1000-9825/2002/13(12)2259-08 ©2002 Journal of Software 软 件 学 报 Vol.13, No.12

四正则图的交叉数*

杨元生[1,2], 王 丹[1], 陆维明[2]

[1](大连理工大学 计算机科学与工程系,辽宁 大连 116023);
[2](中国科学院 数学与系统科学研究院,北京 100080)
E-mail: yangys@dlut.edu.cn; lingwdd@263.net
http://www.dlut.edu.cn

摘要: 利用计算机对图的交叉数进行研究,给出了利用分支界限法计算图的交叉数的算法 CCN(calculate crossing number),并利用该算法计算出 $n\le 12$ 的所有四正则图的交叉数以及 $n\le 16$ 的随机四正则图的交叉数.同时计算出 $n\le 12$ 的所有四正则图的平均交叉数 $Aac(n)$和 $n\le 16$ 的随机四正则图的平均交叉数 $Arc(n)$,根据计算结果提出四正则图的平均交叉数为 $O(n^2)$的猜想.
关 键 词: 交叉数;正则图;同构;平面图;分支界限法
中图法分类号: TP301 文献标识码: A

图 $G=(V,E)$是由顶点集 V 与顶点上的无序对的子集 E 组成的集合,E 中的元素称为边.图 G 的交叉数是指把图 G 画在平面上时出现的最少交叉数.下面给出它的定义.

定义 **1**. 图 G 在表面上的一个画法是指把图的顶点画为表面上的结点,把图的边画为表面上的弧.

定义 **2**. 图 G 在表面上的一个好的画法是指图 G 在表面上的一个画法,在该画法中,连接同一个结点的任意两条弧不相交,且任意两条弧至多只有一个交点.

定义 **3**. 图 G 在表面上的一个最优的画法是指图 G 在表面上的具有最少交叉数的好的画法.这个最少的交叉数目即为图 G 在该表面上的交叉数.

定义 **4**. 图 G 在平面(或球面)上的交叉数称为图的交叉数,记为 $cr(G)$.

图的交叉数问题是在实际应用中提出来的,它在 CAD 领域有着广泛的应用,如:

(1) 草图的识别与重画问题,具有比手写汉字识别应用更为广泛的应用领域;

(2) 电子线路板设计中的布线问题;

(3) 软件开发工具中文档部分的 ER 图等的自动生成;

(4) 生物工程 DNA 的图示.

图的交叉数问题属于 NP-困难问题[1].目前,仅有有限的图的交叉数得到了精确值,主要有:

(1) 完全图

$$cr(K_n)\le \frac{1}{4}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-3}{2}\right\rfloor,$$

等号对 $n\le 12$ 成立[1].

(2) 完全二分图

---

* 收稿日期: 2001-01-17; 修改日期: 2001-08-27
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60073013;60143002);中国科学院数学与系统科学研究院基金资助
作者简介: 杨元生(1946－),男,福建福州人,教授,博士生导师,主要研究领域为算法设计与分析,图论;王丹(1977－),女,辽宁大连人,硕士生,主要研究领域为算法设计与分析;陆维明(1941－),男,上海人,研究员,博士生导师,主要研究领域为 Petri 网,软件工程,算法分析.

$$cr(K_{m,n}) \le \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor,$$

等号对 $\min(m,n)\le 6$,或 $m=7$ 且 $n\le 10$ 成立[1~4].

(3) 交图

$$cr(C_m \times C_n)=(m-2)n,$$

其中 $3\le m\le n$[1,4~6].

长期以来,有关图的交叉数的研究主要采用纯数学方法,但随着所研究的图的增大,可能的画法急剧增长,研究也越来越困难,如对完全图的研究,从 $n=10$ 进展到 $n=12$,花了整整 30 年的时间.因此,迫切希望有较好的计算机算法用以计算图的交叉数.

本文给出了较好的计算图的交叉数算法 CCN(calculate crossing number),这是继图平面性判定算法、二连通图的平面嵌入算法之后,在图的平面性问题上的又一个最重要的进展.本文还利用算法 CCN 对 $n\le 12$ 的所有四正则图的交叉数以及 $n\le 16$ 的随机四正则图的交叉数进行计算,并得到了相关的结果.

1 算法 CCN

算法 CCN 采用的方法是解决 NP-困难问题最有效的方法之一,称为分支界限法.

令 $p_m=G-\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$为图 G 的平面子图,且 $p_m+e_i(1\le i\le m)$为非平面子图,则 p_m 称为图 G 的极大平面子图.

算法 CCN 主要实现如下功能:

(1) 构造图 G 的所有不同的极大平面子图;

(2) 构造上述图 G 极大平面子图的所有不同的平面嵌入;

(3) 计算往上述平面嵌入中添加所删边的不同方式的时候产生的最少交叉数目.

算法中的分支界限条件为向当前图中继续添加所删边时,如果交叉数目超过已得到的当前最少交叉数目,则提前回溯.

把 p_m 嵌入平面内,把 e_i 添入图中重构 G.由于 p_m 是 G 的极大平面子图,则每回添一条 e_i,至少增加一个交叉点,从而有:

引理 1. 如果 $s_{m0}=\{e_1,e_2,\dots,e_{m0}\}$为图 G 的最小边集,使得 $p_{m0}=G-s_{m0}$ 是图 G 的极大平面子图,则 $cr(G)\ge m0$.

如果图 G 包含多个二连通块,可先把 G 分成连通分块.

$$B=\{b_i:b_i \text{ 是 } G \text{ 的二连通块,且 } G=b_1\cup b_2\cup\dots\cup b_t\}.$$

由定义 2 可知,在每个 G 的好的画法中,不同的二连通图分块的边不会相互交叉,从而有

$$cr(G)=cr(b_1)+cr(b_2)+\dots+cr(b_k).$$

令 $P_{m,i}=\{p_{m,i}:p_{m,i}$ 为 b_i 的极大平面子图,且$|E(b_i-p_{m,i})|=m\}$,

$$D_m=\{d_{m,i,j}:d_{m,i,j} \text{ 为 } p_{m,i} \text{ 在平面上的第 } j \text{ 种嵌入}\},$$

$$D_{m,t}=\{d_{m,i,j}+(s_{m,m}-s_{m,t}):s_{m,m}=E(b_i-p_{m,i}),s_{m,t}\subset s_{m,m},\text{且}|s_{m,t}|=t\}.$$

定理 1. 算法 CCN 计算图 G 的交叉数.

证明:算法 CCN 把图 G 分成二连通图,由各二连通分块的交叉数之和计算图 G 的交叉数.函数 Crossing Number *B* 返回二连通分块 b_i 的交叉数,函数 Crossing Number *D* 返回图 G 的极大平面子图 $p_{m,j}$ 的第 j 种平面嵌入方式在所有回添所删边过程中可能产生的最少的交叉数目.函数 Crossing Number *E* 返回平面嵌入 $d_{m,i,j}$ 中回添$(s_{m,m}-s_{m,t})(t=m,m-1,\dots,0)$中的边时所产生的交叉数目.由于算法 CCN 在所有极大平面子图的所有平面嵌入方式中,查找所有可能的回添边过程中所产生的最少的交叉数目,因此,如果不提前回溯,正确性是显然的.

在函数 Crossing Number *E* 中,如果当前图中已有的交叉数目已大于等于当前已找到的最少交叉数目(crossing number),若再继续往当前图中回添边,则只能使交叉数继续增加,不会出现最终交叉数目更少的情况.因此,可提前回溯,不影响程序的正确性.

函数 Crossing Number *B*(*i*)计算删边数目不超过 Crossing Number−1 的 b_i 的极大平面子图的交叉数.由于在删边数目 $m\ge$*Crossing Number* 时,若向 p_m 的平面嵌入回添边时,至少产生 $m\ge$*Crossing Number* 个交叉数,因此最

终得到 b_i 的所有极大平面子图的所有平面嵌入中,所有可能的回添边方式所产生的交叉数目中的最少交叉数目为 *Crossing Number*.

综上所述,算法 CCN 正确地计算出了图 G 的交叉数.

算法 **1**. Algorithm CCN.

```
Procedure CCN;
    Begin
      Get test graph G;
      B={b_i:b_i is a 2-connect block of G and G=b_1∪b_2∪…∪b_t};
      cr(G)=0;
      For every b_i∈B Do
      Begin
          If (G is a Planar graph) Then cr1=0
          Else cr1=Crossing Number B(b_i);
          cr(G)=cr(G)+cr1;
      End;
      Output cr(G);
    End;

Function Crossing Number B(b_i);
    Begin
      Crossing Number=n×n×n×n; m=1; S_0={b_i};
      While m≤Crossing Number−1 Do
      Begin
        S_1=S_0; S_0=∅; P_{m,i}=∅;
        For every G_1∈S_1 Do
         For every e_1∈E(G_1) Do
          Begin
           G_2=G_1−e_1;
           If G_2 is a non-planar graph Then S_0=S_0∪G_0
           Else If For every e_1∈E(b_i−G_2), G_2+e_1 is a non-planar graph Then   P_{m,i}=P_{m,i}∪G_2;
          End;
        If P_{m,i}≠∅ Then
         For every G_2∈P_{m,i} Do
           Begin
            D_2={d_j:d_j is an embedding of G_2 in the plane};
            For every d_j∈D_2 Do
             Begin
              Crossing Number_1=Crossing Number D(d_j);
              If Crossing Number_1<Crossing Number Then Crossing Number=Crossing Number_1;
             End;
           End;
        m=m+1;
      End;
    End;

  Function Crossing Number D(d_j);
```

```
Begin
   t=m; d_t = d_j; s_t( d_t) = E(b_i–G_2); cr_{t+1} = 0; Crossing Number D = Crossing Number E(t);
End;

Function Crossing Number E(t);
Begin
   cr_t=cr_{t+1};
   rc_{u,t}=the minimum number of crossings while adding e_{u,t}∈s_t(d_t) back to d_t;
   For every e_{u,t}∈s_t(d_t) Do cr_t=cr_t+rc_{u,t};
   If cr_t≥Crossing Number Then Return with cr_t
   Else If t=1 Then Return with cr_t
      Else
         Begin
            cr2=Crossing Number;
            For every e_{u,t}=(v_b,v_e)∈s_t(d_t) Do
               Begin
                  e_{u,t,v}={e_{u,v,w}:e_{u,v,w}=(v_{u,v,w,x},v_{u,v,w,y}) is the w-th edge crosses with e_{u,t} while taking
                  the v-th method to add e_{u,t}∈s_t(d_t) back to d_t}
                  Se_{u,t}(d_t)={e_{u,t,v}};
                  For every e_{u,t,v}∈Se_{u,t}(d_t) Do
                     Begin
                        s_{t–1}(d_{t–1})=s_t(d_t)–e_{u,t}; cr_t=cr_{t+1}+rc_{u,t}; d_{t–1}=d_t; n1=rc_{u,t}; n2=|V(d_t)|
                        For k=1 To n1 Do                  /* add e_{u,t}∈s_t(d_t) back to d_t*/
                           Begin
                              d_{t–1}=(d_{t–1}–e_{u,v,k})∪{v_{n2+k}}+(v_{n2+k},v_{u,v,w,x})+(v_{n2+k},v_{u,v,w,y});
                              If k=1 Then d_{t–1}=d_{t–1}+(v_b,v_{n2+1});
                              If k=n1 Then d_{t–1}=d_{t–1}+(v_e,v_{n2+n1});
                              If k<n1 Then d_{t–1}=d_{t–1}+(v_{n2+k},v_{n2+k+1});
                           End;
                        cr3=Crossing Number E(t–1);
                        If cr3<cr2 Then cr2=cr3;
                     End;
               End;
            Return with cr2;
         End;
End;
```

例 1:计算如图 1 所示的四正则图 g10 的交叉数.

图 g10 只存在一个二连通块,删掉两条边之后,得到的 $P_{2,1}$ 中有 1 个极大平面子图,删掉 3 条边后,得到的 $P_{3,1}$ 中有 3 个极大平面子图,而 D_2 中有 8 种不同的平面嵌入画法,D_3 中有 4 种不同的平面嵌入画法,如图 1 所示(其中 a 代表 10).表 1 列出了算法 CCN 计算交叉数的计算过程,其中$(w,x)(y,z)$表示向 d_t 中回添边 $e_1=(w,x)$,并与边 $e_2=(y,z)$相交,$cr(w,x)$表示向 d_t 中回添边 $e_1=(w,x)\in s_t(d_t)$时,得到的最小交叉数,$cr1$ 表示当前最小交叉数.

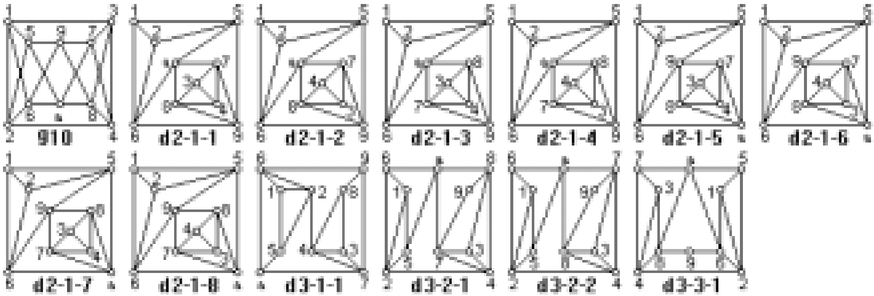


Fig.1 The graph g10 and the imbedding of its planar subgraphs

图 1 图 g10 及其平面子图的嵌入画法

Table 1 The steps of calculate the crossing number of g10 with algorithm CNN

表 1 算法 CCN 计算图 g10 交叉数的计算步骤

Imbedding①	Step②	Add edges and present *cr*2, *cr*1③
	0	*cr*1=10×10×10×10=10000
d2–1–1	1	(1,3)((5,9)(10,7)) *cr*2=2+*cr*(2,4)=4 *cr*1=4
	2	(1,3)((6,9)(8,10)) *cr*2=2+*cr*(2,4)=4
	3	*cr*2=*cr*(1,3)+*cr*(2,4)=2+2=4
d2–1–2	1	*cr*2=*cr*(1,3)+*cr*(2,4)=2+2=4
d2–1–3	1	*cr*2=*cr*(1,3)+*cr*(2,4)=2+2=4
d2–1–4	1	*cr*2=*cr*(1,3)+*cr*(2,4)=2+2=4
d2–1–5	1	*cr*2=*cr*(1,3)+*cr*(2,4)=2+2=4
d2–1–6	1	*cr*2=*cr*(1,3)+*cr*(2,4)=2+2=4
d2–1–7	1	*cr*2=*cr*(1,3)+*cr*(2,4)=2+2=4
d2–1–8	1	*cr*2=*cr*(1,3)+*cr*(2,4)=2+2=4
d3–1–1	1	*cr*2=*cr*(1,3)+*cr*(5,9)+*cr*(8,10)=2+1+1=4
d3–2–1	1	*cr*2=cr(1,3)+*cr*(5,9)+*cr*(6,9)=2+1+1=4
d3–2–2	1	*cr*2=*cr*(1,3)+*cr*(5,9)+*cr*(6,9)=2+1+1=4
d3–3–1	1	*cr*2=*cr*(1,3)+*cr*(5,9)+*cr*(7,9)=2+1+1=4

①嵌入图,②步骤,③回添边及当前 *cr*2,*cr*1.

例 2:计算如图 2 所示的四正则图 g10 的交叉数.

图 g12 只存在一个二连通块,删掉 4 条边后,得到的 $P_{4,1}$ 中有 5 个极大平面子图,删掉 5 条边后,得到的 $P_{5,1}$ 中有 10 个极大平面子图,D_4 中有 5 种不同的平面嵌入画法,D_5 中有 12 种不同的平面嵌入画法,如图 2 所示(其中 *a*,*b*,*c* 分别代表 10,11,12).表 2 列出了计算过程,由于执行算法过程类似,省略了对平面嵌入 d4–2–1~d5–4–1 的步骤.

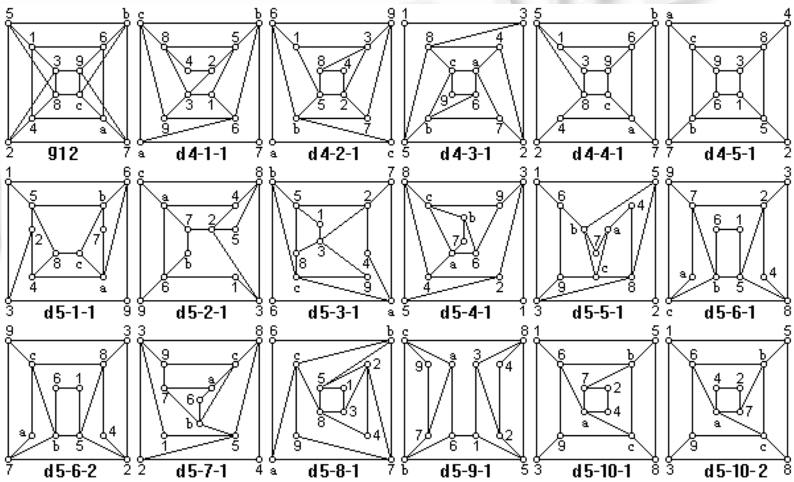


Fig.2 The graph g12 and the imbedding of its planar subgraphs

图 2 图 g12 及其平面子图的嵌入画法

Table 2 The steps of calculate the crossing number of g12 with algorithm CNN

表 2 算法 CCN 计算图 g12 交叉数的计算步骤

Imbedding①	Step②	Add edges and present *cr*2, *cr*1③
	0	*cr*1=12×12×12×12=20736
d4–1–1	1	(1,4)(5,2) *cr*2=1
	2	(1,4)(5,2) (4,10)((8,3)(12,9)) *cr*2=3
	3	(1,4)(5,2) (4,10)((8,3)(12,9)) (7,9)(6,10) *cr*2=4+cr(2,7)=4+3 *cr*1=7
	4	(1,4)(5,2) (4,10)((8,3)(12,9)) *cr*2=3+*cr*(7,9)+*cr*(2,7)=3+1+3=7
	5	(1,4)(5,2) *cr*2=1+*cr*(4,10)+*cr*(7,9)+*cr*(2,7)=1+2+1+3=7
	6	(1,4)(2,3) *cr*2=1
	7	(1,4)(2,3) (2,7)((1,5)(6,11)) *cr*2=3
	8	(1,4)(2,3) (2,7)((1,5)(6,11)) (4,10)((5,8)(11,12)) *cr*2=5+*cr*(7,9)=5+1=6 *cr*1=6
	9	(1,4)(2,3) (2,7)((1,5)(6,11)) *cr*2=3+*cr*(7,9)+*cr*(4,10)=3+1+2=6
	10	(1,4)(2,3) *cr*2=1+*cr*(4,10)+*cr*(7,9)+*cr*(2,7)=1+2+1+2=6
	11	*cr*2=*cr*(1,4)+*cr*(4,10)+*cr*(7,9)+*cr*(2,7)=1+2+1+2=6
d5–5–1	1	(1,4)(11,5) *cr*2=1+*cr*(2,4)+*cr*(2,7)+*cr*(6,10)+*cr*(7,9)=1+1+2+1+1=6
	2	(2,4)(5,8) cr2=1+cr(1,4)+cr(2,7)+cr(6,10)+cr(7,9)=1+1+1+1+1=5
	3	(2,4)(5,8) (2,7)(5,8) cr2=1+1+cr(1,4)+cr(6,10)+cr(7,9)=1+1+2+1+1=6
	4	(2,4)(5,8) (7,9)(11,12) *cr*2=2
	5	(2,4)(5,8) (7,9)(11,12) (2,7)(5,8) *cr*2=3+*cr*(1,4)+*cr*(6,10)=3+2+2=7
	6	(2,4)(5,8) (7,9)(11,12) (6,10)(11,5) *cr*2=3+*cr*(1,4)+*cr*(2,7)=3+1+2=6
	7	(2,4)(5,8) (7,9)(11,12) (1,4)(11,5) *cr*2=3+*cr*(2,7)+*cr*(6,10)=3+2+1=6
	8	(2,4)(5,8) (6,10)(12,11) *cr*2=2+*cr*(1,4)+*cr*(2,7)+*cr*(7,9)=2+1+1+2=6
	9	(2,4)(5,8) (6,10)(11,5) *cr*2=2+*cr*(1,4)+*cr*(2,7)+*cr*(7,9)=2+1+2+1=6
	10	(2,4)(5,8) (1,4)(11,5) *cr*2=2+*cr*(2,7)+*cr*(6,10)+*cr*(7,9)=2+2+1+1=6
	11	(2,7)(5,8) *cr*2=1+*cr*(1,4)+*cr*(2,4)+*cr*(6,10)+*cr*(7,9)=1+2+1+2+1=7
	12	(7,9)(11,12) *cr*2=1
	13	(7,9)(11,12) (2,4)(5,8) (2,7)(5,8) *cr*2=3+*cr*(1,4)+*cr*(6,10)=3+2+2=7
	14	(7,9)(11,12) (2,4)(5,8) (6,10)(11,5) *cr*2=3+*cr*(1,4)+*cr*(2,7)=3+1+2=6
	15	(7,9)(11,12) (2,4)(5,8) (1,4)(11,5) *cr*2=3+*cr*(2,7)+*cr*(6,10)=3+2+1=6
	16	(7,9)(11,12) (2,7)(5,8) *cr*2=2+*cr*(1,4)+*cr*(2,4)+*cr*(6,10)=2+2+1+2=7
	17	(7,9)(11,12) (6,10)(11,5) *cr*2=2+*cr*(1,4)+*cr*(2,4)+*cr*(2,7)=2+1+1+2=6
	18	(7,9)(11,12) (1,4)(11,5) *cr*2=2+*cr*(2,4)+*cr*(2,7)+*cr*(6,10)=2+1+2+1=6
	19	(6,10)(11,5) *cr*2=1+*cr*(1,4)+*cr*(2,4)+*cr*(2,7)+*cr*(7,9)=1+1+1+2+1=6
	20	(6,10)(12,11) *cr*2=1+*cr*(1,4)+*cr*(2,4)+*cr*(2,7)+*cr*(7,9)=1+1+1+1+2=6
d5–6–1	1	*cr*2=*cr*(1,3)+*cr*(1,4)+*cr*(4,10)+*cr*(6,9)+*cr*(6,10)=1+1+2+1+1=6
d5–6–2	1	*cr*2=*cr*(1,3)+*cr*(1,4)+*cr*(4,10)+*cr*(6,9)+*cr*(6,10)=1+1+2+1+1=6
d5–7–1	1	*cr*2=*cr*(1,4)+*cr*(1,6)+*cr*(2,7)+*cr*(4,10)+*cr*(6,9)=1+1+1+2+1=6
d5–8–1	1	*cr*2=*cr*(1,4)+*cr*(1,6)+*cr*(3,9)+*cr*(4,10)+*cr*(6,9)=1+2+1+1+1=6
d5–9–1	1	*cr*2=*cr*(1,4)+*cr*(2,7)+*cr*(3,9)+*cr*(4,10)+*cr*(6,9)=1+2+1+1+1=6
d5–10–1	1	*cr*2=*cr*(2,3)+*cr*(1,4)+*cr*(2,5)+*cr*(4,8)+*cr*(7,9)=2+2+1+1+1=7
d5–10–2	1	*cr*2=*cr*(2,3)+*cr*(1,4)+*cr*(2,5)+*cr*(4,8)+*cr*(7,9)=2+1+1+2+1=7

①嵌入图,②步骤,③回添边及当前 *cr*2,*cr*1.

2 四正则图的交叉数

2.1 $n \le 12$的所有四正则图的交叉数

首先利用计算机生成 $n \le 12$ 的所有连通的四正则图,再根据第 1 节中的算法计算出每个图的交叉数(见表 3,其中 $t(n,c)$表示具有 n 个顶点,且交叉数为 c 的四正则图的个数),从而得到 $n \le 12$ 的所有四正则图的平均交叉数 $Aac(n)$.

Table 3 The distribution of the crossing number of all connect 4-regular graphs for $n \le 12$

表 3 $n \le 12$ 的所有连通的四正则图交叉点数分布情况一览表

n \ $t(n,c)$ \ c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	The average crossing number①
5		1								1
6	1									0
7		1	1							1.5
8	1	2	2		1					1.67
9	1	4	6	5						1.937 5
10	3	9	28	15	3	1				2.15
11	3	30	97	97	31	7				2.54
12	13	84	411	608	349	64	14		1	2.94

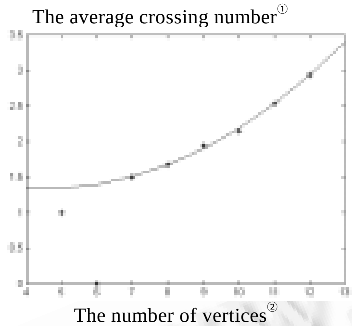
①平均交叉数.

定理 2. $Aac(5)=1, Aac(6)=0, Aac(7)=1.5, Aac(8)=1.67, Aac(9)=1.9375, Aac(10)=2.15, Aac(11)=2.54, Aac(12)=2.94$.

其中,当 $n=5$ 或 6 时,各只有 1 个四正则图,由于图的个数过少,可将其看做是奇异点,选用 $7\le n\le 12$ 的平均交叉数,利用最小二乘法拟合出平均交叉数的规律为

$$y=0.029286x^2-0.270071x+1.960141. \tag{1}$$

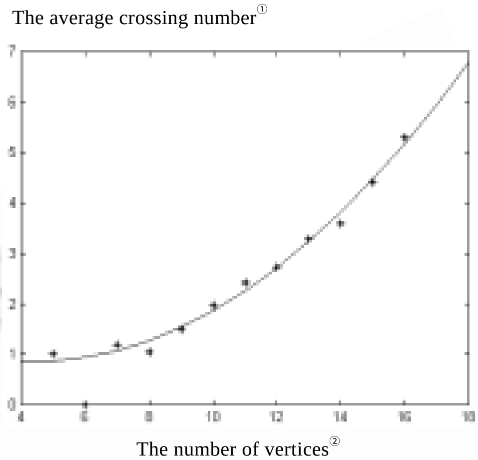
如图 3 所示.



①平均交叉数,②顶点个数.

Fig.3 The average crossing number regular of all of the 4-regular graphs for $n\le 12$

图 3 $n\le 12$ 的所有四正则图平均交叉数的规律



①平均交叉数,②顶点个数.

Fig.4 The average crossing number regular of some random 4-regular graphs for $n\le 16$

图 4 $n\le 16$ 的随机四正则图平均交叉数的规律

由于随着顶点个数的增加,图的个数急剧增长,为了得到平均交叉数的规律,我们进一步计算了一定数量的随机四正则图,用以考查交叉数的规律.

2.2 $n\le 16$的随机四正则图的交叉数

首先利用计算机对顶点数不同的四正则图分别生成 100 个随机图,再根据第 1 节中的算法计算出交叉数(见表 4),从而得到 $n\le 16$ 的随机四正则图的平均交叉数 $Arc(n)$.

Table 4 The distribution of the crossing number of some random 4-regular graphs for $n\le 16$

表 4 $n\le 16$ 的随机的四正则图交叉点数分布情况一览表

n \ $t(n,c)$ \ c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	The average crossing number①
5		100								1
6	100									0
7		81	19							1.19
8	14	67	19							1.05
9	5	49	37	9						1.5
10	1	21	58	19	1					1.98
11		12	44	35	8	1				2.42
12		9	24	53	13	1				2.73
13		4	16	42	26	10	2			3.28
14			11	37	38	10	4			3.59
15			3	14	44	23	11	4	1	4.41
16			1	7	12	36	32	9	3	5.30

①平均交叉数.

定理 3. $Arc(5)=1, Arc(6)=0, Arc(7)=1.19, Arc(8)=1.05, Arc(9)=1.5, Arc(10)=1.98, Arc(11)=2.42, Arc(12)=2.73, Arc(13)=3.28, Arc(14)=3.59, Arc(15)=4.41, Arc(16)=5.30$.

利用最小二乘法拟合出平均交叉数的规律:

$$y=0.03178x^2-0.275371x+1.960141, \tag{2}$$

如图 4 所示.

由定理 3 可知,随机图的平均交叉数比所有图的平均交叉数略小,这主要是由于随机图中交叉数较小的图比较多,但其平均交叉数的规律(见式(2))与所有图的平均交叉数的规律(见式(1))相似,因此,我们得出如下猜想:

猜想. 四正则图的平均交叉数为 $O(n^2)$.

图的交叉数问题属于 NP-困难问题,确定图的交叉数是十分困难的.本文给出的算法 CCN 虽然仍是非多项式时间算法,但由于采用了有效的分支界限技术,对于较小的图,算法 CCN 运行速度还是较快的.本课题组利用此算法成功地对 $n\le 8$ 的所有图、$n\le 16$ 的所有三正则图以及 $n\le 28$ 的所有广义 Petersen 图的交叉数进行了研究,有关结果将另文介绍.

References:

[1] Salazar, G. On the crossing number of $C_m\times C_n$. Journal of Graph Theory, 1998,28(3):163~170.

[2] Woodall, D.R. Cyclic-Order graphs and Zarankiewicz's crossing-number conjecture. Journal of Graph Theory, 1993,17(6):657~671.

[3] Kleitman, D.J. The crossing number of $K_{5,n}$. Journal of Combinatorial Theory, 1970,9(4):315~323.

[4] Klesc, M., Richter, R.B., Stobert, I. The crossing number of $C_5\times C_n$. Journal of Graph Theory, 1996,22(3):239~243.

[5] Dean, A.M., Richter, R.B. The crossing number of $C_4\times C_4$. Journal of Graph Theory, 1995,19(1):125~129.

[6] Ringeisen, R.D., Beineke, L.W. The crossing number of $C_3\times C_n$. Journal of Combinatorial Theory (Series B), 1978,24(2):134~136.

The Crossing Number of 4-Regular Graphs*

YANG Yuan-sheng[1,2], WANG Dan[1], LU Wei-ming[2]

[1](*Department of Computer Science and Engineering*, *Dalian University of Technology*, *Dalian* 116023, *China*);

[2](*Academy of Mathematics and System Sciences*, *The Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100080, *China*)

E-mail: yys216@263.net; lingwdd@263.net

http://www.dlut.edu.cn

Abstract: The CCN (calculate crossing number) algorithm using branch and bound method to calculate the crossing number of graph with small order is put forward to study the crossing number using computer. With the algorithm, the crossing number of all of the 4-regular graphs $Aac(n)$ for $n\le 12$ and the crossing number of some random 4-regular graphs $Arc(n)$ for $n\le 16$ are calculated. At the end of the paper, the average crossing number is shown, and a conjecture is given that the average crossing number of 4-regular graph is $O(n^2)$.

Key words: crossing number; regular graph; isomorphic; plane graph; branch and bound method

* Received January 17, 2001; accepted August 27, 2001

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60073013; the Academy of Mathematics and System Sciences, the Chinese Academy of Sciences.