1000-9825/2004/15(10)1485 ©2004 Journal of Software 软 件 学 报 Vol.15, No.10

两类模糊推理算法的连续性和逼近性*

徐蔚鸿[1,2,3+], 谢中科[2], 杨静宇[3], 叶有培[3]

[1](吉首大学 数学与计算机科学学院,湖南 吉首 416000)

[2](长沙理工大学 计算机与通信工程学院,湖南 长沙 410077)

[3](南京理工大学 计算机科学与技术系,江苏 南京 210094)

Continuity and Approximation Properties of Two Classes of Algorithms for Fuzzy Inference

XU Wei-Hong[1,2,3+], XIE Zhong-Ke[2], YANG Jing-Yu[3], YE You-Pei[3]

[1](College of Mathematics and Computer Science, Jishou University, Jishou 416000, China)

[2](College of Computer and Communications Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410077, China)

[3](Department of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-731-2618996, Fax: +86-731-2295315, E-mail: xwhxd@163.com, http://www.csust.cn

Received 2003-07-28; Accepted 2004-01-08

Xu WH, Xie ZK, Yang JY, Ye YP. Continuity and approximation properties of two classes of algorithms for fuzzy inference. *Journal of Software*, 2004,15(10):1485~1492.
http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/1485.htm

Abstract: The authors investigate carefully whether or not two classes of inference algorithms, which are Compositional Rule of Inference (CRI) proposed by L.A.Zadeh and Triple-Implication algorithm (Triple-I) proposed lately, hold the continuity and approximation properties, and moreover, also how the approximation errors are propagated by them. Therefore, a fuzzy inference algorithm is viewed as a mapping from one fuzzy set to another, Hamming distance formula is used as the computing distance between the two fuzzy sets. The authors prove that the two classes of algorithms hold the continuity properties in the cases of fuzzy modus ponens and fuzzy modus tollens. The authors also point out that Triple-I algorithm always holds the approximation property if antecedent and consequence of the known rule are normal fuzzy sets. However CRI algorithm holds approximation property only if CRI holds consistency property. Two classes of algorithms do not make approximation errors magnified when they hold approximation property. The results of the paper are useful for the selection and analysis of algorithms for fuzzy inference when practical fuzzy control and expert systems are designed.

Key words: fuzzy reasoning; compositional rule of inference; triple implication algorithm for inference; fuzzy

---

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60072034 (国家自然科学基金); the Natural Science Foundation of Hu'nan Province of China under Grant No.02JJY4060 (湖南省自然科学基金)

作者简介: **徐蔚鸿**(1963－),男,湖南湘潭人,博士,副教授,主要研究领域为智能系统与模式识别,计算机应用;**谢中科**(1964－),男,讲师,主要研究领域为数据挖掘,数据库系统开发;**杨静宇**(1941－),男,教授,博士生导师,主要研究领域为模式识别与智能系统,图像处理;**叶有培**(1945－),男,教授,博士生导师,主要研究领域为模糊系统,算法设计和分析.

intelligent system; fuzzy logic

摘 要: 对 Zadeh 的模糊推理合成法则(CRI 算法)和全蕴涵三 I 算法(三 I 算法)是否满足连续性和逼近性问题进行了细致的研究,进一步讨论了这两类算法对逼近误差的传播性能.为此,把模糊推理算法看成是模糊集合到模糊集合的映射,选用海明距离作为两模糊集的距离.证明了在模糊假言推理和模糊拒取式推理情形,这两类算法都拥有连续性.指出三 I 算法在已知规则的前件和后件是正规集的条件下总是满足逼近性,而 CRI 算法只有当它满足还原性时才拥有逼近性.在满足逼近性的条件下,两类算法都不会放大逼近误差.结果对构建模糊控制系统和模糊专家系统时选用和分析模糊推理算法有一定的指导作用.

关键词: 模糊推理;模糊关系合成法则;全蕴涵三 I 算法;模糊智能系统;模糊逻辑

中图法分类号: TP18 **文献标识码**: A

正在蓬勃发展且显示了巨大应用潜力的模糊技术,是一种非常重要的智能化手段.它在处理难以用传统数学工具(微分方程或差分方程)建模的具有不确定性、非线性化的复杂过程控制等问题方面有着很强的能力,并且对其他技术有着极强的渗透力和互补性.模糊技术在实用化、产品化方面有代表性的成就是已经在一系列的家用电器的研制中取得很大成功.融入模糊技术的家用电器(模糊洗衣机、模糊照相机、模糊微波炉和模糊数字电视机等)有着很高的技术附加值和诱人的市场卖点.我们知道,人工智能包括推理、学习和联想三大要素.而模糊智能系统中的模糊推理技术是建立在模糊集合论、模糊 if-then 规则和模糊推理等概念基础上的先进计算框架.它在诸如自动控制、数据分类、决策分析、专家系统、时间序列预测、机器人和模式识别等众多领域得到了成功的应用.模糊推理系统通常由 3 个重要部件组成:规则库,包含一系列规则;数据库(或词典),定义模糊规则中用到的隶属函数;推理机制,根据已知规则和事实执行推理过程求得合理的输出或结论.事实上,模糊推理是模糊控制的理论基础[1],是模糊专家系统的关键技术[2].Zadeh 提出的模糊关系合成法则(compositional rule of fuzzy inference,简称 CRI)是基本的、常用的方法,从逻辑学、数学插值、稳定性、神经网络的学习等多个角度得到了推广、校正和较系统的分析[1~14].运用 CRI 算法的关键是,从已有的蕴涵关系中选择或根据具体的应用问题重新构造一个适宜的蕴涵关系.王国俊教授在文献[1]中指出,从逻辑语义蕴涵的角度看,CRI 算法中的复合运算是缺乏根据的,并提出了每一步都使用蕴涵算子的全蕴涵三 I 推理方法.三 I 算法比 CRI 算法有更好的逻辑学背景和更优的性质[1],是对 CRI 算法的一种实质性的改进,并得到了应用[3].对模糊系统的逼近特性的分析是理论和应用中的重要课题,如王士同教授[5]分析了模糊系统的逼近误差和初始状态误差对模糊系统的影响.已知规则 $A\to B$,当输入前件 A^* 求后件 B^*,称为广义假言推理或模糊假言推理(fuzzy modus ponens,简称 FMP);已知规则 $A\to B$,当输入后件 B^* 求前件 A^*,称为广义拒取式推理或模糊拒取式推理(fuzzy modus tollens,简称 FMT).而对于模糊推理,D. Dubois 和 H. Prade 在文献[6]中就指出:模糊产生式系统、模糊专家系统和模糊控制系统中要求推理方法满足逼近原则.该原则是指,在 FMP 情形,希望当 A^* 充分逼近 A 时,推理方法能够保证 B^* 充分逼近 B;在 FMT 情形,希望当 B^* 充分逼近 B 时,推理方法也能使 A^* 充分逼近 A.然而,著名的 CRI 算法和全蕴涵三 I 算法是否满足逼近原则这一重要的问题以及相关的逼近误差的传播问题,尚未得到分析(这两个问题在模糊控制、模糊信息处理和模糊神经网络中是尤为重要的).本文正是针对这两个问题进行首次研究.本文用海明距离来估计两个模糊集的逼近(或匹配)程度.即当 $A_1,A_2\in F(U)$时,U 是非空有限集,

$$\|A_1-A_2\|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A_1(u_i)-A_2(u_i)|,$$

其中 $|U|=n$.

1 相关定义和引理

模糊推理方法本质上是基于若干条模糊规则 $A_i\to B_i, i\in I$,提供了一种从论域 X 上的模糊集全体 $F(X)$ 到论域 Y 上的模糊集全体 $F(Y)$ 之间的映射方法(本文记作 $f(A^*)$,其中 $A_i\in F(X), B_i\in F(Y)$),所以本文有时就不

严格区分模糊推理方法和映射 $f(A^*)$ 这两个概念.若 $f(A^*)$ 使得 $B_i=f(A_i),\forall i\in I$,则称 $f(A^*)$ 满足还原性[1].由于多重和多维模糊推理通过一定的手段都可以化归为单重单维的模糊推理问题(即所谓的简单情形的模糊推理问题)[1],故本文只就简单情形的模糊推理进行讨论.因为计算机只能存储有限个数值,故不失一般性,本文只讨论有限论域情形.

定义 1. 设 X,Y 为非空有限论域, $A\to B$ 是已知规则,模糊推理方法 $f(A^*)$ 是 $F(X)$ 到 $F(Y)$ 上的一个集函数,此处, $A^*,A\in F(X)$, $|X|=n$, $|Y|=m$;若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,使得当 $\|A^*-A\|<\delta$ 时,

$$\|f(A^*)-f(A)\|=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left|f(A^*)(y_i)-f(A)(y_i)\right|<\varepsilon$$

成立,则称 $f(A^*)$ 在 A 处是连续的;若使得

$$\|f(A^*)-B\|=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left|f(A^*)(y_i)-B(y_i)\right|<\varepsilon$$

成立,则称 $f(A^*)$ 在 A 处具有逼近属性.

显然有:当 $f(A^*)$ 在 A 处具有连续性,且 $f(A)=B$,则 $f(A^*)$ 在 A 处具有逼近性.

定义 2. 设 X,Y 为非空有限论域, $A\to B$ 是已知规则,模糊拒取式推理方法 $g(B^*)$ 是 $F(Y)$ 到 $F(X)$ 上的集函数,此处, $B^*,B\in F(Y)$, $|X|=n$, $|Y|=m$;若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,使得当 $\|B^*-B\|<\delta$ 时,

$$\|g(B^*)-g(B)\|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|g(B^*)(x_i)-g(B)(x_i)\right|<\varepsilon$$

成立,则称 $g(B^*)$ 在 B 处是连续的;使得

$$\|g(B^*)-A\|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|g(B^*)(x_i)-A(x_i)\right|<\varepsilon$$

成立,则称 $g(B^*)$ 在 A 处具有逼近属性.

显然有:当 $g(B^*)$ 在 B 处具有连续性,且 $g(B)=A$ 时, $g(B^*)$ 在 B 处具有逼近性.

定义 3. 设 X 为非空有限论域,$A^*,A\in F(X)$,称 $W(A^*,A)=\bigvee_{x\in X}|A^*(x)-A(x)|$ 为 A^* 与 A 的逐点误差最大值.

显然有,由 $W(A^*,A)<\varepsilon$,可推出 $\|A^*-A\|<\varepsilon$,但反之不然.

引理 1. (1) $|c_1\wedge d-c_2\wedge d|\le|c_1-c_2|$.(2) $|c_1\vee d-c_2\vee d|\le|c_1-c_2|$.

证明:只证(1),(2)的证明类似.

当 $c_1\wedge d=d,c_2\wedge d=d$, 或 $c_1\wedge d=c_1,c_2\wedge d=c_2$ 时,结论显真;

当 $c_1\wedge d=c_1,c_2\wedge d=d$ 时,有 $c_1\le d\le c_2$,故 $|c_1\wedge d-c_2\wedge d|=|c_1-d|=d-c_1\le c_2-c_1=|c_1-c_2|$;

当 $c_1\wedge d=d,c_2\wedge d=c_2$ 时,有 $c_2\le d\le c_1$,故 $|c_1\wedge d-c_2\wedge d|=|d-c_2|=d-c_2\le c_1-c_2=|c_1-c_2|$. □

引理 2. (1) 设 I 为非空有限指标集,则 $|\bigvee_{i\in I}a_i'-\bigvee_{i\in I}a_i|\le\bigvee_{i\in I}|a_i'-a_i|$.

(2) 设 I 为非空有限指标集, $\delta>0$,若 $\forall i\in I,|a_i'-a_i|<\delta$,则 $|\bigwedge_{i\in I}a_i'-\bigwedge_{i\in I}a_i|\le\delta$.

证明:(1) 令 $i_0,i_1\in I$,使 $a_{i_0}'=\bigvee_{i\in I}a_i'$ 和 $a_{i_1}=\bigvee_{i\in I}a_i$ 成立,故 $a_{i_1}\ge a_i,\forall i\in I$,不妨设 $a_{i_0}'\ge a_{i_1}$,则

$$|\bigvee_{i\in I}a_i'-\bigvee_{i\in I}a_i|=a_{i_0}'-a_{i_1}\le a'_{i_0}-a_{i_0}=|a_{i_0}'-a_{i_0}|\le\bigvee_{i\in I}|a_i'-a_i|.$$

(2) 令 $i_0,i_1\in I$,使 $a_{i_0}'=\bigwedge_{i\in I}a_i'$ 和 $a_{i_1}=\bigwedge_{i\in I}a_i$ 成立, $\forall i\in I,|a_i'-a_i|<\delta$, 即 $a_i-\delta<a_i'<a_i+\delta$,故

$$a_{i_1}-\delta=\bigwedge_{i\in I}(a_i-\delta)<\bigwedge_{i\in I}a_i'<\bigwedge_{i\in I}(a_i+\delta)=a_{i_1}+\delta,$$

故 $|a_{i_0}'-a_{i_1}|<\delta$. □

有关符号说明: $a\in[0,1]$,记 $a'=1-a$.又蕴涵算子 $R_0:[0,1]^2\to[0,1]$ 定义为

$$R_0(a,b)=\begin{cases}1, & a\le b\\ a'\vee b, & a>b\end{cases}.$$

2 CRI 算法的连续性和逼近性

设 X,Y 为非空有限论域, $A\to B$ 是已知规则, $R(a,b),(a,b)\in[0,1]^2$ 是选定的蕴涵关系,此处,$A\in F(X),B\in F(X)$.

在FMP情形,当给定$A^*\in F(X)$时,CRI算法由下式推出结果$B^*\in F(Y):B^*=A\circ R(A,B)$,“$\circ$”为模糊关系合成运算,即$B^*(y)=\vee_{x\in X}(A^*(x)\wedge R(A(x),B(y))),\forall y\in Y$.在FMT情形,当给定$B^*\in F(Y)$时,CRI算法由下式推出结果$A^*\in F(X):A^*=R(A,B)\circ B^*$,即$A^*(x)=\vee_{y\in Y}(B^*(y)\wedge R(A(x),B(y))),\forall x\in X$.除少数之外,大多数的模糊蕴涵关系$R(a,b)$使得Zadeh的CRI算法不是还原算法[1,7,8],而三I算法在很弱的条件下是还原算法[1].

定理 1. 对于FMP情形,CRI算法在A处具有连续属性.

证明:对于FMP情形,CRI算法记为f_{CRI}.$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\varepsilon/(n+1)$,当$\|A^*-A\|<\delta$时,有$\forall x\in X$,$|A^*(x)-A(x)|<n\delta$成立,

$$\begin{aligned}\|f_{CRI}(A^*)-f_{CRI}(A)\|&=\frac{1}{m}\sum_{y\in Y}|f_{CRI}(A^*)(y)-f_{CRI}(A)(y)|\\&=\frac{1}{m}\sum_{y\in Y}|\vee_{x\in X}[A^*(x)\wedge R(A(x),B(y))]-\vee_{x\in X}[A(x)\wedge R(A(x),B(y))]|\\&\le\frac{1}{m}\sum_{y\in Y}\vee_{x\in X}|A^*(x)\wedge R(A(x),B(y))-A(x)\wedge R(A(x),B(y))|\ (\text{由引理 2})\\&\le\frac{1}{m}\sum_{y\in Y}\vee_{x\in X}|A^*(x)-A(x)|\ (\text{由引理 1})\\&\le\frac{1}{m}\sum_{y\in Y}n\delta=n\delta<\varepsilon.\end{aligned}$$

故该方法在A处具有连续性质. □

定理 2. 对于FMT情形,CRI算法在B处具有连续属性.

定理2的证明与定理1的证明类似,此处略.

定理 3. 设X,Y为非空有限论域,$A\to B$是已知规则,$R(a,b)$为任意的蕴涵关系,并用CRI算法进行推理,

(1) 对于FMP情形,当输入A^*与A的逐点误差最大值小于ε时,则输出$B^*=f_{CRI}(A^*)$与$f_{CRI}(A)$的误差及逐点误差最大值均小于ε;

(2) 对于FMT情形,当输入B^*与B的逐点误差最大值小于ε时,则输出$A^*=f_{\overline{CRI}}(B^*)$与$f_{\overline{CRI}}(B)$的误差及逐点误差最大值均小于$\varepsilon$.此处,$A^*,A\in F(X),B^*,B\in F(X),a,b\in[0,1]$.

证明:以下仅证(1),(2)类似可证.当$W(A^*,A)<\varepsilon$时,有$\forall x\in X,|A^*(x)-A(x)|<\varepsilon$成立.此时的误差:

$$\begin{aligned}\|f_{CRI}(A^*)-f_{CRI}(A)\|&=\frac{1}{m}\sum_{y\in Y}|f_{CRI}(A^*)(y)-f_{CRI}(A)(y)|\\&=\frac{1}{m}\sum_{y\in Y}|\vee_{x\in X}[A^*(x)\wedge R(A(x),B(y))]-\vee_{x\in X}[A(x)\wedge R(A(x),B(y))]|\\&\le\frac{1}{m}\sum_{y\in Y}\vee_{x\in X}|A^*(x)\wedge R(A(x),B(y))-A(x)\wedge R(A(x),B(y))|\ (\text{由引理 2})\\&\le\frac{1}{m}\sum_{y\in Y}\vee_{x\in X}|A^*(x)-A(x)|\ (\text{由引理 1})\\&\le\frac{1}{m}\sum_{y\in Y}\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

逐点误差最大值的情形可类似证明. □

推论 1. 设$A\to B$为已知规则,选定的蕴涵关系$R(a,b)$使$f_{CRI}(A)=B$成立(如R_c,R_s,R_g[7]),则CRI方法在A处具有逼近性,否则在A处不具有逼近性.显然,证略.

我们知道在模糊专家系统中,依次基于不同的规则进行链式推理常常被用到.那么,这种模糊推理是怎样传播误差的呢?为此我们有结论:

推论 2. 设 $X_1,X_2,...,X_K$ 为非空有限论域, $A_1\to A_2,A_2\to A_3,...,A_{k-1}\to A_k$ 是已知规则,用 CRI 算法进行模糊链式推理,所选定的蕴涵关系 $R(a,b)$ 使得 $A_i=f_{CRI}(A_{i-1}),i=2,3,...,k$ 成立(如 R_c,R_s,R_g [7]).那么对于 $\varepsilon>0$,当输入前件 A^*满足 $W(A^*_1,A)<\varepsilon$时,最终的推理结果 A^*_k 满足 $W(A^*_k,A_k)<\varepsilon$.其中, $A_i\in F(X_i),i=1,2,...,k$;$A^*_1\in F(X_1)$, $A^*_k\in F(X_k)$规则 $A_{i-1}\to A_i$ 被表示成 $R(A_{i-1},A_i),i=1,2,...,k-1$.

该推论是定理 3 的直接结果,易于证明,此处略.

定理 3、推论 1 和推论 2 说明了 CRI 算法对误差的传播性能.

3 R_0 型三 I 算法的连续性和逼近性

对 FMP 情形,文献[1]提出的 R_0 型三 I 算法为:设 X,Y 是非空有限论域, $A,A^*\in F(X),B\in F(Y)$, $A\to B$ 是已知规则,则 $B^*(y)=\bigvee_{x\in E_y}[A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))],y\in Y$,此处, $E_y=\{x\in X\mid (A^*(x))'<R_0(A(x),B(y))\}\subset X$.

引理 3. 设 X,Y 为非空有限论域, $A^*,A\in F(X),B\in F(Y)$,则存在有 $\delta_0>0$,当 $\|A^*-A\|<\delta_0$ 时,使得 $\forall y\in Y,EA^*_y=EA_y(\subset X)$ 成立.其中

$$EA^*_y=\{x\in X\mid (A^*(x))'<R_0(A(x),B(y))\}=\{x\in X\mid A^*(x)>R_0'(A(x),B(y))\},$$

$$EA_y=\{x\in X\mid (A(x))'<R_0(A(x),B(y))\}=\{x\in X\mid A(x)>R_0'(A(x),B(y))\}.$$

证明:首先设任一固定的 $y\in Y$.

(1) 取 $\delta_{1y}=\bigwedge_{x\in EA^*_y}\left[\dfrac{A^*(x)-R_0'(A(x),B(y))}{2(n+1)}\right]$,因 $\dfrac{A^*(x)-R_0'(A(x),B(y))}{2(n+1)}>0$,又 EA^*_y 是有限集,故 $\delta_{1y}>0$.以下为方便起见,把 δ_{1y} 省记为 δ_1.

当 $\|A^*-A\|<\delta_1$ 时,即 $\left[\sum_{x\in X}|A^*(x)-A(x)|\right]\Big/n<\delta_1$, 故 $|A^*(x)-A(x)|<n\delta_1,\forall x\in X$, 即

$$A^*(x)-n\delta_1<A(x)<A^*(x)+n\delta_1,\forall x\in X.$$

当 $\forall x\in EA^*_y$ 时, $A^*(x)>R_0'(A(x),B(y))$,又 $A(x)>A^*(x)-n\delta_1$,

$$A(x)>A^*(x)-n\delta_1\ge A^*(x)-n[A^*(x)-R_0'(A(x),B(y))]/2(n+1)>A^*(x)-(A^*(x)-R'_0(A(x),B(y)))/2=$$
$$(A^*(x)+R_0'(A(x),B(y)))/2>R_0'(A(x),B(y)),$$

故此时 $x\in EA_y$,所以 $EA^*_y\subset EA_y$.

(2) 取 $\delta_{2y}=\bigwedge_{x\in EA_y}\left[\dfrac{A(x)-R_0'(A(x),B(y))}{2(n+1)}\right]$,因 $\dfrac{A(x)-R_0'(A(x),B(y))}{2(n+1)}>0$,又 EA_y 是有限集,故 $\delta_{2y}>0$.以下为方便起见,把 δ_{2y} 省记为 δ_2.当 $\|A^*-A\|<\delta_2$ 时,即 $\left[\sum_{x\in X}|A^*(x)-A(x)|\right]\Big/n<\delta_2$, 故 $|A^*(x)-A(x)|<n\delta_2,\forall x\in X$, 即 $A(x)-n\delta_2<A^*(x)<A(x)+n\delta_2,\forall x\in X$.当 $\forall x\in EA_y$ 时, $A(x)>R_0'(A(x),B(y))$,又 $A^*(x)>A(x)-n\delta_2$,故

$$A^*(x)>A(x)-n\delta_2\ge A(x)-n[A(x)-R_0'(A(x),B(y))]/2(n+1)>A(x)-(A(x)-R_0'(A(x),B(y)))/2$$
$$=(A(x)+R_0'(A(x),B(y)))/2>R_0'(A(x),B(y)),$$

故此时 $x\in EA^*_y$,所以 $EA_y\subset EA^*_y$.

取 $\delta_{0y}=\min\{\delta_1,\delta_2\}=\min\{\delta_{1y},\delta_{2y}\}$,则当 $\|A^*-A\|<\delta_{0y}$ 时,既满足 $\|A^*-A\|<\delta_1$,所以 $EA^*_y\subset EA_y$,又满足 $\|A^*-A\|<\delta_2$,所以 $EA_y\subset EA^*_y$,故此时 $EA_y=EA^*_y$.取 $\delta_0=\bigwedge_{y\in Y}\delta_{0y}$,故当 $\|A^*-A\|<\delta_0$ 时,有 $\forall y\in Y,EA_y=EA^*_y$ 成立. □

定理 4. 对于 FMP 情形, R_0 型三 I 算法在 A 处具有连续性.

证明:对于 FMP 情形, R_0 型三 I 算法记为 $f_{3I}(A^*)$,由引理 3,存在有 $\delta_0>0$,使得 $\|A^*-A\|<\delta_0$ 时, $EA^*_y=EA_y$,故 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\min\{\delta_0/(n+1),\varepsilon/(n+1)\}$,则当 $\|A^*-A\|<\delta$ 时,有 $\forall y\in Y,EA^*_y=EA_y$ 仍成立,此时,显然有 $\forall x\in X,|A^*(x)-A(x)|<n\delta$,

$$\|f_{3I}(A^*)-f_{3I}(A)\|=\frac{1}{m}\sum_{y\in Y}|f_{3I}(A^*)(y)-f_{3I}(A)(y)|$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{y\in Y}|\bigvee_{x\in EA^*_y}[A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))]-\bigvee_{x\in EA_y}[A(x)\wedge R_0(A(x),B(y))]|$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{y\in Y}|\bigvee_{x\in EA_y}[A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))]-\bigvee_{x\in EA_y}[A(x)\wedge R_0(A(x),B(y))]|\text{(因此时 }EA^*_y=EA_y\text{)}$$

$$\le\frac{1}{m}\sum_{y\in Y}\bigvee_{x\in EA_y}|A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))-A(x)\wedge R_0(A(x),B(y))|\text{(由引理 2)}$$

$$\le\frac{1}{m}\sum_{y\in Y}\bigvee_{x\in EA_y}|A^*(x)-A(x)|\text{(由引理 1)}$$

$$\le\frac{1}{m}\sum_{y\in Y}n\delta=n\delta<\varepsilon.$$

故该方法在 A 处具有连续性. □

对于 FMT 情形,文献[1]提出的 R_0 型三 I 算法为:设 X,Y 是非空有限论域, $A\in F(X),B^*,B\in F(Y)$, $A\to B$ 是已知规则,则 $A^*(x)=\bigwedge_{y\in E_x}[B^*(y)\vee R_0'(A(x),B(y))],x\in X$,这里, $E_x=\{y\in Y\mid B^*(y)<R_0(A(x),B(y))\}\subset Y$.

引理 4. 设 X,Y 为非空有限论域, $A\in F(X),B^*,B\in F(Y)$ 则存在有 $\delta_0>0$,当 $\|B^*-B\|<\delta_0$ 时,使得 $\forall x\in X,EB^*_x=EB_x(\subset Y)$ 成立,其中

$$EB^*_x=\{y\in Y\mid B^*(y)<R_0(A(x),B(y))\},$$
$$EB_x=\{y\in Y\mid B(y)<R_0(A(x),B(y))\}.$$

该引理的证明类似于引理 3 的证明,此处略.

定理 5. 对于 FMT 情形, R_0 型三 I 算法在 B 处具有连续性.

证明:对于 FMT 情形, R_0 型三 I 算法记为 $f_{\overline{3I}}$,由引理 4,存在有 $\delta_0>0$,使得 $\|B^*-B\|<\delta_0$ 时, $EB^*_x=EB_x$,故 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\min\{\delta_0/(m+1),\varepsilon/(m+1)\}$,则当 $\|B^*-B\|<\delta$ 时,有 $\forall y\in Y,|B^*(y)-B(y)|<m\delta$ 成立,

$$\|f_{\overline{3I}}(B^*)-f_{\overline{3I}}(B)\|=\frac{1}{n}\sum_{x\in x}|f_{\overline{3I}}(B^*)(x)-f_{\overline{3I}}(B)(x)|$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{x\in X}|\bigwedge_{y\in EB^*_x}[B^*(y)\vee R_0'(A(x),B(y))]-\bigwedge_{y\in EB_x}[B(y)\vee R_0'(A(x),B(y))]|\text{(因此时 }EB^*_x=EB_x\text{)}.$$

又 $\forall y\in EB_x$,由引理 1 有

$$|B^*(y)\vee R_0'(A(x),B(y))-B(y)\vee R_0'(A(x),B(y))|\le|B^*(y)-B(y)|\le m\delta,$$

再由引理 2,有

$$|\bigwedge_{y\in EB_x}[B^*(y)\vee R_0'(A(x),B(y))]-\bigwedge_{y\in EB_c}[B(y)\vee R_0'(A(x),B(y))]|\le m\delta,$$

故有 $\|f_{\overline{3I}}(B^*)-f_{\overline{3I}}(B)\|=\frac{1}{n}\sum_{x\in x}|f_{\overline{3I}}(B^*)(x)-f_{\overline{3I}}(B)(x)|\le\frac{1}{n}\sum_{x\in X}m\delta=m\delta<\varepsilon$. □

推论 3. 设 $A\to B$ 为已知规则, A 和 B 正规集,则对于 FMP 情形, R_0 型三 I 算法在 A 处具有逼近性;对于 FMT 情形, R_0 型三 I 算法在 B 处具有逼近性.

略证:当 A 和 B 为正规集时, R_0 型三 I 算法具有还原性(文献[1]的定理 4 和定理 5),有 $f_{3I}(A)=B,f_{\overline{3I}}(B)=A$ 成立.仿照本文定理 4 和定理 5 的证明过程进行证明,即知结论成立. □

定理 6. 设 X,Y 为非空有限论域, $A\to B$ 是已知规则,并用 R_0 型全蕴涵三 I 算法进行推理.

(1) 对于 FMP 情形,存在 $\delta_1>0$,使得当输入 A^* 与 A 的逐点误差最大值小于 $\varepsilon<\delta_1$ 时,则输出 $B^*=f_{3I}(A^*)$ 与 $f_{3I}(A)$ 的误差及逐点误差最大值均小于 ε ;

(2) 对于 FMT 情形,存在 $\delta_2>0$,使得当输入 B^* 与 B 的逐点误差最大值小于 $\varepsilon<\delta_2$ 时,则输出 $A^*=f_{\overline{3I}}(B^*)$ 与 $f_{\overline{3I}}(B)$ 的误差及逐点误差最大值均小于 ε .此处, $A^*,A\in F(X),B^*,B\in F(X),a,b\in[0,1]$.

证明:仅证(1),(2)的证明类似.由引理 3,存在有 $\delta_1>0$,使得 $\|A^*-A\|<\delta_1$ 时, $EA^*_y=EA_y$.设 $\forall\varepsilon>0$,且

$\varepsilon < \delta_1$ 时,由 $W(A^*,A) < \varepsilon < \delta_1$ 时,能推出 $\|A^*-A\| = \frac{1}{n}\sum_{x\in X}|A^*(x)-A(x)| < \varepsilon$,故有 $EA^*_y = EA_y$ 仍成立,此时,显然有 $\forall x \in X, |A^*(x)-A(x)| < \varepsilon$,此时误差:

$$\begin{aligned}
\|f_{3\mathrm{I}}(A^*)-f_{3\mathrm{I}}(A)\| &= \frac{1}{m}\sum_{y\in Y}|f_{3\mathrm{I}}(A^*)(y)-f_{3\mathrm{I}}(A)(y)| \\
&= \frac{1}{m}\sum_{y\in Y}|\bigvee_{x\in EA^*_y}[A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))]-\bigvee_{x\in EA_y}[A(x)\wedge R_0(A(x),B(y))]| \\
&= \frac{1}{m}\sum_{y\in Y}|\bigvee_{x\in EA_y}[A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))]-\bigvee_{x\in EA_y}[A(x)\wedge R_0(A(x),B(y))]| \ (\text{因此时 } EA^*_y = EA_y) \\
&\le \frac{1}{m}\sum_{y\in Y}\bigvee_{x\in EA_y}|A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))-A(x)\wedge R_0(A(x),B(y))| \ (\text{由引理 2}) \\
&\le \frac{1}{m}\sum_{y\in Y}\bigvee_{x\in EA_y}|A^*(x)-A(x)| \ (\text{由引理 1}) \\
&< \frac{1}{m}\sum_{y\in Y}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

逐点误差最大值情形可类似证明. □

推论 4. 设 $X_1,X_2,...,X_K$ 为非空有限论域,$A_1\to A_2, A_2\to A_3,...,A_{k-1}\to A_k$ 是已知规则,用 R_0 型全蕴涵三 I 算法 $f_{3I}(A^*)$ 进行模糊链式推理,且 $A_i, i=1,2,...,k$ 是正规集.那么存在 $\delta_1>0$ 使得对于 $\forall\varepsilon>0,\varepsilon<\delta_1$,当输入前件 A^* 满足 $W(A^*_1,A)<\varepsilon$时,最终的推理结果 A^*_k 满足 $W(A^*_k,A_k)<\varepsilon$.其中,$A_i\in F(X_i)$,$i=1,2,\ldots,k$;$A^*_1\in F(X_1)$,$A^*_k\in F(X_k)$,规则 $A_{i-1}\to A_i$ 被表示成 $R(A_{i-1},A_i), i=1,2,...,k-1$.

略证:由文献[1]中的定理 4 可知, $A_{i+1}=f_{3I}(A_i), i=1,2,...,k-1$ 成立,进行模糊链式推理时,由定理 6 可知结论成立. □

推论 3、定理 6 和推论 4 说明了 R_0 型全蕴涵三 I 算法对误差的传播性能.

4 结束语

本文严格地分析了 CRI 算法和三 I 算法的连续性和逼近性,并讨论了这两类算法对逼近误差的传播性能.此处,逼近性=还原性+连续性,所以,若模糊推理算法 $f(A^*)$不具有还原性,则谈不上逼近性.CRI 算法和 R_0 型全蕴涵三 I 算法在 FMP 和 FMT 情形都具有连续性质,CRI 算法是否具有逼近性与所选择的蕴涵关系 $R(a,b)$有关.R_0 型全蕴涵三 I 算法在已知规则中的前件和后件为正规集的条件下(这是极弱的条件,实际应用问题中几乎总能满足)具有逼近属性,且在进行真值的传播过程中,同时能保证误差不会得到扩大传播.对于所选择的特定的蕴涵关系 $R(a,b)$,若能使 CRI 算法具有还原性(已知的蕴涵关系 $R(a,b)$中,只有少数满足该条件),则此时的 CRI 算法具有逼近属性,能保证误差不会得到扩大传播.对其他型的全蕴涵三 I 模糊推理方法的逼近性的分析可类似进行.研究多维和多重模糊推理的连续性、逼近性和鲁棒性是该问题今后进一步研究的重要课题.

References:

[1] Wang GJ. Triple-Implication algorithm for fuzzy inference. Science in China (Series E), 1999,29(1):45~53 (in Chinese with English abstract).

[2] Buckley J, Tucker DM. Second generation fuzzy expert system. Fuzzy Sets and Systems, 1989,31(3):271~284.

[3] Li SW, Xiong FL, Huai XY. Fuzzy reasoning model of characteristic expansion based on triple I method and its application in expert systems. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2001,14(3):272~275 (in Chinese with English abstract).

[4] Li HX. Mechanism of interpolation in fuzzy control. Science in China (Series E), 1998,28(3):259~267(in Chinese with English abstract).

[5] Wang ST, Yu DJ. Error analysis in nonlinear system identification using fuzzy system. Journal of Software, 2000,11(4):447~452 (in Chinese with English abstract).

[6] Dubois D, Prade H. Fuzzy sets in approximate reasoning. Fuzzy Sets and Systems, 1991,40(1):143~244.

[7] Mizumoto M. Comparison of fuzzy reasoning methods. Fuzzy Sets and Systems, 1982,8(3):253~283.

[8] Buckley JJ, Hayashi Y. Can approximate reasoning be consistent? Fuzzy Sets and Systems, 1994,65(1):13~18.

[9] Wang ST. Neural Fuzzy Systems and Their Applications. Beijing: University of Aeronautics and Astronautics Press, 1998 (in Chinese).

[10] Wang GJ. Triple-Implication algorithm and interval-based fuzzy inference. Science in China (Series E), 1999,30(4):331~340 (in Chinese with English abstract).

[11] Li SK, Zhu KP. Global stability of fuzzy control systems. Acta Automatica Sinica, 2002,28(5):793~796 (in Chinese with English abstract).

[12] Xu WH, Ye YP, Yang JY. Two new neuron models based on T/S norms and their applications. Chinese Journal of Computers, 2003,26(9):1123~1129 (in Chinese with English abstract).

[13] Xu WH, Ye YP, Yang JY. Research on the properties of a compositional rule of fuzzy inference with parameters. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2002,15(4):397~402 (in Chinese with English abstract).

[14] Xu WH, Huang YY, Yang JY, Ye YP. A new method of fuzzy inference based on neural network. Microelectronics and Computer, 2002,19(220):7~10 (in Chinese with English abstract).

附中文参考文献:

[1] 王国俊.模糊推理的全蕴含三 I 算法.中国科学(E 辑),1999,29(1):45~53.

[3] 李绍稳,熊范纶,淮晓永.专家系统中的特征展开三 I 模糊推理模型及其应用.模式识别与人工能,2001,14(3):272~275.

[4] 李洪兴.模糊控制的插值机理,中国科学(E 辑),1998,28(3):259~267.

[9] 王士同.神经模糊系统及其应用.北京:北京航空航天大学出版社,1998.

[10] 王国俊.三 I 算法与区间值模糊推理.中国科学(E 辑),1999,30(4):31~340.

[11] 李绍宽,朱坤平.模糊控制系统的全局稳定性.自动化学报,2002,28(5):93~796.

[12] 徐蔚鸿,叶有培,杨静宇.两类新的基于 T/S 范数的模糊神经元模型及其应用.计算机学报,2003,26(9):1123~1129.

[13] 徐蔚鸿,叶有培,杨静宇.带参数的模糊推理合成法则的性质研究.模式识别与人工智能,2002,15(4):397~402.

[14] 徐蔚鸿,杨静宇,叶有培.一种基于神经网络的模糊推理方法.微电子学与计算机,2002,19(10):7~10.