基于量子逻辑的自动机和文法理论*

邱道文+

(中山大学 计算机科学系,广东 广州 510275)
(清华大学 计算机科学与技术系,北京 100084)
(清华大学 智能技术与系统国家重点实验室,北京 100084)

Automata and Grammars Theory Based on Quantum Logic

QIU Dao-Wen+

(Department of Computer Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)
(Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China)
(State Key Laboratory of Intelligent Technology and Systems, Tsinghua University, Beijing 100084, China)
+ Corresponding author: Phn: 86-20-38458089, E-mail: issqdw@zsu.edu.cn
http://www.zsu.edu.cn
Received 2001-03-29; Accepted 2001-05-18

Qiu DW. Automata and grammars theory based on quantum logic. *Journal of Software*, 2003,14(1):23~27.

Abstract: In this paper, a fundamental framework of automata and grammars theory based on quantum logic is preliminarily established. First, the introduce quantum grammar, which is called l valued grammars, is introduced. It is particularly showed that the language (called quantum language) generated by any l valued regular grammar is equivalent to that recognized by some automaton with ε moves based on quantum logic (called l valued automata), and conversely, any quantum language recognized by l valued automaton is also equivalent to that generated by some l valued grammar. Afterwards, the l valued pumping lemma is built, and then a decision characterization of quantum languages is presented. Finally, the relationship between regular grammars and quantum grammars (l valued regular grammars) is briefly discussed. Summarily, the introduced work lays a foundation for further studies on more complicated quantum automata and quantum grammars such as quantum pushdown automata and Turing machine as well as quantum context-free grammars and context-sensitive grammars.
Key words: quantum logic; automata; regular grammar; formal language; pumping lemma

摘 要: 初步建立了基于量子逻辑的自动机和文法理论的基本框架.引入了量子文法(称为 l 值文法),特别是证明了任意 l 值正规文法生成的语言(称为量子语言)等价于某种基于量子逻辑且含动作ε的自动机(称为 l 值自动机)识别的语言,反之,任意 l 值自动机识别的语言等价于某 l 值正规文法生成的语言.建立了 l 值泵引理,并得到量

* Supported by the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.G1998030509 (国家重点基础研究发展规划(973)); the National Natural Science Foundation of China for Distinguished Young Scholars under Grant No.69725004 (国家杰出青年科学基金); the Natural Science Foundation of Guangdong Province of China under Grant No.020146 (广东省自然科学基金); the Young Foundation of Zhongshan University of China under Grant No.35100-1131127 (中山大学青年基金)

第一作者简介: 邱道文(1967－),男,江西石城人,博士,副教授,主要研究领域为模糊自动机理论,量子计算.

子语言的判定性刻画.最后简要讨论了正规文法与量子文法(即 l 值正规文法)的关系.因此,为进一步研究更复杂的量子自动机(如量子下推自动机和 Turing 机)和量子文法(如量子上下文无关文法和上下文有关文法)奠定了基础.

关键词: 量子逻辑;自动机;正规文法;形式语言;泵引理

中图法分类号: TP301 **文献标识码**: A

Benioff[1]和 Feynman[2,3]曾于 20 世纪 80 年代初构想过量子计算机.其后,Deutsch[4]将他们的思想形式化并引入了量子 Turing 机的概念.值得指出的是,Deutsch[4]提出了量子并行操作技术,因而他引入的量子 Turing 机能在同一带上将大量的输入信号进行编码并同时对它们进行演算.在进一步探索量子并行操作技术的过程中,Shor[5]于 1994 年发现了量子计算机上大数分解的多项式时间算法.其后不久,Grover[6]为模式识别和数据挖掘发展了一套快速的量子算法.由于大数分解和数据挖掘是计算机科学的中心问题,所以此后,量子计算成为物理学和计算机科学的一个日益活跃的研究领域.至今,量子计算的研究大致可分为 4 个层次:(1) 物理实现;(2) 物理模型;(3) 数学模型;(4) 逻辑基础.Lloyd[7]和 Cirac 等人[8]考虑过第(1)个层次;文献[1~4]考虑过第(2)个层次.在经典计算机理论中,自动机是计算机的简单数学模型.文献[9,10]将状态集量子化,推广了经典自动机理论,引入了作为量子计算机的简单模型的量子自动机.在 1936 年,Birkhoff 和 von Neumann[11]提出了量子逻辑.它源于量子力学的形式化.由于量子力学系统可由 Hilbert 空间的闭子空间来描述,而 Hilbert 空间的所有闭子空间构成正交模格,所以,正如 Boolean 代数是经典逻辑的代数形式一样,文献[5]建议用正交模格作为量子力学逻辑的代数形式.现在,有些文献定义量子逻辑为正交模格,如文献[12].文献[13,14]将量子逻辑定义为完备的正交模格值逻辑,从而提出了基于量子逻辑的自动机理论,即 l 值自动机(或者称为量子自动机,但不同于文献[9,10]中的量子自动机),并讨论了 l 值自动机的一些运算性质和泵引理.这是量子计算的一种逻辑方法.由于 l 值自动机中状态转移的可能性的大小是 Hilbert 空间的一个闭子空间,所以在一定程度上可以认为它是量子计算的数学模型和文献[9,10]的进一步抽象.在本文中,我们首先引入 l 值文法,讨论更一般的(含 ε 动作)l 值自动机,特别是建立了 l 值正规文法和 l 值自动机的等价性(定理 1 和定理 2).然后建立了 l 值泵引理,并得到了 l 值自动机的判定性刻画定理(定理 3).最后简要讨论正规集合与 l 值正规文法的关系.对于 l 值下推自动机与 l 值上下文无关文法及 l 值 Turing 机与 l 值上下文有关文法等问题,我们将在以后进行讨论.

完备的正交模格是七元组 $l=\langle L,\le,\wedge,\vee,\perp,0,1\rangle$.其中 $\langle L,\le,\wedge,\vee,0,1\rangle$ 是完备格;0 与 1 分别是最大与最小元;$\le$ 是偏序;对 $M\subseteq L$, $\wedge M$ 和 $\vee M$ 分别表示 M 的最大下界与最小上界;一元运算 $\perp$ 是 L 上的正交补,且满足:对任意 $a,b\in L$, $a\wedge a^{\perp}=0$; $a\vee a^{\perp}=1$; $a^{\perp\perp}=a$; $a\le b$ 蕴含 $b^{\perp}\le a^{\perp}$; $a\ge b$ 蕴含 $a\wedge(a^{\perp}\vee b)=b$ 在 L 上定义蕴含算子 $\rightarrow$ 满足:对任意 $a,b\in L$, $a\le b$ 当且仅当 $a\rightarrow b=1$.定义双蕴含算子:对任意 $a,b\in L$, $a\leftrightarrow b=(a\rightarrow b)\wedge(b\rightarrow a)$ .l 值逻辑的语法类似于经典的一阶逻辑.$\neg$, $\wedge$ 和 $\rightarrow$ 是 3 个原始连接词,$\forall$是原始量词.$\vee$, $\leftrightarrow$ 和 $\exists$ 由 $\neg$, $\wedge$, $\rightarrow$ 和 $\forall$ 来定义.在语义方面,我们将 $\neg$, $\wedge$ 和 $\rightarrow$ 分别解释为 $\perp$, $\wedge$ 和 $\rightarrow$;$\forall$解释为 L 中的最大下界.集合论公式 $x\in A$ 的真值是 $\lceil x\in A\rceil=A(x)$;公式 φ 是有效的,当且仅当 $\lceil\varphi\rceil$ 等于 1.

1 l 值自动机和 l 值正规文法的等价性

定义 1. 设 $l=\langle L,\le,\wedge,\vee,\perp,0,1\rangle$ 是完备的正交模格, Σ 是一个有限字母表,称四元组 $M=\langle Q,q_0,F,\delta\rangle$ 是 Σ 上的 l 值自动机,其中 Q 表示有限状态集合, $q_0\in Q$ 表示初始状态, $F\subseteq Q$ 表示终结状态集合, δ 是状态转移关系,即 $Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times Q$ 到 L 的映射,且满足:对任意 $q\in Q$, $\delta(q,\varepsilon,q)=1$,其中 ε 表示空串.为了方便起见,对 $\sigma_1...\sigma_k\in\Sigma^*$ (Σ^* 表示 Σ 上的所有字),记 $\{\lambda_1...\lambda_m:\sigma_1...\sigma_k=\lambda_1...\lambda_m\in\Sigma^*\}=\varepsilon(\sigma_1...\sigma_k)$ (若 $m>k$,则必有 $m-k$ 个 λ_i 为 ε).M 决定了 Σ^* 上的一个一元 l 值谓词 rec_M ,其定义是:对任意 $\sigma_1...\sigma_k\in\Sigma^*$,

$$rec_M(\sigma_1...\sigma_k)\overset{\text{def}}{=}(\exists\lambda_1...\lambda_m\in\varepsilon(\sigma_1...\sigma_k))(\exists q_1...q_{m-1}\in Q,\exists q_m\in F)\ (\forall i\in\{0,...,m-1\})((q_i,\sigma_{i+1},q_{i+1})\in\delta).$$

直观上, $rec_M(\sigma_1...\sigma_k)$ 表示 $\sigma_1...\sigma_k$ 被 M 识别的命题,其真值是

$$\lceil rec_M(\sigma_1...\sigma_k)\rceil=\bigvee_{\lambda_1...\lambda_m\in\varepsilon(\sigma_1...\sigma_k)}\ \bigvee_{q_1...q_{m-1}\in Q,q_m\in F}\ \bigwedge_{i=0}^{k-1}\delta(q_i,\sigma_{i+1},q_{i+1}).$$

注:与文献[13,14]中 l 值自动机的定义相比,定义 1 中的 M 含有 ε 动作,因而更具一般性.当然,若转移关系 δ 满足:对任意 $q\in F$, $\delta(q_0,\varepsilon,q)\in\{0,1\}$ 时,它们所识别的语言类是相同的.此结论已在另一篇文章中讨论过了,而且证明稍嫌繁琐,所以在此不作详细论述.但是,我们尚不知在无此条件的前提下,该结论是否仍成立.

定义 2. 称四元组 $G=\langle V,T,P,s\rangle$ 为 l 值正规文法,其中 V 和 T 分别是变元与终极符的有穷集合 $(V\cap T=\varnothing)$, $s\in V$ 是开始符号,P 是 $(V\times T)\cup(V\times T_\varepsilon V_\varepsilon)=D$ 的 L 子集(其中 $T_\varepsilon=T\cup\{\varepsilon\}$, $V_\varepsilon=V\cup\{\varepsilon\}$, $T_\varepsilon V_\varepsilon=\{\sigma_1\sigma_2:\sigma_1\in T_\varepsilon,\sigma_2\in V_\varepsilon\}$),即 D 到 L 的映射,且满足:

(1) 任意 $v\in V$, $P((v,v))=1$;

(2) P 的支集 $\{(\alpha,\beta):P((\alpha,\beta))\neq 0\}$ 是有限的,其中 $T_\varepsilon=T\cup\{\varepsilon\}$, $V_\varepsilon=V\cup\{\varepsilon\}$.扩张 P 到 $(V\cup T)^*\times(V\cup T)^*$,当 $(\alpha,\beta)\notin D$ 时, $P((\alpha,\beta))=0$.由 G 导出 $(V\cup T)^*\times(V\cup T)^*$ 上的两个 l 值谓词 $dder_G$ 和 der_G,其定义是:对任意 $\alpha,\beta\in(V\cup T)^*$,

$$dder_G(\alpha,\beta)\overset{\text{def}}{=}(\exists v_1,v_2\in V_\varepsilon,\exists\sigma\in T_\varepsilon,\exists\alpha_1,\alpha_2\in(V\cup T)^*)(\alpha=\alpha_1v_1\alpha_2\wedge\beta=\alpha_1v_2\alpha_2\wedge(v_1,\sigma v_2)\in P),$$

$$der_G((\alpha,\beta))\overset{\text{def}}{=}(\exists\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in(V\cup T)^*)\left(dder_G((\alpha,\alpha_1))\overset{k-1}{\underset{i=1}{\wedge}}dder_G((\alpha_i,\alpha_{i+1}))\wedge dder_G((\alpha_k,\beta))\right).$$

我们进一步定义 T^* 上的一元谓词 g_G:对任意 $\sigma_1\ldots\sigma_k\in T^*$, $g_G(\sigma_1\ldots\sigma_k)\overset{\text{def}}{=}der_G((s,\sigma_1\ldots\sigma_k))$.直观上, $g_G(\sigma_1\ldots\sigma_k)$ 表示 G 产生 $\sigma_1\ldots\sigma_k$ 的命题,其真值是

$$\lceil g_G(\sigma_1\ldots\sigma_k)\rceil\overset{\text{def}}{=}\lceil der_G((s,\sigma_1\ldots\sigma_k))\rceil=\bigvee_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in\varepsilon(\sigma_1\ldots\sigma_k)}\ \bigvee_{v_1,\ldots,v_{m-1}\in V}\left(P((s,\lambda_1v_1))\wedge\overset{m-2}{\underset{i=1}{\wedge}}P((v_i,\lambda_{i+1}))\wedge P((v_{m-1},\lambda_m))\right).$$

注:形式上,定义 2 中 P 的支集类似于经典正规文法[15]中的生成式.

定义 3. 设 Σ 是一个有限字母表,则称 Σ^* 到 L 的映射为 l 值语言.

定义 4. 设 $G=\langle V,T,P,s\rangle$ 为 l 值正规文法,则称 g_G 为由 G 产生的 l 值正规语言.

定义 5. 设 $G_1=\langle V_1,T,P_1,s_1\rangle$ 与 $G_2=\langle V_2,T,P_2,s_2\rangle$ 是两个 l 值正规文法.若对任意 $\sigma\in T^*$, $\overset{l}{\models}g_{G_1}(\sigma)\leftrightarrow g_{G_2}(\sigma)$,则称 G_1 与 G_2 等价.

定理 1. 设 $G=\langle V,T,P,s\rangle$ 为 l 值正规文法,则存在 T 上的 l 值自动机 M,使得对任意 $\sigma_1\ldots\sigma_k\in T^*$,有

$$\overset{l}{\models}rec_M(\sigma_1\ldots\sigma_k)\leftrightarrow g_G(\sigma_1\ldots\sigma_k).$$

证明:先构造 l 值自动机 $M=\langle V\cup\{q\},s,\{q\},\delta\rangle$,其中 q 是新的符号,δ 定义为:对任意 $v\in V$, $\sigma\in T\cup\{\varepsilon\}$, $\delta(v,\sigma,q)=P((v))$;任意 $v_1,v_2\in V$, $\sigma\in T\cup\{\varepsilon\}$, $\delta(v_1,\sigma,v_2)=P((v_1,\sigma v_2))$;对任意 $v\in V\cup\{q\},\sigma\in T$, $\delta(q,\sigma,v)=0$;任意 $v\in V$, $\delta(q,\varepsilon,v)=0$.这时,

$$\lceil rec_M(\varepsilon)\rceil=\bigvee_{v_1,\ldots,v_{k-1}\in V\cup\{q\}}(\delta(s,\varepsilon,v_1)\wedge\delta(v_1,\varepsilon,v_2)\wedge\ldots\wedge\delta\{v_{k-1},\varepsilon,q\}).$$

若 $\{v_1,\ldots,v_{k-1}\}\subseteq V$,则 $\delta(s,\varepsilon,v_1)\wedge\delta(v_1,\varepsilon,v_2)\wedge\ldots\wedge\delta(v_{k-1},\varepsilon,q)=P((s,v_1))\wedge\ldots\wedge P((v_{k-1,\varepsilon}))$;若 i_0 是 $v_1,\ldots,v_{k-1}$ 中使 $v_{i_0}=q$ 的最小 i_0,则 $v_{i_0}=v_{i_0+1}=\ldots=v_k=q$,因而

$$\delta(s,\varepsilon,v_1)\wedge\delta(v_1,\varepsilon,v_2)\wedge\ldots\wedge\delta(v_{i_0-1},\varepsilon,q)=P((s,v_1))\wedge\ldots\wedge P((v_{i_0-1,\varepsilon})).$$

可见,$\lceil rec_M(\varepsilon)\rceil=\lceil g_G(\varepsilon)\rceil$.设 $\sigma_1\ldots\sigma_k\in T^*\setminus\{\varepsilon\}$,则

$$\begin{aligned}\lceil rec_M(\sigma_1\ldots\sigma_k)\rceil&=\bigvee_{\lambda_1\ldots\lambda_m\in\varepsilon(\sigma_1\ldots\sigma_k)}\ \bigvee_{v_0,v_1,\ldots,v_m\in V\cup\{q\},v_0=s,v_m=q}\ \overset{m-1}{\underset{i=0}{\wedge}}\delta(v_i,\lambda_{i+1},v_{i+1})\\&=\bigvee_{\lambda_1\ldots\lambda_m\in\varepsilon(\sigma_1\ldots\sigma_k)}\ \bigvee_{v_1,\ldots,v_{m-1}\in V}\left(\delta(s,\lambda_1,v_1)\wedge\overset{m-2}{\underset{i=1}{\wedge}}\delta(v_i,\lambda_{i+1},v_{i+1})\wedge\delta(v_{m-1},\lambda_m,q)\right)\\&=\bigvee_{\lambda_1\ldots\lambda_m\in\varepsilon(\sigma_1\ldots\sigma_k)}\ \bigvee_{v_1,\ldots,v_{m-1}\in V}\left(P((z,\lambda_1v_1))\wedge\overset{m-2}{\underset{i=1}{\wedge}}P((v_i,\lambda_{i+1},v_{i+1}))\wedge P((v_{m-1},\lambda_m))\right)\\&=\lceil g_G(\sigma_1\ldots\sigma_k)\rceil.\end{aligned}$$

□

定理 2. 设 $M=\langle Q,q_0,F,\delta\rangle$ 是字母表 Σ 上的 l 值自动机,则存在 l 值正规文法 G 使得对任意 $\sigma\in\Sigma^*$,有

$$\stackrel{l}{\models} rec_M(\sigma)\leftrightarrow g_G(\sigma).$$

证明:先构造 $G=\langle Q,\Sigma,P,q_0\rangle$,其中:(1) 任意 $q,p\in Q$,$\sigma\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$, $P((q,\sigma p))=\delta(q,\sigma,p)$;(2) 任意 $q\in F$, $P((q,\varepsilon))=1$.这时,易知

$$\lceil rec_M(\varepsilon)\rceil=\lceil g_M(\varepsilon)\rceil,$$

$$\lceil rec_M(\sigma_1...\sigma_k)\rceil=\bigvee_{\lambda_1...\lambda_m\in\varepsilon(\sigma_1...\sigma_k)}\ \bigvee_{q_1,...,q_{m-1}\in Q,q_m\in F}\ \bigwedge_{i=0}^{m-1}\delta(q_i,\lambda_{i+1},q_{i+1})=\lceil g_G(\sigma_1...\sigma_k)\rceil.$$ □

2 *l* 值自动机的判定性

在经典自动机理论中[15],泵引理是判定语言为非正规语言的有力工具.在形式上,L 是 Σ 上的正规语言,则存在正整数 n,使得对任意 $x\in L$,当 x 的长度 $|x|\geq n$ 时,必有 $u,v,w\in\Sigma^*$,满足: $x=uvw$, $|v|\geq1$, $|uv|\leq n$ 及任意 $i\geq0$, $uv^iw\in L$.本节在 l 值自动机理论中建立泵引理,并讨论其应用.事实上,文献[13,14]中已讨论了 l 值泵引理,但那里是对不含 ε 动作的 l 值自动机讨论的,且需要几个条件.为了讨论 l 值自动机的判定性刻画,需要一个更简单的泵引理.建立该引理不需要任何条件,且 l 值自动机可含有 ε 动作.

引理 1(*l* 值泵引理). 设 $M=\langle Q,q_0,F,\delta\rangle$ 是 Σ 上的 l 值自动机.若 Q 有 n 个状态,则对任意 $\sigma\in\Sigma^*$,当 $k\geq n$ 时,

$$\stackrel{l}{\models} rec_M(\sigma)\to(\exists\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\Sigma^*)(\sigma=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\wedge|\alpha_2|\geq1\wedge(\forall i\in\omega)rec_M(\alpha_1\alpha_2^i\alpha_3)),$$

其中 ω 表示所有的非负整数集合(下同),$|\sigma|$ 表示 σ 的长度.

证明:设 $\sigma=\sigma_1...\sigma_k$,则 $\lceil rec_M(\sigma)\rceil=\bigvee_{\lambda_1...\lambda_m\in\varepsilon(\sigma)}\ \bigvee_{q_1,...,q_{m-2}\in Q,q_m\in F}\ \bigwedge_{i=0}^{m-1}\delta(q_i,\lambda_{i+1},q_{i+1})$.所以,要证明对任意 $\lambda_1...\lambda_m\in\varepsilon(\sigma)$ 及任意 $q_1,...,q_{m-1}\in Q,q_m\in F$,有

$$\begin{aligned}\bigwedge_{j=0}^{m-1}\delta(q_j,\lambda_{j+1},q_{j+1})&\leq\lceil(\exists\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\Sigma^*)(\sigma=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\wedge|\alpha_2|\geq1\wedge(\forall i\in\omega)rec_M(\alpha_1\alpha_2^i\alpha_3))\rceil\\&=\bigvee_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\Sigma^*,\delta=\alpha_1\alpha_2\alpha_3,|\alpha_2|\geq1,|\alpha_1\alpha_2|\leq n}\ \bigwedge_{i\geq0}\lceil rec_M(\alpha_1\alpha_2^i\alpha_3)\rceil.\end{aligned}\tag{1}$$

设 $\lambda_{i_1},...,\lambda_{i_k}$ 是 $\{\lambda_1,...,\lambda_m\}$ 中所有不等于 ε 的输入符号,且 $\lambda_{i_1},...,\lambda_{i_k}=\sigma_1,...,\sigma_k$,因而 $\lambda_{i_j}=\sigma_j$, $j=1,...,k$.考虑状态 $q_{i_1-1},q_{i_1},q_{i_2},...,q_{i_k}$,并分别记为 $p_0,p_1,...,p_k$.既然 $k\geq n=|Q|$,所以必然存在两个相同的状态 p_{i_0},p_{j_0},满足: $0\leq i_0\leq j_0\leq n$.这时, $\alpha_1=\sigma_1...\sigma_{i_0}$, $\alpha_2=\sigma_{i_0+1}...\sigma_{j_0}$, $\alpha_3=\sigma_{j_0+1}...\sigma_k$,则显然有 $\sigma=\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $|\alpha_2|=j_0-i_0\geq1$ 及 $|\alpha_1\alpha_2|=j_0\leq n$.对任意 $i\geq0$,由于 $\alpha_1=\lambda_1\lambda_2\lambda_{i_{i_0}}$, $\alpha_2=\lambda_{i_{i_0+1}}...\lambda_{i_{j_0}}$, $\alpha_3=\lambda_{i_{j_0+1}}...\lambda_m$,并注意到 $p_{i_0}=q_{i_{i_0}}$ (当 $i_0=1$ 时, $q_{i_0}=q_{i_1-1}$)和 $p_{j_0}=q_{i_{j_0}}$,所以

$$\lceil rec_M(\alpha_1\alpha_2^i\alpha_3)\rceil\geq\left(\bigwedge_{j=0}^{i_{i_0}-1}\delta(q_j,\lambda_{j+1},q_{j+1})\right)\wedge\left(\bigwedge_{h=0}^{i}\ \bigwedge_{j=i_{i_0}}^{i_{j_0}-1}\delta(q_j,\lambda_{j+1},q_{j+1})\right)\wedge\left(\bigwedge_{j=i_{j_0}}^{m-1}\delta(q_j,\lambda_{j+1},q_{j+1})\right)=\bigwedge_{j=o}^{m-1}\delta(q_j,\lambda_{j+1},q_{j+1}).$$

故式(1)成立. □

在经典自动机中[15],具有 n 个状态的有限自动机所识别的字非空(无穷),当且仅当它识别一个长度小于 n 的字(大等于 n 但小于 $2n$ 的字).在 l 值自动机中,有以下定理:

定理 3. 设 $M=\langle Q,q_0,F,\delta\rangle$ 是 Σ 上的 l 值自动机.若 Q 有 n 个状态,则

(1) $\stackrel{l}{\models}(\exists\sigma\in\Sigma^*)(rec_M(\sigma))\leftrightarrow(\exists\sigma\in\Sigma^*)(|\sigma|<n\wedge rec_M(\sigma))$.

(2) $\stackrel{l}{\models}\forall i\in\omega(\exists\sigma\in\Sigma^*)(|\sigma|\geq i\wedge rec_M(\sigma))\leftrightarrow(\exists\sigma\in\Sigma^*)(n\leq|\sigma|<2n\wedge rec_M(\sigma))$.

证明:(1) 由 l 值泵引理,

$$\begin{aligned}\vee_{\sigma\in\Sigma^*,|\sigma|\geq n}\lceil rec_M(\sigma)\rceil&\leq\vee_{\sigma\in\Sigma^*,|\sigma|\geq n}\vee_{\alpha_1,\beta_1\in\Sigma^*,|\alpha_1\beta_1|<\sigma}\lceil rec_M(\alpha_1\beta_1)\rceil\\&\leq\vee_{\sigma\in\Sigma^*,|\sigma|\geq n}\vee_{\alpha_1,\beta_1\in\Sigma^*,|\alpha_1\beta_1|<\sigma}...\vee_{|\alpha_k\beta_k|<n}\lceil rec_M(\alpha_k\beta_k)\rceil\\&\leq\vee_{\sigma\in\Sigma^*,|\sigma|<n}\lceil rec_M(\sigma)\rceil,\end{aligned}$$

故$\lceil (\exists\sigma\in\Sigma^*)(rec_M(\sigma))\rceil=\vee_{\sigma\in\Sigma^*}\lceil rec_M(\sigma)\rceil=(\vee_{|\sigma|<n}\lceil rec_M(\sigma)\rceil)\vee(\vee_{|\sigma|\ge n}\lceil rec_M(\sigma)\rceil)=\vee_{|\sigma|<n}\lceil rec_M(\sigma)\rceil$.

(2) 由 l 值泵引理(引理 1)可以得到,在此略. □

最后讨论正规语言与 l 值正规语言的关系.由定义 2 和定义 3 可知,任意正规语言都是 l 值正规语言.经典的泵引理[15]可以判定 $\{\sigma_1^n\sigma_2^n:n\ge 1\}$ 不是正规语言.用 l 值泵引理类似地可以判定它也不是 l 值正规语言.尚不知是否存在非正规集合 X 和 l 值正规文法 G,使得它们等价.对任意 l 值正规文法 $G=\langle V,T,P,s\rangle$,令 $P_G=\{\alpha\mapsto\beta:P((\alpha,\beta))>0\}$,则由定义 2 可知,$(V,T,P_G,s)$ 是正规文法,其中 $\alpha\mapsto\beta$ 表示经典文法中的生成式.

3 进一步的结论

我们已将经典有限自动机和正规文法的基本性质推广到量子自动机理论中.实际上,在量子自动机理论中,关于量子正规语言的一些运算性质,如乘积运算要求量子逻辑的真值集(完备正交模格)满足分配律[13,14],而满足分配律的完备正交模格退化为 Boolean 代数,所以,经典自动机理论中的一些结论在量子自动机理论中不成立.类似于定义 2,可以定义量子上下文无关文法和量子上下文有关文法,同时建立量子下推自动机和量子 Turing 机.当然,这些讨论会更加复杂,但必将进一步得到正交模格与自动机之间的内在联系,所以,今后我们会进行这方面的研究.

致谢 我们对应明生教授的帮助以及审稿人提出的宝贵意见表示衷心的感谢!

References:

[1] Benioff P. The computer as a physical system: a microsopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines. Physical Review Letters, 1982,48(23):1581~1585.

[2] Feynman RP. Simulating physics with computers. International Journal of Theoretical Physics, 1986,21(6-7):467~488.

[3] Feynman RP. Quantum mechanical computers. Foundation of Physics, 1986,16(6):507~531.

[4] Deutsh D. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. Proceedings of the Royal Society of London A, 1985,400(1818):97~117.

[5] Shor PW. Polynomial-Time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. SIAM Journal on Computing, 1997,26(5):1484~1509.

[6] Grover L. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. Physical Review Letters, 1997,79(2):326~328.

[7] Lloyd S. A potentially realizable quantum computer. Science, 1993,261(5128):1569~1571.

[8] Cirac JI, Zoller P. Quantum computations with cold trapped ions. Physical Review Letters, 1995,74(20):4091~4094.

[9] Moore C, Crutchfield JP. Quantum automata and quantum grammars. Theoretical Computer Science, 2000,237(1-2):275~306.

[10] Gudder S. Basic Properties of Quantum Automata. Foundation of Physics, 2000,30(2):301~319.

[11] Birkhoff G, von Neumann J. The logic of quantum mechanics. Annals of Mathematics, 1936,37(4):823~843.

[12] Pták P, Pulmannová S. Orthomodular Structures as Quantum Logics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[13] Ying MS. Automata theory based on quantum logic (I). International Journal of Theoretical Physics, 2000,39(4):891~991.

[14] Ying MS. Automata theory based on quantum logic (II). International Journal of Theoretical Physics, 2000,39(11):2545~2557.

[15] Hopcroft JE, Ullman JD. Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation. New York: Addison-Wesly, 1979. 13~223.