一种新的细分曲线方法研究*

赵宏庆+, 彭国华, 叶正麟, 郑红婵, 任水利, 柯小玲

(西北工业大学 数学与信息科学系,陕西 西安 710072)

Study a New Subdivision Scheme for Curve

ZHAO Hong-Qing+, PENG Guo-Hua, YE Zheng-Lin, ZHENG Hong-Chan, REN Shui-Li, KE Xiao-Ling

(Department of Mathematic and Information Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-29-82374603, E-mail: zhq2281@163.com, http://www.nwpu.edu.cn

Received 2004-04-05; Accepted 2004-07-05

Zhao HQ, Peng GH, Ye ZL, Zheng HC, Ren SL, Ke XL. Study a new subdivision scheme for curve. *Journal of Software*, 2004,15(Suppl.):246~251.

Abstract: This paper extends the classical 4-point interpolating subdivision scheme, and brings forward a new 4-point subdivision scheme with three parameters for curve design, which can be controlled by choosing these three parameters appropriately. The sufficient conditions of the uniform convergence property and continuity properties of the subdivision scheme are proved.

Key words: 4-point subdivision; 4-point subdivision with three parameters

摘 要: 对经典的四点细分格式进行推广,提出了可通过对形状参数的适当选择来实现对极限曲线形状调整和控制的三参数四点细分曲线造型方法,并对其收敛性进行了分析,同时给出了曲线 C^0 到 C^3 连续的充分条件,并加以证明.

关键词: 四点细分;三参数四点细分

细分法是 CAGD 曲线曲面造型中的一类很有效的方法,其处理过程比较简单,从离散到离散,因而提供了一种快速生成曲线、曲面的方法.许多细分法可以生成效果很好的曲线,如经典四点法[1]是一种单参数插值型细分曲线造型法,极限曲线可以达到 C^1 连续;曹沅[2]研究了四点插值细分算法的连续性,并得到了一个极限函数具有二阶导函数的充分必要条件及二阶导函数的解析表达式,并将结果推广到曲面的情形;金建荣[3]等人提出了非均匀四点法去构造曲线;江雷[4]等人提出了四点插值细分格式的改进;蔡志杰[5]等人研究了变参数四点法;王钲旋[6]等人将四点插入生成曲线的递归算法用到分形当中;王静[7]等人完成了四点法生成分形插值曲线的维数估计;Hassan[8]提出了 ternary 四点插值细分法,生成的曲线达到 C^2 连续.本文将经典四点法进行推广,引入包含 3

* Supported by the Carve out Foundation for Graduate Student of Northwestern Polytechnical University of China under Grant No.Z20030052 (西北工业大学研究生创业基金)

作者简介: 赵宏庆(1976－),男,辽宁辽阳人,博士生,主要研究领域为 CAGD,CG,逆向工程;彭国华(1962－),男,博士,教授,主要研究领域为 CAGD,CG,逆向工程;叶正麟(1962－),男,教授,博士生导师,主要研究领域为 CAGD,图形与图像处理;郑红婵(1971－),女,博士生,主要研究领域为 CAGD;任水利(1976－),男,博士生,主要研究领域为 CAGD;柯小玲(1982－),女,硕士生,主要研究领域为图形与图像处理.

个形状参数的四点法,并对极限曲线的存在性、连续性进行了分析,给出了极限曲线存在及 C^1,C^2,C^3 连续的充分条件.

1 经典四点插值细分法

给定初始有序控制顶点集 $P^0=\{P_j^0\}_{j=-2}^{n+2},P_j^0\in R^d$,设 $P^m=\{P_j^m\}_{j=-2}^{2^m n+2}$ 为第 m 次细分后的有序控制顶点集,递归地定义 $P^m=\{P_j^m\}_{j=-2}^{2^m n+2}$ 如下:

$$\begin{cases}P_{2i}^{m+1}=P_i^m, & -1\le i\le 2^m n+1\\ P_{2i+1}^{m+1}=-\omega P_{i-1}^m+\left(\frac{1}{2}+\omega\right)P_i^m+\left(\frac{1}{2}+\omega\right)P_{i+1}^m-\omega P_{i+2}^m, & -1\le i\le 2^m n\end{cases}\tag{1}$$

其中 ω 为张力参数.在每一次细分过程中,保留旧的控制点不动,并在旧控制点构成的边附近插入新边点,新边点与该边的两个老顶点相连,如此形成新的控制多边形.

细分规则(1)可等价表示为

$$\begin{cases}P_{2i}^{m+1}=P_i^m, & -1\le i\le 2^m n+1\\ P_{2i+1}^{m+1}=\frac{1}{2}(P_i^m+P_{i+1}^m)+2\omega\left[\frac{1}{2}(P_i^m+P_{i+1}^m)-\frac{1}{2}(P_{i-1}^m+P_{i+2}^m)\right], & -1\le i\le 2^m n\end{cases},$$

因此,张力参数 ω 表示的是第 $m+1$ 层的新点 P_{2i+1}^{m+1} 远离由第 m 层两点 P_i^m,P_{i+1}^m 构成的边的中点的程度,即新点 P_{2i+1}^{m+1} 靠近两点 P_i^m,P_{i+1}^m 构成边的程度.

2 相关定义和定理

给定初始有序控制顶点集 $P^0=\{P_j^0:j\in J_0\},P_j^0\in R^d$,其中 J_0 为初始有序控制顶点的有限下标集,设 $P^m=\{P_j^m:j\in J_m\}$ 为第 m 次细分后的有序控制顶点集,J_m 为相应的有限下标集.均匀稳定 binary 细分法可表示为

$$P_j^{m+1}=\sum_{i\in Z}\alpha_{j-2i}P_i^m\tag{2}$$

其中 $\alpha=\{\alpha_j\}$ 为实系数序列,只有有限个分量不为 0,称为 mask.

定义 1[9]. 任意给定的初始有序控制点集 $\boldsymbol{f}^0=\{P_j^0:f_j^0\in \mathrm{R},j\in J_0\}$,设 $\boldsymbol{f}^m=\{f_j^m:j\in J_m\}$,为第 m 次细分后的有序控制点集,并设 f_j^m 对应的参数为 $\frac{j}{2^m}$,若存在一个定义在 R 或 R 的子集上的不恒为 0 的连续函数 $f(x)$;满足 $\lim_{m\to\infty}\left\|f\left(\frac{j}{2^m}\right)-f_j^m\right\|_\infty=0(\forall j\in J_m)$,则称细分法 S 一致收敛,记为 $S\in C^0$,并记 $f(x)=S^\infty\boldsymbol{f}^0$.进一步地,若 $S^\infty\boldsymbol{f}^0\in C^m$,则称细分法 S 为 C^m 连续的,简记为 $S\in C^m$.若细分法 S 一致收敛,则唯一确定一个紧支集的连续函数 $S^\infty\boldsymbol{f}^0$,称为极限函数

定义 2. 由细分法 S 的 mask α 确定的多项式 $\alpha(z)=\sum_j\alpha_j z^j$ 称为细分法 S 的生成多项式.

定义 3[9]. 由 mask 为 $\alpha^{(1)}=\{\alpha_j^{(1)}\}$ 生成多项式为 $\alpha^{(1)}=\frac{2z}{1+z}\alpha(z)$ 确定的细分法称为基细分法 S 的一阶均差细分法,记作 S_1.由 mask $\frac{1}{2}\alpha^{(1)}=\frac{1}{2}\{\alpha_j^{(1)}\}$ 确定的细分法称为基细分法. S 的一阶差分细分法,记作 $\frac{1}{2}S_1$,其生成多项式为 $\frac{1}{2}\alpha^{(1)}(z)=\frac{z}{1+z}\alpha(z)$.类似地,若 S_1 的一阶均差细分法存在,则称之为基细分法 S 的二阶均差细分法,记作 S_2,... 一般地,若基细分法 S 的 $n-1$ 阶均差细分法 S_{n-1} 的一阶均差细分法存在,则称之为基细分法 S 的 n 阶均差细分法,记作 S_n.记 S_n 的 mask 为 $\alpha^{(n)}=\{\alpha_j^{(n)}\}$,其生成多项式为 $\alpha^{(n)}(z)$ 则有 $\alpha^{(n)}(z)=\left(\frac{2z}{1+z}\right)^n\alpha(z)$.

定理 1[9]. 若细分法 S 一致收敛,则其 mask $\alpha=\{\alpha_j\}$ 满足

$$\sum_j \alpha_{2j} = \sum_j \alpha_{2j+1} = 1 \tag{3}$$

定理 2[9]. 细分法 S 一致收敛当且仅当细分法 $\frac{1}{2}S_1$ 对任何初始数据一致收敛于 0.

定理 3[10]. 设细分法 S 的 mask α 满足式(3).若存在正整数 L 及实数 $c, 0 \le c < 1$, 使 $\left\|\left(\frac{1}{2}S_1\right)^L\right\|_\infty \le c$, 则 S 一致收敛.

定理 4[9]. 设细分法 S 的生成多项式 $\alpha(z)$ 可以表示为 $\alpha(z) = \left(\frac{1+z}{2z}\right)^n q(z)$,并设以 $q(z)$ 为生成多项式的细分法为 S_n,若细分法 S_n 一致收敛,则对任何初始数据 f^0,有 $S^\infty f^0 \in C^n$,即细分法是 C^n 连续的.

我们得到当细分法 S 及其 i 阶均差细分法 $S_i (i=1,2,\dots,n)$ 的 mask $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_j\}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = \{\alpha^{(i)}\} (i=1,2,\dots,n)$ 满足

$$\sum_j \alpha_{2j} = \sum_j \alpha_{2j+1} = 1, \sum_j \alpha_{2j}^{(i)} = \sum_j \alpha_{2j+1}^{(i)} = 1, i = 1,2,\dots,n \tag{4}$$

时,可以由 $\left\|\left(\frac{1}{2}S_{n+1}\right)^L\right\|_\infty < 1$ 证明细分法 S 的一致收敛性或 C^n 连续性(其中 L 是使不等式 $\left\|\left(\frac{1}{2}S_{n+1}\right)^L\right\|_\infty < 1$ 成立的最小的正整数),特别情形当 $L=1$ 时有

$$\left\|\frac{1}{2}S_{n+1}\right\|_\infty = \frac{1}{2}\max\left\{\sum_j \left|\alpha_{2j}^{(n+1)}\right|, \sum_j \left|\alpha_{2j+1}^{(n+1)}\right|\right\} < 1.$$

3 三参数四点细分法

给定初始有序控制顶点集 $P^0 = \{P_j^0\}_{j=-2}^{n+2}, P_j^0 \in R^d$,设 $P^m = \{P_j^m\}_{j=-2}^{2^m n+2}$ 为第 m 次细分后的有序控制顶点集,递归地定义 $\{P_j^{m+1}\}_{j=-2}^{2^{m+1}n+2}$ 如下:

$$\begin{cases} P_{2i}^{m+1} = \mu P_{i-1}^m + (1-2\mu)P_i^m + \mu P_{i+1}^m, & -1 \le i \le 2^m n+1 \\ P_{2i+1}^{m+1} = \frac{1}{2}(P_i^m + P_{i+1}^m) + 2\omega(d_i^m + d_{i+1}^m), & -1 \le i \le 2^m n \end{cases} \tag{5}$$

其中 $d_i^m = P_i^m - [vP_{i-1}^m + (1-v)P_{i+1}^m]\ (-1 \le i \le 2^m n+1)$, v 为偏移参数,在 $(0,1)$ 上取值, ω 为张力参数,参数 μ 为偏移参数. ω 表示的是新点 P_{2i+1}^{m+1} 靠近两点 P_i^m, P_{i+1}^m 构成的边的程度, μ 表示的是第 m+1 层的新点 P_{2i}^{m+1} 偏移第 m 层点 P_i^m 的程度,图 1 给出了这 3 个参数的几何意义.显然四点插值细分法是该法当 $v=0.5$, $\mu=0$ 时的一个特例.我们称式(5)表示的细分方法为三参数四点细分法.适当地选取这 3 个参数的值可以使极限曲线有较好的光滑性,可以使曲线在一定的范围内变化.如果这 3 个参数选取不好,则可能会使得极限曲线产生分形现象.

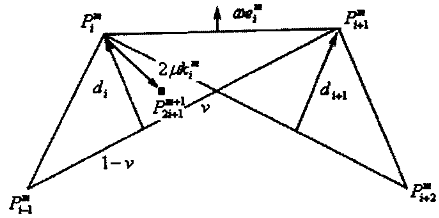


图 1 偏移参数 μ,张力参数 ω 及参数 v 的几何意义, $k_i^m = \frac{1}{2}(P_{i-1}^m + P_{i+1}^m) - P_i^m, e_i^m = 2(d_i^m + d_{i+1}^m)$

由细分规则可知,

$$\alpha_{-3} = -2\omega(1-v), \alpha_{-2} = \mu, \alpha_{-1} = \frac{1}{2} + 2\omega v, \alpha_0 = 1-2\mu, \alpha_1 = \frac{1}{2} + 2\omega(1-v), \alpha_2 = \mu, \alpha_3 = -2\omega v,$$

故细分法的生成多项式为

$$\alpha(z)=[-2\omega(1-v)]z^{-3}+\mu z^{-2}+\left(\frac{1}{2}+2\omega v\right)z^{-1}+(1-2\mu)z^{0}+\left[\frac{1}{2}+2\omega(1-v)\right]z^{1}+\mu z^{2}+(-2\omega v)z^{3},$$

mask 为

$$\alpha=\{a_j\}=\left[\ldots,0,0,-2\omega(1-v),\mu,\frac{1}{2}+2\omega v,1-2\mu,\frac{1}{2}+2\omega(1-v),\mu,-2\omega v,0,0,\ldots\right].$$

显然,α 满足 $\sum_j \alpha_{2j}=\sum_j \alpha_{2j+1}=1$,即保证了与初始有序控制点集的均差序列相应的细分法 S_1 的存在性.

3.1 收敛性分析

设 P_i^m 对应的参数为 $\frac{j}{2^m}$ 关于三参数四点细分法的收敛性,有如下结论:

定理 5. 三参数四点细分法是一致收敛的充分条件是:如果参数 μ, v 及 ω 满足

$$\max\left\{|-2\omega v|+\left|\frac{1}{2}+2\omega-\mu-4\omega v\right|+|2\omega+\mu-2\omega v|,|\mu+2\omega v|+\left|\frac{1}{2}-2\omega-\mu+4\omega v\right|+|-2\omega(1-v)|\right\}<1$$

条件,则三参数四点细分法是一致收敛的,即存在唯一紧支集的连续函数 $S^{\infty}P^0\in C^0[0,n]$ 为其极限函数.

证明:细分法的生成多项式为

$$\begin{aligned}\alpha(z)&=[-2\omega(1-v)]z^{-3}+\mu z^{-2}+\left(\frac{1}{2}+2\omega v\right)z^{-1}+(1-2\mu)z^{0}+\left[\frac{1}{2}+2\omega(1-v)\right]z^{1}+\mu z^{2}+(-2\omega v)z^{3}\\&=z^{-3}\left[-2\omega(1-v)+\mu z^{1}+\left(\frac{1}{2}+2\omega v\right)z^{2}+(1-2\mu)z^{3}+\left(\frac{1}{2}+2\omega(1-v)\right)z^{4}+\mu z^{5}+(-2\omega v)z^{6}\right]\\&=z^{-3}(1+z)\left[(-2\omega v)z^{5}+(\mu+2\omega v)z^{4}+\left(\frac{1}{2}+2\omega-\mu-4\omega v\right)z^{3}+\left(\frac{1}{2}-2\omega-\mu+4\omega v\right)z^{2}+\right.\\&\qquad\left.(2\omega+\mu-2\omega v)z^{1}-2\omega(1-v)\right]\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\alpha^{(1)}(z)&=\frac{1}{2}\frac{2z}{1+z}\alpha(z)\\&=z^{-2}\left[(-2\omega v)z^{5}+(\mu+2\omega v)z^{4}+\left(\frac{1}{2}+2\omega-\mu-4\omega v\right)z^{3}+\left(\frac{1}{2}-2\omega-\mu+4\omega v\right)z^{2}+\right.\\&\qquad\left.(2\omega+\mu-2\omega v)z^{1}-2\omega(1-v)\right],\end{aligned}$$

即 $\alpha^{(1)}=\{\alpha_j^{(1)}\}=2\left[\ldots,0,0,-2\omega(1-v),2\omega+\mu-2\omega v,\frac{1}{2}-2\omega-\mu+4\omega v,\frac{1}{2}+2\omega-\mu-4\omega v,\mu+2\omega v,-2\omega v,0,0,\ldots\right]$.

因此,当

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{2}S_1\right\|_{\infty}&=\frac{1}{2}\max\left\{\sum_j\left|a_{2j}^{(1)}\right|,\sum_j\left|a_{2j+1}^{(1)}\right|\right\}\\&=\max\left\{|-2\omega v|+\left|\frac{1}{2}+2\omega-\mu-4\omega v\right|+|2\omega+\mu-2\omega v|,|\mu+2\omega v|+\right.\\&\qquad\left.\left|\frac{1}{2}-2\omega-\mu+4\omega v\right|+|-2\omega(1-v)|\right\}\\&<1\end{aligned}$$

时,由定理 3 细分法 S 一致收敛,即存在唯一紧支集的连续函数 $S^{\infty}P^0\in C^0[0,n]$ 为其极限函数. □

3.2 三参数四点细分法的连续性分析

关于三参数四点细分法的连续性,我们得出如下结论:

定理 6. 三参数四点细分法是 C^1 连续的充分条件是:如果参数 v, μ 及 ω 满足

$\max\{4|\mu+2\omega|, 4\omega+|1-4\mu-4\omega|\}<1$ 且 $v=0.5$ 时,有 $S^{\infty}P^0 \in C^1[0,n]$,则三参数四点细分法是 C^1 连续的.

证明:显然 α, $\alpha^{(1)}$ 满足定理 1,又有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\alpha^{(2)}(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2z}{1+z}\right)^2 \alpha(z)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2z}{1+z}\right)\alpha^{(1)}(z)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2z}{1+z}\right)(1+z)\left[(-2\omega v)z^4+(\mu+4\omega v)z^3+\left(\frac{1}{2}+2\omega-2\mu-8\omega v)z^2\right)+\right.\\ &\left.\left(\frac{1}{2}-4\omega+\mu+12\omega v\right)z+(6\omega-14\omega v)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2z}{1+z}\right)(1+z)\left[(-\omega)z^4+(\mu+2\omega)z^3+\left(\frac{1}{2}-2\omega-2\mu\right)z^2+(\mu+2\omega)z+(-\omega)\right] (当 v=0.5 时)\end{aligned}$$

即 $$\alpha^{(2)}=\{\alpha_j^{(2)}\}=4\left[\ldots,0,0,-\omega,\mu+2\omega,\frac{1}{2}-2\mu-2\omega,\mu+2\omega,-\omega,0,0,\ldots\right].$$

因此,当

$$\left\|\frac{1}{2}S_2\right\|_{\infty}=\frac{1}{2}\max\left\{\sum_j\left|\alpha_{2j}^{(2)}\right|,\sum_j\alpha_{2j+1}^{(2)}\right\}=\max\{4|\mu+2\omega|,4\omega+|1-4\mu-4\omega|\}<1$$

时,由定理 3 知细分法 S_1 一致收敛,由定理 3 知 $S^{\infty}P^0\in C^1[0,n]$,即三参数四点细分法是 C^1 连续的. □

定理 7. 三参数四点细分法是 C^2 连续的充分条件是:如果参数 v, μ 及参数 ω 满足 $\mu+2\omega=\frac{1}{8}$, $v=0.5, -\frac{3}{16}<\omega<\frac{1}{16}$,则三参数四点细分法是 C^2 连续的.

证明:当 $v=0.5$, $\mu+2\omega=\frac{1}{8}$ 时,

易知 $$\alpha^{(2)}=\{\alpha_j^{(2)}\}=4\left[\ldots,0,0,-\omega,\frac{1}{8},\frac{1}{4}+2\omega,\frac{1}{8},-\omega,0,0,\ldots\right].$$

显然 $\alpha^{(2)}$ 满足(4)式,且

$$\begin{aligned}\alpha^{(2)}(z)&=4z^{-1}\left[(-\omega)z^4+\frac{1}{8}z^3+\left(\frac{1}{4}+2\omega\right)z^2+\frac{1}{8}z-\omega\right]\\ &=4z^{-1}(1+z)\left[(-\omega)z^3+\left(\frac{1}{8}+\omega\right)z^2+\left(\frac{1}{8}+\omega\right)z-\omega\right].\end{aligned}$$

因此 $$\frac{1}{2}\alpha^{(3)}(z)=\frac{1}{2}\frac{2z}{1+z}\alpha^{(2)}(z)=4\left[(-\omega)z^3+\left(\frac{1}{8}+\omega\right)z^2+\left(\frac{1}{8}+\omega\right)z-\omega\right],$$

即 $$\alpha^{(3)}=\{\alpha_j^{(3)}\}=[\ldots,0,0,-8\omega,1+8\omega,1+8\omega,-8\omega,0,0,\ldots].$$

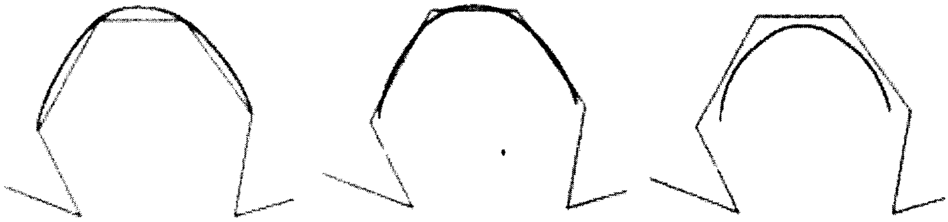
故当 $-\frac{3}{16}<\omega<\frac{1}{16}$ 时,由于 $\left\|\frac{1}{2}S_3\right\|_{\infty}=\left|\frac{1}{2}+4\omega\right|+4|\omega|<1$ 因此细分法是 C^2 连续的. □

定理 8. 三参数四点细分法是 C^3 连续的充分条件是:如果参数 v, μ 及参数 ω 满足 $\mu+2\omega=\frac{1}{8}$, $v=0.5$, $-\frac{1}{16}<\omega<0$ 时,则三参数四点细分法是 C^3 连续的.

证明:证明过程类似于对定理 7 的证明,过程略. □

4 算 例

图 2 给出在初始控制多边形给定的条件下,选择 4 组不同的形状参数时极限曲线的图形.如图 2(a)~图 2(c)所示的极限曲线分别是 C^1,C^2,C^3 连续的.



(a) $v=\frac{1}{2},\omega=\frac{1}{16},\mu=0$ (b) $v=\frac{1}{2},\omega=\frac{1}{32},\mu=\frac{1}{16}$ (c) $v=\frac{1}{2},\omega=\frac{3}{64},\mu=\frac{7}{32}$

图 2 三参数四点细分

5 结束语

本文在经典的四点插值细分法基础上,提出了包含 3 个形状参数的三参数四点细分法,并给出并证明了极限曲线 C^1,C^2,C^3 连续的充分条件.理论与数值算例表明,采用本文的方法,可以造型满足高阶光滑的逼近曲线;恰当地选取 3 个形状参数,可以增加细分曲线的光滑度;在给定初始数据的条件下,该方法比传统的四点细分方法增加了对极限曲线形状的调整和控制,并提高了曲线的光滑度.不足之处是,该算法比经典四点插值细分法复杂,在相同条件下,运行速度没有用经典四点插值细分法进行得快.在今后的工作中,我们将把三参数四点细分方法推广到曲面进行研究.

References:

[1] Dyn N, Levin D, Gregory JA. A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design. Computer Aided Geometric Design, 1987,4(4):257~268.

[2] Cao Y. Necessary and sufficient condition for the continuous limit curves and surfaces of 4-point interpolation subdivision scheme. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2003,15(8):961~966 (in Chinese with English abstract).

[3] Jin JR, Wang GZ. A non-uniform 4-point interpolatory subdivision scheme to construct curve. High School Application Mathematical Transaction (Series A), 2000,15(1):97~100 (in Chinese with English abstract).

[4] Jiang L, Guo DG. An improvement to the four-point interpolation subdivision scheme. Journal of Yantai University, 2002,15(3):171~176.

[5] Cai ZJ. Convergence, error estimation and some properties for four-point interpolation subdivision scheme. Computer Aided Geometric Design,1995,12(5):459~468.

[6] Wang ZX, Pang YJ. A recursive algorithm based four-point interpolation scheme for curve design and its application to rendering of fractals. Journal of CAD & CG, 1997,9(3):223~227.

[7] Wang J, Qian XY. Dimensionality estimation of the fractal interpolatory curve generated by 4-point interpolatory subdivision scheme. Journal of Gansu University of Technology, 2003,29(3):120~122.

[8] Hassan MF, Ivrissimtzis I, Dodgson N, Sabin M. An interpolating 4-point C^2 ternary stationary subdivision scheme. Computer Aided Geometric Design, 2002,19(1):1~18.

[9] Dyn N. Subdivision schemes in computer-aided geometric design. In: Lighted W, ed. Advances in numerical analysis, Vol 2. Clarendon Press, 1992. 36~104.

[10] Cararetta AS, Dahmen W, Micchelli CA. Stationary subdivision. Memoirs of the American Mathematical Society, 1991,93(453): 1~186.

附中文参考文献:

[2] 曹沅.四点插值细分算法极限曲线曲面 C^2 连续的充分必要条件.计算机辅助设计与图形学学报,2003,15(8):961~966.

[3] 金建荣,汪国昭.构造曲线的插值型细分法——非均匀四点法.高校应用数学学报(A 辑),2000,15(1):97~100.