

# 基于伪直母线的复杂曲面自适应分片与展开\*

陈动人, 王国瑾<sup>+</sup>

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

(浙江大学 数学系 图像图形研究所, 浙江 杭州 310027)

## A Complex Surface Adaptive Segment and Development Algorithm Based on Its Quasi-Rulings

CHEN Dong-Ren, WANG Guo-Jin<sup>+</sup>

(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

(Institute of Images and Graphics, Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

+Corresponding author: Phn: 86-571-87951609 ext 8306, E-mail: amawgj@mail.hz.zj.cn

<http://www.zju.edu.cn>

Received 2001-08-16; Accepted 2002-02-28

**Chen DR, Wang GJ. A complex surface adaptive segment and development algorithm based on its quasi-rulings. *Journal of Software*, 2003,14(3):660-665.**

**Abstract:** Using an adaptive segment technique, a topological complex 3D surface can be developed into its corresponding 2D pattern. Firstly, triangular facet model is used to present a complex surface, and its quasi-rulings are computed. Secondly, the 3D surface is adaptively segmented based on its quasi-ruling. Finally, each segment is flattened into 2D pattern. This development algorithm can be directly used to computer aided design or texture mapping. It can be also applied to post-process in practical industrial modeling.

**Key words:** developable surface; ruled surface; quasi-ruling; surface development

**摘要:** 利用自适应分片技术把拓扑结构复杂的曲面展开为平面. 首先把 CAD/CAM 常用的参数曲面转化为三角剖分模型, 求出曲面的伪直母线; 然后基于伪直母线对曲面进行自适应分片; 最后展开每一片曲面区域. 该算法可以直接应用于计算机辅助设计、制造和计算机图形学的纹理映射, 也可以应用于实际工业造型中的后继处理.

**关键词:** 可展曲面; 直纹面; 伪直母线; 曲面展开

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

包括不可展直纹面和非直纹面在内的拓扑结构复杂的曲面的展开问题是计算机辅助设计与制造(CAD/CAM)中的一个重要研究课题. 从大型的船舶和飞机到人们生活必需的服装, 其设计和制造过程中都需要

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.69973041 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.G1998030600 (国家重点基础研究发展规划(973)); the Natural Science Foundation of Zhejiang Province of China under Grant No.698025 (浙江省自然科学基金)

第一作者简介: 陈动人(1975-), 男, 浙江永康人, 博士, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学.

把复杂的空间曲面展开为平面。

复杂曲面展开的研究最早可追溯到 20 几年前.1980 年,CAD 杂志上发表了 Manning 的关于复杂曲面展开的论文,提出了基于等距树的计算机化模式裁剪方法,并应用于制鞋工业.从此以后,国际学者针对不同应用领域做了多项研究工作,得到了复杂曲面展开的多种方法<sup>[1-15]</sup>.依据产品所用的不同材质,展开方法大体上可以分为两类.即允许曲面展开成平面的过程中有一定程度的拉伸或压缩的展开方法和不允许存在任何形变的展开方法.对于后一类方法,非可展曲面展开为平面后存在着材料间的重叠和裂缝.例如,Hinds 等人<sup>[2]</sup>面向服装制造业给出了先用四边形面片逼近曲面,然后基于离散高斯曲率展开四边形网格的方法,其中允许展开后的曲面有裂缝.Azariadis 和 Aspragathos<sup>[3]</sup>改进了 Hinds 等人的方法,使展开后曲面的裂缝极小化.前一类方法一般基于优化原理或用能量模型,在给出一个优化目标后,作逐步逼近展开.如 Azariadis 和 Aspragathos<sup>[4]</sup>给出了基于约束全局优化的保持测地曲率的曲面展开方法.此类方法也常被应用于图形学中的纹理映射<sup>[4-8]</sup>.

由于直接对参数曲面作展开是非常困难的,所以通常都基于参数曲面的离散形式进行曲面展开的研究工作.从总体上来说,如果待展开的曲面为参数曲面,则先把原曲面用三角网格或四边形网格近似,然后把网格的展开图作为原曲面的展开图.又因为凸多面体任一个伞处的不可展开性已有严格证明<sup>[16]</sup>,所以通常的网格曲面从严格意义上讲都是不可展的,只能寻求逼近原曲面的展开图,或者寻求允许裂缝或重叠的展开图.众所周知,光滑曲面可展的充要条件是曲面上任意点处的高斯曲率为 0.把这一理论应用到离散形式,Calladine<sup>[17]</sup>给出了网格曲面的离散高斯曲率的定义.这个定义后来成为许多网格曲面展开方法<sup>[2,3]</sup>的基础.另外,也可对复杂曲面先作简单的带状分割,然后用直纹面近似每一条带状区域,最后使用全局优化的方法进行调整.如:席平<sup>[9]</sup>把三维参数曲面在一个参数方向上递归地二分成分条状区域和直纹面再进行展开;Hoschek<sup>[10]</sup>用两个方向的带状区域展开曲面去逼近旋转曲面等.曲面展开的其他区域分割方法有:Bennis<sup>[6]</sup>给出的基于人工交互分割的技术;Elber<sup>[11]</sup>给出的基于法曲率的改进的等参数线二分法的自动分片技术.后者改进了分割位置,减少了不必要的分割,但仍属于带状分割范畴.

在直母线上有不变的单位法向是可展曲面的另一重要特征<sup>[18]</sup>.以此为基础,Randrup<sup>[19]</sup>给出了基于曲面高斯球面像的用一张柱面去逼近曲面的方法.Chen 等人<sup>[20]</sup>推广了 Randrup 的方法,用多片可展曲面去逼近一张曲面,但是他们考虑的还只能是一个方向的带状拼接.

综观以上曲面展开的各种方法不难看出,这些方法中对复杂曲面的区域分割都只是简单地分为大或小,或是机械地采取带状分割或改进的带状分割,缺乏明显的几何意义,更没有抓住可展的几何特征对曲面进行最优的分割.因而曲面分片数目不能加以控制,而且计算量偏大,其最大的局限性则是对拓扑结构复杂的曲面(如三叉管曲面)展开无能为力.

正因为看到区域分割方法的不同直接影响到曲面展开的质量,因此,本文从定义不可展曲面的伪直母线入手,给出以伪直母线转角为依据的自适应分片算法,而不是简单地采用带状分片,这样的分片展开算法可以应用于拓扑结构复杂的曲面,分片数目可人为地控制且计算量小.至于每一片的展开方法,本文给出精确的、允许重叠和裂缝的展开方法.针对不同的应用需求,可以在此基础上对展开后的平面网格作进一步的调整.本文的算法同时适用于连续定义的参数曲面,因为它是一种在给定的误差下对参数曲面精确展开的离散逼近算法.

## 1 伪直母线的定义及算法

本节对包括不可展直纹面和非直纹面在内的非可展曲面给出其伪直母线的定义及其几何意义解释.

**定义 1.** 对于空间曲面  $S$  上任意一点  $P$ ,如果在它的一个测地圆形邻域边界上某一点  $Q$  处,拥有与点  $P$  处最接近的单位法矢,则方向  $\overrightarrow{PQ}$  称为曲面  $S$  在点  $P$  处的一个伪直母线方向.而由  $P$  点和其一个伪直母线方向所确定的一条射线称为曲面  $S$  在  $P$  点处的一条伪直母线.这里,所谓单位法矢的接近程度由两个向量之差的二范数大小来确定.

对空间曲面  $S$  上任意一点  $P$ ,可以根据其高斯曲率  $K$  的取值分为双曲点( $K < 0$ )、抛物点( $K = 0$ )、椭圆点( $K > 0$ )这样 3 类.下面分 4 种情况讨论伪直母线的意义.从定义 1 我们可以看出,顶点  $P$  处由伪直母线方向所确定的径向测地线有极小曲率半径,即从局部上看<sup>[18]</sup>:

- (1) 当  $K < 0$  时,伪直母线方向恰为拥有绝对值较小的主曲率对应的主方向.
- (2) 当  $K > 0$  时,伪直母线方向为椭圆面长半轴方向,也就是拥有较小主曲率的主方向.
- (3) 当  $K = 0$ ,且主曲率  $k_1, k_2$  不同时为 0 时,伪直母线恰是可展曲面的直母线.而可展曲面当然是沿垂直直母线方向展开的.
- (4) 当  $k_1, k_2$  同时为 0,即当点  $P$  是表面上的平点时,任意方向都可以作为它的伪直母线方向.

如果我们把曲面  $S$  的伪直母线记为

$$\mathbf{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k},$$

其中  $a_x, a_y, a_z$  为向量  $\mathbf{a}$  的分量,它们都是关于点位置  $(x, y, z)$  的函数,则由曲面上曲率线的定义可知,曲率线上每一点处的切线都沿着主方向,于是向量场  $\mathbf{a}$  的向量线恰为曲面  $S$  的曲率线.另外,我们知道,任意可展曲面的曲率线为直母线与它的正交轨线,而且直母线有绝对值较小的主曲率.因此我们可以看出,把曲面沿着垂直伪直母线方向展开总是比较合理的.基于这一分析我们得到下面的算法 1.

**算法 1.** 伪直母线生成算法.

输入:三维网格,其顶点集为  $P = \{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}\}$ ,其中  $n$  为顶点数.

输出:网格曲面的伪直母线.

Step 1. 对曲面网格的每一个顶点  $P_i$ :

Step 1.1. 如果此顶点  $P_i$  位于边界上,则转下一个顶点  $P_{i+1}$ ;

Step 1.2. 求出顶点  $P_i$  的单位法向  $N$ ,并对此顶点  $P_i$  的所有相邻顶点  $P_j$ ;

Step 1.2.1. 计算以顶点  $P_i$  与顶点  $P_j$  的连线为边界的两个面的单位法向的平均单位向量  $N_j$ ,作为网格曲面在顶点  $P_j$  的邻域边界上的一个单位法向.

Step 1.2.2.  $NN_j \leftarrow N \cdot N_j$ .

Step 1.3. 求出拥有最大  $NN_j$  的顶点  $P_j$ .把从顶点  $P_i$  指向顶点  $P_j$  的方向作为顶点  $P_i$  处的伪直母线方向.再把从顶点  $P_i$  指向  $P_j$  处伪直母线方向的射线作为顶点  $P_i$  处的伪直母线.

Step 2. 结束,输出结果.

易见,算法 1 是局部性算法,它无须作全局优化,因此计算量小,速度快.上述效果可由第 3 节中的实例得到验证.

现在我们指出,利用伪直母线可以轻松地测量每一张拓扑结构复杂的曲面的可展程度的大小.近年来,国际上众多学者给出了曲面展开质量的一些衡量准则.常用的有:相对面积误差、相对边长误差等<sup>[8,9]</sup>.但是他们都还没有给出曲面本身的可展程度的衡量标准.下面,基于上述伪直母线定义,我们给出复杂曲面可展程度的一种度量.

**定义 2.** 对由三维网格点集  $\{P_i\}_{i=0}^{n-1}$  所决定的复杂曲面  $S$ ,其可展程度  $E$  定义为

$$E = \sum_{i=1}^n |a_{ii}|,$$

这里,  $i$  是顶点  $P_i$  的下标,  $i_j$  是顶点  $P_i$  处  $S$  的伪直母线方向上与  $P_i$  相邻顶点的下标.  $a_{ii}$  为两个顶点  $P_i, P_{i_j}$  处伪直母线的夹角.

从定义 2 我们知道,可展曲面的  $E$  值等于 0.对于一般曲面,其  $E$  值越小,越容易被展开为平面.

## 2 曲面自适应分片展开算法

本算法的关键在于如何确定曲面分片的边界.其基本原理为:采用广度优先算法搜索网格面片,从网格曲面的一个面片开始,由面片顶点计算面片本身及其相邻面片的伪直母线方向,如果此两个伪直母线方向的夹角小于给定的阈值,则把此相邻面片作为下一个搜索目标放入队列.由此递归地搜索直至队列为空,这样就形成一个分片区域.如果还有未搜索面片,则建立新的分片区域继续进行,直至搜索完整个网格曲面.

**算法 2.** 复杂曲面分片算法.

输入:待分片的三角网格曲面.伪直母线阈值  $\varepsilon_1$ ,伪直母线转角阈值  $\varepsilon_2$ .

输出:原曲面的多个曲面区域.

Step 1. 利用算法 1,对每一个顶点求得曲面在该点的伪直母线.

Step 2. 直到网格曲面全部搜索完毕,否则

Step 2.1. 选择起始面片  $\pi_i$  用于区域搜索.这里,起始面片可以人工交互选择,也可以根据面片相邻关系自动选定.

Step 2.2. 分析面片  $\pi_i$  的 3 个顶点的伪直母线方向.如果有 2 个或 2 个以上伪直母线方向的内积绝对值大于给定的阈值  $\varepsilon_1$ ,则把其中一个伪直母线方向作为此面片的伪直母线方向.否则,此面片的伪直母线方向待定.

Step 2.3. 考虑面片  $\pi_i$  的所有相邻面片  $\pi_j$ .如果面片  $\pi_i$  和  $\pi_j$  的伪直母线方向的夹角小于给定阈值  $\varepsilon_2$ ,则把面片  $\pi_j$  置入队列以待搜索.如果面片  $\pi_j$  的伪直母线方向待定,则从面片  $\pi_i$  继承伪直母线方向.

Step 2.4. 如果待搜索面片队列非空,则转 Step2.2,否则,如果还有面片未搜索,则建立新的分片区域,转 Step2.1.

Step 3. 分片算法结束.

算法 3. 复杂曲面展开算法.

输入:待展开的曲面.

输出:原曲面展开后的多个平面区域和平面网格.

Step 1. 如果已知曲面是参数曲面,调用三角剖分算法<sup>[14]</sup>进行曲面离散.

Step 2. 利用算法 2,对曲面网格进行区域分割.

Step 3. 对曲面网格的每一个区域:

Step 3.1. 利用三角片旋转算法展开曲面网格<sup>[9]</sup>.

Step 3.2. 生成 3D 网格展开后的 2D 网格的边界.

Step 4. 结束,返回曲面展开后的多片平面片边界.

Parida 和 Mudur<sup>[13]</sup>曾经给出了对展开后材料平面裂缝方向的调整方法.这一方法对拉伸强度具有各向异性的服装布料等展开具有显著的意义.在本研究中,我们已经验证,采用此方法对分片展开后的曲面作各种实际应用所需的调整是简易可行的.第 3 节中的图示为曲面展开的直接结果.

### 3 算法应用实例

图 1 和图 2 是曲面展开算法示例.计算结果统计见表 1,计算环境为 Pentium III 933 计算机.

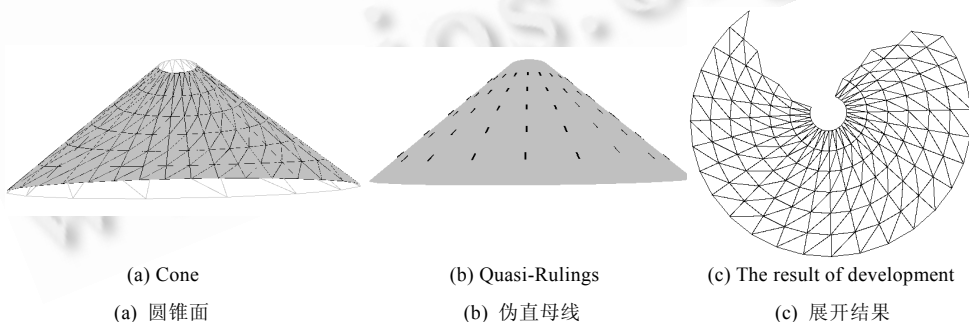


Fig.1 Development of cone

图 1 圆锥面展开

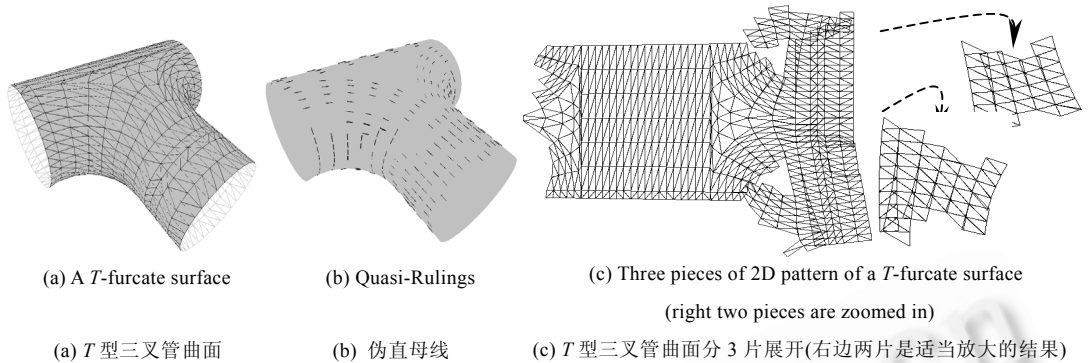
Fig.2 Development of a  $T$ -furcate surface图2  $T$ 型三叉管曲面展开

Table 1 Computational results

表1 计算结果

Ex	Vertex number	Triangles number	2D pattern number	Surface $E$ value	Used $\varepsilon_1$	Used $\varepsilon_2$	Algorithm run-time (s)
I	458	576	1	0.01	0.9	1.5	0.3
II	1 791	2 308	3	65.81	0.9	1.5	0.8

#### 4 总结与讨论

本文给出的曲面分片展开方法由于抓住了表面上的伪直母线这一几何特征,因此建立了具有丰富几何内涵的自适应分片方法,在此基础上对曲面进行精确展开,大大提高了复杂曲面展开的质量.本方法具有以下一些明显的优点:

- (1) 可以对拓扑结构复杂的任意曲面进行展开.
- (2) 利用伪直母线转角阈值可以控制曲面分片的多少.与文献[9,10]采用简单带状分割方法相比,更容易控制拓扑结构复杂的曲面分片数目.同时,分割方法更好地抓住了曲面的几何特征.如果一张参数曲面是可展曲面,而其等参数曲线与直母线又不一致,则采用文献[9~11]的分割方法必定会引入不必要的分割.
- (3) 算法计算量小,速度快.展开算法计算量仅为  $O(n)$ .与文献[6,11]相比较,分割方法计算简单,不需要计算每一网格节点的测地曲率或法曲率.
- (4) 由于展开算法独立于曲面的表示形式,故适用于各种工程应用.

可以应用本文的分片算法对国际上现有的各种曲面展开算法进行改进.

#### References:

- [1] Manning JR. Computerized pattern cutting. *Computer-Aided Design*, 1980,12(1):43~47.
- [2] Hinds BK, McCartney J, Woods G. Pattern development for 3D surfaces. *Computer-Aided Design*, 1991,23(8):583~592.
- [3] Azariadis PN, Aspragathos NA. Design of plane developments of doubly curved surfaces. *Computer-Aided Design*, 1997, 29(10):675~685.
- [4] Azariadis PN, Aspragathos NA. Geodesic curvature preservation in surface flattening through constrained global optimization. *Computer-Aided Design*, 2001,33(8):581~591.
- [5] Ma, SD, Lin, H. Optimal texture mapping. In: Duce PA, Jancene P, eds. *Proceedings of the Eurographics*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1988. 421~428.
- [6] Bennis C, Vezien J-M, Iglesias G. Piecewise surface flattening for non-distorted texture mapping. *Computer Graphics*, 1991,25 (4):237~246.

- [7] Jerome M, Hussein Y, Anne V. Interactive texture mapping. In: Kajiya J, ed. Proceedings of the SIGGRAPH. New York: ACM Press, 1993. 27~34.
- [8] Wang H, Wang CL. A general surface development algorithm based on energy model. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2001,13(6):556~560 (in Chinese with English Abstract).
- [9] Xi P. Geometric approach of 3D surface development. Chinese Journal of Computers, 1997,20(4):315~322 (in Chinese with English Abstract).
- [10] Hoschek J. Approximation of surfaces of revolution by developable surfaces. Computer-Aided Design, 1998,30(10):757~763.
- [11] Elber G. Model fabrication using surface layout projection. Computer-Aided Design, 1995,27(4):283~291.
- [12] Shimada T, Tada Y. Approximate transformation of an arbitrary curved surface into a plane using dynamic programming. Computer-Aided Design, 1991,23(2):153~159.
- [13] Parida L, Mudur SP. Constraint-satisfying planar development of complex surfaces. Computer-Aided Design, 1993,25(4):225~232.
- [14] Cho W, Patrikalakis NM, Peraire J. Approximate development of trimmed patches for surface tessellation. Computer-Aided Design, 1998,30(14):1077~1087.
- [15] Yu GX, Patrikalakis NM, Maekawa T. Optimal development of doubly curved surfaces. Computer Aided Geometric Design, 2000,17(6):545~577.
- [16] Maehara H. Can a convex polyhedron has a developable face-cycle? Theoretical Computer Science, 2000,235(2):267~270.
- [17] Calladine CR. Gaussian curvature and shell structures. In: Gregory JA, ed. Proceedings of the Conference Mathematics of Surfaces Manchester. Oxford: Clarendon Press, 1984. 179~196.
- [18] do Carmo Manfredo P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1976.
- [19] Randrup T. Approximation of surfaces by cylinders. Computer-Aided Design, 1998,30(10):807~812.
- [20] Chen HY, Lee IK, Leopoldseder S, Pottmann H, Randrup T, Wallner J. On surface approximation using developable surfaces. Graphical Models and Image Processing, 1999,61(2):110~124.

#### 附中文参考文献:

- [8] 王弘,王昌凌.基于能量模型的曲面展开通用算法.计算机辅助设计与图形学学报,2001,13(6):556~560.
- [9] 席平.三维曲面的几何展开.计算机学报,1997,20(4):315~322.