法及引理 3 易得下面的推论.

推论 1. 若 $f(xM)$ 为(5,1,3,12)函数, M 为 5 阶二元可逆矩阵, 则对 M 进行行间置换得到 M' , 亦有 $f(xM')$ 为(5,1,3,12)函数.

我们可以验证以下结果.

引理 4. 在等价类(1)(2)中,每一函数陪集中的平衡函数,可由其中任一平衡函数 $f(x)$ 经变换 $f(xM+a)+c$ 得到, 其中, M 为 5 阶二元可逆矩阵, $a \in \{0,1\}^5, c \in \{0,1\}$.

将全体形如 $\varphi: f \mapsto \varphi(f) = f(xM+a)+c$ (其中 M 为 5 阶二元可逆矩阵, $a \in \{0,1\}^5, c \in \{0,1\}$) 的变换组成的群记为 ρ .

引理 5. 在等价类(1)中任取平衡函数 $f(x)$, 该等价类中平衡函数可由 $f(x)$ 经 ρ 中的变换得到. 同样结论对等价类(2)也成立.

证明:设 $g(x)$ 为等价类(1)中的任意一个平衡函数,因它与 $f(x)$ 等价,故有 $g(xM+a)+x \cdot b+c=f(x)$,即

$$g(xM+a)+c=f(x)+x \cdot b,$$

上式左端为平衡函数,所以由引理 2 右端也为平衡函数,且与 $f(x)$ 属于同一函数陪集,由引理 4,存在 $\phi \in \rho$,使

$$g(xM+a)+c=\phi(f),$$

左端也可表示为 $\phi'(g)$ ($\phi' \in \rho$),故 $g=(\phi')^{-1}\phi(f)$. □

在等价类(1),(2)中,分别取平衡函数 $f_1(x), f_2(x)$. (5,1,3,12) 函数一定是平衡的,故

$$G_i = \{ \phi(f_i) | \phi \in \rho, \phi(f_i) \text{ 为 } (5,1,3,12) \text{ 函数} \}, i=1,2.$$

即分别为等价类(1)与(2)中的所有(5,1,3,12)函数.以 G 表示全体(5,1,3,12)函数,我们有 $G=G_1 \cup G_2$.由引理 2,等价类(1)、(2)中的函数为(5,1,3,12)函数,当且仅当它为 1 阶相关免疫函数.

考虑 G_i 中的函数个数.对一个固定好的可逆矩阵 M ,若 $f_i(xM)$ 是 1 阶相关免疫函数,则对任意 a 和 c , $f_i(xM+a)+c$ 也是 1 阶相关免疫函数,因它与 $f_i(xM)$ 具有相同的 NZ 集合(引理 3).反之,若对某一 a 和 c , $f_i(xM+a)+c$ 是 1 阶相关免疫函数,同样由引理 3 可知, $f_i(xM)$ 也是 1 阶相关免疫函数.

令 $\mu_i = \{ Mf_i(xM) \text{ 为 } (5,1,3,12) \text{ 函数}, M \text{ 为可逆矩阵} \}, i=1,2$. 可见 $|G_i| = 64|\mu_i|$.

在 G_i 中,同一函数会重复出现.若 $\phi_1(f_i) = \phi_2(f_i), \phi_1, \phi_2 \in \rho$, 则 $f_i = \phi_1^{-1}\phi_2(f_i)$. 定义 ρ 的子群

$$\rho_i = \{ \phi \in \rho | f_i = \phi(f_i) \}, i=1,2.$$

ρ 中关于 ρ_i 的同一陪集中的变换将 f_i 变为同一个函数,可见 G_i 中同一函数重复出现的次数为 $|\rho_i|$. 上述推论即证明了下面的定理.

定理 3. $|G| = |G_1| + |G_2| = 64 \left(\frac{|\mu_1|}{|\rho_1|} + \frac{|\mu_2|}{|\rho_2|} \right).$

3 计算结果

我们取等价类(1)中函数 $f_1(x) = x_1x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_5 + x_3$, 取等价类(2)中函数 $f_2(x) = x_1x_2x_3 + x_1x_4x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + x_4 + x_5$.

以下分别来确定 $|\mu_i|$ 及 $|\rho_i|, i=1,2$, 算法如下.

关于 $|\mu_i|$.

输入: NZ_i, h_i .

输出: 使 $M \cdot NZ_i$ 满足条件(☆)的 M 的个数(不考虑 M 的行间变换).

开始

第 1 步: 计算 NZ_i 的 32 种行间组合构成的矩阵 N , 将组合系数作为相应行的编号.

第 2 步: 从 N 中任选 5 行构成 NZ'_i , 5 行在 N 中的行号构成矩阵 M , 行号严格递增.

第 3 步: 检查 M 是否可逆: 若 M 不可逆, 转至第 2 步; 若 M 可逆, 转至第 4 步.

第 4 步: 检查 NZ'_i 是否符合条件(☆): 若不符合, 转至第 2 步; 若符合, 计数器加 1.

重复第 2~4 步, 直至第 2 步达到循环条件, 输出计数器值.

结束

由推论 1, 此程序中不考虑 M 的行间置换, 这样大大提高了效率. 事实上, 我们是从一个三谱值函数的 NZ 集出发, 故而在上面第 4 步中, 只需检查 NZ'_i 是否符合条件(☆)中的最后一条即可, 这也大大提高了程序的效率.

我们输入:

$$NZ_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 h_1 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0); \\
 NZ_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 h_2 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0).
 \end{aligned}$$

可以得到 $|\mu_1|=1248 \times 120, |\mu_2|=1512 \times 120$.

关于 $|\rho_i|$.

输入: NZ_i, h_i .

输出: 使 $f(x)=f(xM+a)+c(c=0 \text{ 或 } 1)$ 的 (M,a,c) 的个数, 即 $|\rho_i|$.

开始

第 1 步: 计算 NZ_i 的 32 种行间组合构成的矩阵 N , 将组合系数作为相应行的编号.

第 2 步: 计算变换 a, c 所能得到的符号向量的集合 $FH=(h_i+N) \cup (h_i+N+1), h_i+N=\{h_i+n\}_{n \in \mathbb{N}}, 1$ 为 16 维全 1 向量(因为 NZ_i 的 5 个行向量是线性独立的, 所以 FH 中的 64 个向量是互不相同的).

第 3 步: 从 N 中任选 5 行构成 NZ'_i , 5 行在 N 中的行号构成矩阵 M .

第 4 步: 检查 M 是否可逆: 若 M 不可逆, 转至第 2 步; 若 M 可逆, 且相应的 NZ'_i 作为列向量集合与 NZ_i 相同, 转至第 5 步.

第 5 步: 求 NZ'_i 的符号向量 h'_i .

第 6 步: 检查 h'_i+h_i 是否属于 FH : 若 $h'_i+h_i \in FH$, 计数器加 1; 若 $h'_i+h_i \notin FH$, 转至第 3 步.

重复第 3~6 步, 直至第 3 步达到循环条件, 输出计数器值.

结束.

我们输入与上相同的 $NZ_i, h_i, i=1, 2$, 可以得到 $|\rho_1|=384, |\rho_2|=120$, 由定理 3, 有

$$\begin{aligned}
 |G_1| &= \frac{|\mu_1|}{|\rho_1|} \times 64 = \frac{1248 \times 120}{384} \times 64 = 24960, |G_2| = \frac{|\mu_2|}{|\rho_2|} \times 64 = \frac{1512 \times 120}{120} \times 64 = 96768, \\
 |G| &= |G_1| + |G_2| = 24960 + 96768 = 121728.
 \end{aligned}$$

我们得到了所有(5,1,3,12)函数的总数.

在运行关于 $|\mu_i|$ 的程序时, 我们还可以得到(5,1,3,12)函数所有可能对应的 NZ 集合, 稍做统计可以得到下面的结果: 在不考虑 NZ 集行间置换的情况下, 在等价类(1)中, 有 5 种不同的 NZ 集; 在等价类(2)中, 有 44 种不同的 NZ 集.

有了这样的结果, 我们就可以改进文献[11]中(7,2,4,56)函数的构造: 在上述 49 种不同的 NZ 集中任取两种, 各寻找与之对应的一对符号向量, 使之满足文献[11]中命题 7 的条件, 即可得到一个(7,2,4,56)函数. 这一方法不适宜推广到(9,3,5,240)函数的构造. 由此方法, 要构造一个(9,3,5,240)函数, 我们需要(7,2,4,56)函数对应的 2 个不同的 NZ 集, 以及相应于每一个 NZ 的一对符号向量, 它们满足类似于文献[11]命题 7 中条件的条件, 其中一个条件是 2 个不同 NZ 集中所含有的重为 3 的向量必须不同, 这等价于寻找(5,1,3,12)函数对应的 4 个不同 NZ 集, 以及相应于每一 NZ 集的 4 个符号向量, 它们满足类似于文献[11]命题 7 中条件的条件, 其中一条要求 4 个不同 NZ 集含有的重为 2 的向量必须不同. 而 49 种不同的 NZ 集中, 每一种所含有重为 2 的向量的个数至少为 3, 重为 2 的 5 元向量总共只有 10 个, 这就意味着不可能找到满足要求的 4 个不同的 NZ 集.

References:

[1] Berlekamp R, Welch LR. Weight distributions of the cosets of the (32,6) Reed-Muller code. IEEE, 1972, IT-18(1):203-207.
 [2] MacWilliams FJ, Sloane NJA. The Theory of Error Correcting Codes. North Holland, 1977.

- [3] Pasalic E, Johansson T, Maitra S, Sarkar P. New constructions of resilient and correlation immune Boolean functions achieving upper bounds on nonlinearity. In: Workshop on Coding and Cryptography 2001. 2001. 425–434.
- [4] Sarkar P. Spectral domain analysis of correlation immune and resilient Boolean functions. *Finite Fields and Their Applications*, 2002,8(1):120–130.
- [5] Sarkar P, Maitra S. Nonlinearity bounds and construction of resilient Boolean function. *Advances in Cryptology- CRYPTO 2000, Lecture Notes in Computer Science 1880, Springer-Verlag, 2000. 515–532.*
- [6] Seberry J, Zhang XM, Zheng YL. On constructions and nonlinearity of correlation immune functions. In: *Advances in Cryptology-EUROCRYPT'93. Springer-Verlag, 1994. 181–199.*
- [7] Seberry J, Zhang XM, Zheng YL. Nonlinearity and propagation characteristics of balanced Boolean functions. In: *Advances in Cryptology-CRYPTO'93. Springer-Verlag, 1994. 49–60.*
- [8] Siegenthaler T. Correlation-Immunity of nonlinear combining functions for cryptographic applications. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1984,IT-30:776–780.
- [9] Tarannikov YV. On resilient Boolean functions with maximum possible nonlinearity. *IndoCrypt2000, LNCS 1977, Springer-Verlag, 2000. 19–30.*
- [10] Xiao GZ, Massey J. A spectral characterization of correlation-immune combining functions. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1988,34:569–571.
- [11] Pei DY, Xie M. A property of the best Boolean functions. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2004,24(4): 479–487 (in Chinese with English abstract).

附中文参考文献:

- [11] 裴定一,谢敏.最优布尔函数的一个性质. *系统科学与数学*,2004,24(4):479–487.