

C-Bézier 曲线的形状修改*

樊建华, 张纪文, 邬义杰

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027);

(浙江大学 生产工程研究所, 浙江 杭州 310027)

E-mail: jh_fan@sina.com

http://cad.zju.edu.cn

摘要: 提出了控制 C-Bézier 曲线形状的两种方法:修改控制参数 α 和修改控制顶点.在分析 C-Bézier 基函数导数曲线特性的基础上,得出了控制参数 α 对曲线形状的作用,提出了调节控制参数修改曲线形状的方法;另一方面,基于控制顶点与曲线形状关系几何模型,建立了调节控制顶点修改曲线形状的算法.上述成果已应用于纸盆模具 CAD/CAM 软件设计系统的实践中,并取得了良好的效果.

关键词: 曲线;形状控制;C-Bézier 曲线;Bézier 曲线;CAGD(computer aided geometric design);CAD/CAM

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

C-Bézier 是一种新颖的曲线、曲面造型方法^[1-3],在保持 Bézier 方法许多优点的基础上,能够方便、简洁、精确地构造二次曲线曲面.与 NURBS(non-uniform rational B-splines)相比,C-Bézier 具有算法简单、节省存储空间、运算速度快、参数选择容易等特点,这已经在纸盆模具 CAD/CAM 软件系统的实践中得到了验证.

曲线形状修改一直是 CAGD(computer aided geometric design)中的一项基本技术,对曲线实用化有着重要的意义,许多学者在这一领域已做了大量的研究工作^[4-7].特别是近几年来,胡事民等人^[5]、Sanchez-Reyes^[6]和 Juhász^[7]进一步深入研究,提出了一些曲线形状修改的新方法和新思路,但是这些工作主要集中于对 NURBS 的研究上.本文在上述研究成果的基础上,针对 C-Bézier 曲线的形状控制进行了深入的研究和分析,并提出了通过修改控制参数和控制顶点来改变 C-Bézier 曲线形状的两种有效方法.

1 C-Bézier 基函数及其性质

C-Bézier 曲线的基本思想是用 $[\sin t \quad \cos t \quad t \quad 1]$ 代替 3 次 Bézier 曲线中的 $[t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]$,用矩阵表示为

$$B_{\alpha}(t) = TDQ, \quad 0 < \alpha \leq \pi, \quad 0 < t \leq \alpha. \quad (1)$$

其中

$$T = [\sin t \quad \cos t \quad t \quad 1],$$

$$Q = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T,$$

$$D = \frac{1}{\alpha - S} \begin{bmatrix} C & 1 - C - M & M & -1 \\ -S & (\alpha - K)M & -KM & 0 \\ -1 & M & -M & 1 \\ \alpha & -(\alpha - K)M & KM & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \sin \alpha, \quad C = \cos \alpha, \quad K = \frac{\alpha - S}{1 - C},$$

$$M = \begin{cases} 1, & \text{当 } \alpha = \pi \text{ 时} \\ \frac{S}{\alpha - 2K} = \frac{S(1 - C)}{2S - \alpha - \alpha C}, & \text{当 } 0 < \alpha < \pi \text{ 时} \end{cases}$$

* 收稿日期: 2001-04-16; 修改日期: 2001-06-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60073025)

作者简介: 樊建华(1969 -),男,浙江绍兴人,硕士生,主要研究领域为 CAD/CAM;张纪文(1942 -),男,浙江杭州人,副教授,主要研究领域为 CAGD,CAD/CAM;邬义杰(1963 -),男,浙江杭州人,博士,副教授,主要研究领域为 CAD/CAM/CNC,现代制造系统.

q_0, q_1, q_2, q_3 为 C-Bézier 曲线的 4 个控制顶点.

将式(1)中的矩阵展开,得到 C-Bézier 曲线的多项式表示:

$$B_\alpha(t) = Z_0(t)q_0 + Z_1(t)q_1 + Z_2(t)q_2 + Z_3(t)q_3, \quad 0 < \alpha \leq \pi, \quad 0 < t \leq \alpha. \quad (2)$$

其中 $Z_0(t) = \frac{(\alpha-t) - \sin(\alpha-t)}{\alpha - \sin \alpha}$, $Z_3(t) = \frac{t - \sin t}{\alpha - \sin \alpha}$, $Z_1(t) = M \left[\frac{1 - \cos(\alpha-t)}{1 - \cos \alpha} - Z_0(t) \right]$, $Z_2(t) = M \left[\frac{1 - \cos t}{1 - \cos \alpha} - Z_3(t) \right]$, $Z_0(t)$,

$Z_1(t), Z_2(t), Z_3(t)$ 称为 C-Bézier 基函数.

从 C-Bézier 基函数与 3 次 Bernstein 基函数的图形(如图 1 所示)中可以得出 C-Bézier 基函数具有以下性质:

(1) C-Bézier 基函数的图形与 Bernstein 基函数的图形类似, $Z_3(t)$ 和 $Z_0(t), Z_2(t)$ 和 $Z_1(t)$ 是关于 $t/\alpha = 1/2$ 的对称, 当 α 的值小于 $\pi/4$ 时, C-Bézier 基函数十分接近 Bernstein 基函数.

(2) C-Bézier 曲线分别通过控制顶点 q_0 和 q_3 ; 当 $t=0$ 和 α 时, $Z_1(t) = Z_2(t) = 0$; C-Bézier 曲线分别通过控制顶点 q_0 和 q_3 ; 当 $t = \alpha/3$ 和 $t = 2\alpha/3$ 附近, $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 达到最大值, C-Bézier 曲线受 q_1 和 q_2 作用最大, 最靠近 q_1 和 q_2 点.

(3) 随着 α 的增加, 对于相同的 $t/\alpha, Z_0(t)$ 和 $Z_3(t)$ 增加, $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 减少, 曲线受 q_1 和 q_2 的作用减弱, 曲线变得扁平; 当 α 趋近于 0 时, 曲线越来越凸, 并接近 Bézier 曲线.

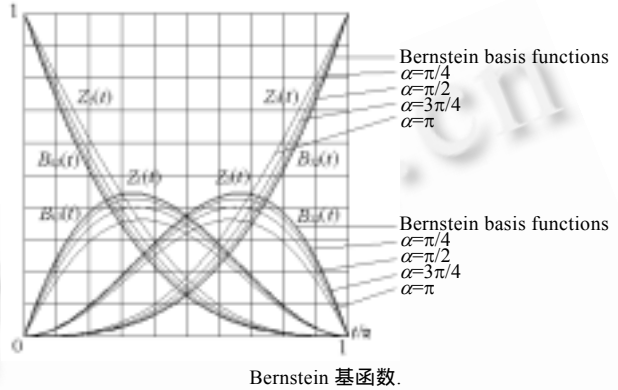


Fig.1 The figure of C-Bézier basic functions
图 1 C-Bézier 基函数图形

2 控制参数 α 的作用

正是由于控制参数 α 的引入, 使得 C-Bézier 方法具有比 3 次 Bézier 方法更强的曲线表达能力. 当 4 个控制顶点保持不变, α 在 $(0, \pi)$ 变化时, 可获得一族 C-Bézier 曲线, 如图 2 所示.

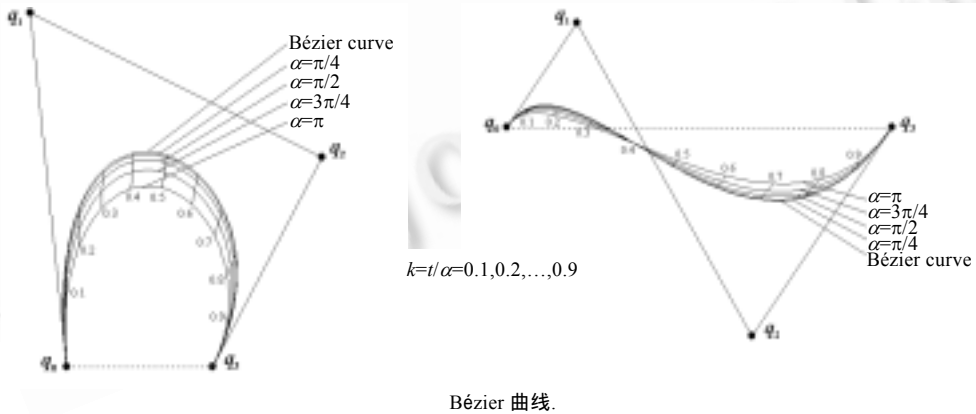


Fig.2 A family of C-Bézier curves with fixed control points and varied α
图 2 控制顶点不变, α 变化时得到的一族 C-Bézier 曲线

当 $k = t/\alpha (0 \leq k \leq 1)$ 固定, α 变化 $d\alpha$ 时, C-Bézier 曲线族上的任一点 $B_\alpha(\alpha, k)$ 所产生位移

$$dB_\alpha(\alpha, k) = \left[\frac{d(Z_0(\alpha, k))}{d\alpha} q_0 + \frac{d(Z_1(\alpha, k))}{d\alpha} q_1 + \frac{d(Z_2(\alpha, k))}{d\alpha} q_2 + \frac{d(Z_3(\alpha, k))}{d\alpha} q_3 \right] d\alpha, \quad 0 < \alpha \leq \pi, \quad 0 \leq k \leq 1.$$

其中 $\frac{d(Z_0(\alpha, k))}{d\alpha} = \frac{(1-k)(1 - \cos((1-k)\alpha)(\alpha - \sin \alpha) - (1 - \cos \alpha)[(1-k)\alpha - \sin((1-k)\alpha)]}{(\alpha - \sin \alpha)^2}$,

$$\frac{d(Z_3(\alpha, k))}{d\alpha} = \frac{k(\alpha - \sin\alpha)(1 - \cos(k\alpha)) - (1 - \cos\alpha)(k\alpha - \sin(k\alpha))}{(\alpha - \sin\alpha)^2},$$

$$\frac{d(Z_1(\alpha, k))}{d\alpha} = \frac{dM}{d\alpha} \left[\frac{1 - \cos((1-k)\alpha)}{1 - \cos\alpha} - Z_0(\alpha, k) \right] +$$

$$M \left[\frac{(1-k)(1 - \cos\alpha)\sin((1-k)\alpha) - \sin\alpha(1 - \cos((1-k)\alpha))}{(1 - \cos\alpha)^2} - \frac{dZ_0(\alpha, k)}{d\alpha} \right],$$

$$\frac{d(Z_2(\alpha, k))}{d\alpha} = \frac{dM}{d\alpha} \left[\frac{1 - \cos(k\alpha)}{1 - \cos\alpha} - Z_3(\alpha, k) \right] + M \left[\frac{k(1 - \cos\alpha)\sin(k\alpha) - \sin\alpha(1 - \cos(k\alpha))}{(1 - \cos\alpha)^2} - \frac{dZ_3(\alpha, k)}{d\alpha} \right],$$

$$\frac{dM}{d\alpha} = \frac{(\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(2\sin\alpha - \alpha - \alpha\cos\alpha) - (1 - \cos\alpha)(\cos\alpha - 1 + \alpha\sin\alpha)\sin\alpha}{(2\sin\alpha - \alpha - \alpha\cos\alpha)^2}.$$

图3为 $\frac{d(Z_0(\alpha, k))}{d\alpha}$ 和 $\frac{d(Z_1(\alpha, k))}{d\alpha}$ 关于控制参数 α 的特性图. 根据基函数的对称性, $\frac{d(Z_3(\alpha, k))}{d\alpha}$ 与 $\frac{d(Z_0(\alpha, k))}{d\alpha}$ 以及 $\frac{d(Z_2(\alpha, k))}{d\alpha}$ 与 $\frac{d(Z_1(\alpha, k))}{d\alpha}$ 关于 α 的图形是相对于 $k=1/2$ 的对称. 因为 $\frac{d(Z_0(\alpha, k))}{d\alpha}$ 和 $\frac{d(Z_1(\alpha, k))}{d\alpha}$ 与 α 有较好的线性特征, 由此可以得到 α 控制曲线形状的近似计算方法.

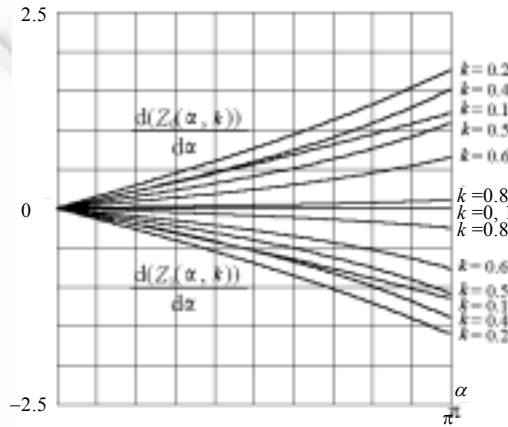


Fig.3 The figures of $\frac{d(Z_0(\alpha, k))}{d\alpha}$ and $\frac{d(Z_1(\alpha, k))}{d\alpha}$ about α

图3 $\frac{d(Z_0(\alpha, k))}{d\alpha}$ 和 $\frac{d(Z_1(\alpha, k))}{d\alpha}$ 关于 α 的图形

设 4 个控制顶点固定, $k=t/\alpha$ 为 $(0,1)$ 内的任意值, m, n 为相应的 Bézier 曲线和 $\alpha=\pi$ 的 C-Bézier 曲线上的点, 则可以近似地认为, 以控制参数为 α 的 C-Bézier 曲线上的点 s 位于连线 \overrightarrow{mn} 上 (如图 4 所示), 且满足 $(\|ms\|$ 和 $\|sn\|$ 表示 \overrightarrow{ms} 和 \overrightarrow{sn} 的距离):

$$\|ms\| : \|sn\| = (\alpha/\pi)^2 : 1 - (\alpha/\pi)^2. \tag{3}$$

用这种近似方法表示曲线形状时所产生的误差较小, 可以满足工程设计和加工的精度要求. 如图 5 所示为控制顶点坐标分别为 $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ 时, 近似曲线和 C-Bézier 曲线上相应点的距离误差分布.

3 调节控制参数 α 修改曲线形状

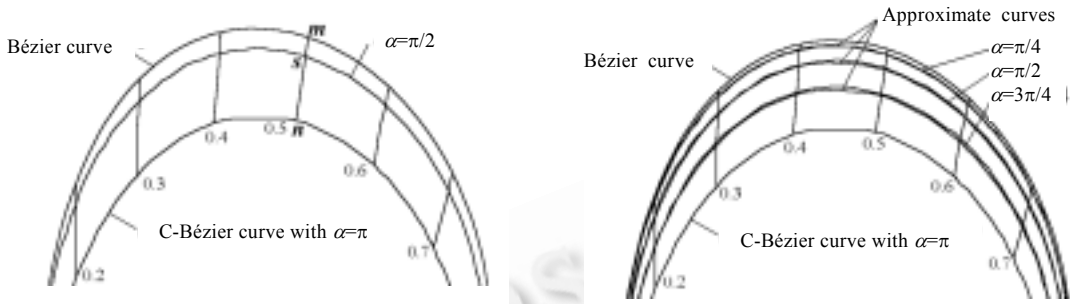
控制参数 α 对曲线的形状有调节作用, 整个曲线的调节范围是 Bézier 曲线和 $\alpha=\pi$ 的 C-Bézier 曲线之间的区域. 修改 α 可使 C-Bézier 曲线通过调节范围内的任一点.

设给定 4 个控制顶点决定的一条 3 次 Bézier 曲线为 $p(k)$ 和一条控制参数 $\alpha=\pi$ 的 C-Bézier 曲线为 $B_\pi(k\pi)$, $0 < k < 1$. s 为调节范围内的任一点. 为使某 C-Bézier 曲线通过 s 点, 可采用对分法, 通过逐步求精反求 k 值. 先取 $k=1/2$, $p(k)$ 和 $B_\pi(k\pi)$ 间的直线方程满足:

$$pl(\tau) = (B_\pi(k\pi) - p(k))\tau + p(k), 0 \leq \tau \leq 1.$$

根据点 s 相对于该线的位置,缩小 k 值区间,直到取得容许误差范围内的参数,设为 k_s 值,然后以 $p(k_s)$ 点为参考点,代入式(2)得到控制参数:

$$\alpha_s = \pi \sqrt{\frac{\|p(k_s) - s\|}{\|p(k_s) - B_\pi(k_s, \pi)\|}}. \tag{4}$$



(a) The relation between m, n and s
(a) m, n 和 s 的位置关系
(b) The comparison of approximate curves and C-Bézier curves
(b) 近似曲线和 C-Bézier 曲线的比较

Fig.4 The function of control parameter α
图 4 控制参数 α 的作用

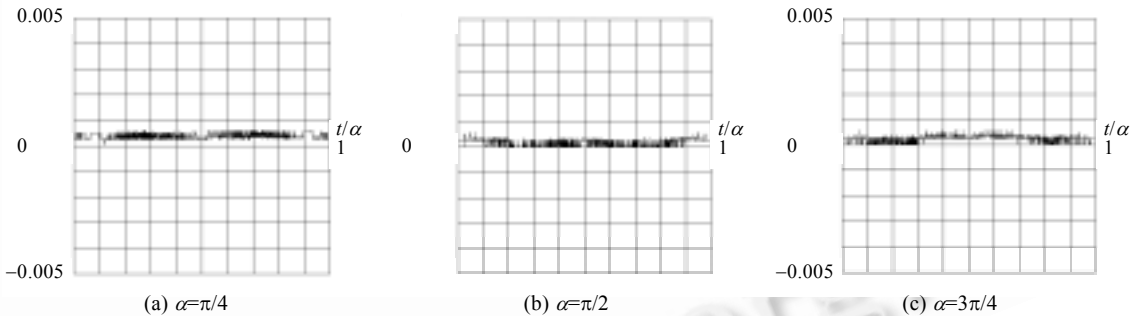


Fig.5 The error distribution of the approximate method
图 5 近似方法的误差分布

通过控制参数 α 调节 C-Bézier 曲线形状,不影响曲线首末端的位置和切矢方向,在多项 C-Bézier 曲线 G^1 拼接时,调节参数 α 不会破坏各段曲线间原有的连续性.与 NURBS 曲线中的权因子 ω_i 相比, α 对曲线形状的作用局限于特征多边形内的一条狭长区域内,只能同时拉向或推离中间的两个控制点,而且式(2)给出的关系存在着一定的误差,但通过控制参数调节曲线形状具有简单、可靠和直观的特点.

4 控制顶点 q_i 的作用

在设计和表示 C-Bézier 曲线时,也可以通过调整特征多边形的位置来修改曲线的形状,直到获得满意的结果.设 q_0, q_1, q_2, q_3 和 α 决定的一条 C-Bézier 曲线 $B_\alpha(t) = Z_0(t)q_0 + Z_1(t)q_1 + Z_2(t)q_2 + Z_3(t)q_3$, 在 α 值固定的条件下,使 q_0, q_1, q_2, q_3 分别位移 $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$, 到 $q_0^*, q_1^*, q_2^*, q_3^*$, 那么曲线上 $t = k\alpha$ 点产生位移:

$$\Delta B_\alpha = B_\alpha^*(t) - B_\alpha(t) = Z_0(t)\delta_0 + Z_1(t)\delta_1 + Z_2(t)\delta_2 + Z_3(t)\delta_3. \tag{5}$$

该式的几何意义为:当控制参数 α 保持不变,控制顶点分别产生位移 $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ 时,曲线上 $t = k\alpha$ 的点 $B_\alpha(t)$ 的位置发生变化,其位移 ΔB_α 等于以 $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ 为控制顶点,以 α 为控制参数的 C-Bézier 曲线上 $t = k\alpha$ 的点 s^* 的矢量,如图 6 所示分别为移动 4 个、2 个和 1 个控制顶点来修改曲线形状的几何模型.

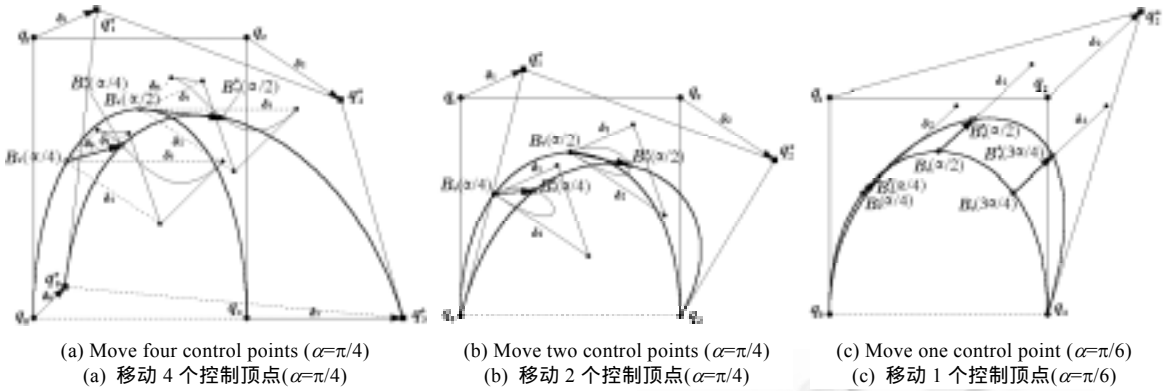


Fig.6 The geometric model of the shape modification of curve through moving control points
图 6 移动控制顶点改变曲线形状的几何模型

5 调节控制顶点来修改曲线的形状

若使 C-Bézier 曲线上 $t=k\alpha$ 点 s , 产生位移 ΔB_α 到 s^* , 可通过移动 1 个或多个控制顶点 $q_i (i=0,1,2,3)$ 的方法来实现, 各控制顶点的位移矢量 δ_i 应满足式(3). 在实际应用中常见以下两种情况:

(1) 保持首末点位置不变, 使整条曲线变形较小. 采用约束优化的方法^[5], 即在满足

$$\Delta B_\alpha = Z_1(t)\delta_1 + Z_2(t)\delta_2 \tag{6}$$

的条件下, 取目标函数为 $\|\delta_1\|^2 + \|\delta_2\|^2$ 最小, 用拉格朗日乘数法作

$$L = \|\delta_1\|^2 + \|\delta_2\|^2 + \lambda(\Delta B_\alpha - Z_1(t)\delta_1 - Z_2(t)\delta_2), \tag{7}$$

其中 $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$, 令 $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \delta_1^x} = \frac{\partial L}{\partial \delta_1^y} = \frac{\partial L}{\partial \delta_1^z} = \frac{\partial L}{\partial \delta_2^x} = \frac{\partial L}{\partial \delta_2^y} = \frac{\partial L}{\partial \delta_2^z} = 0$. 解方程组

$$\begin{cases} \Delta B_\alpha - Z_1(t)\delta_1 - Z_2(t)\delta_2 = 0 \\ 2\delta_1 - \lambda Z_1(t) = 0 \\ 2\delta_2 - \lambda Z_2(t) = 0 \end{cases}, \tag{8}$$

得到中间两个控制顶点的位移

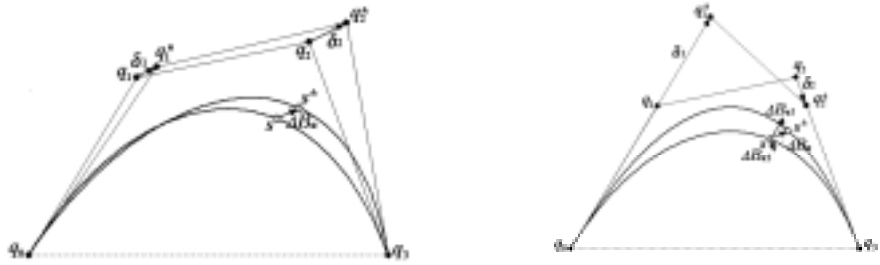
$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{Z_1(t)}{Z_1^2(t) + Z_2^2(t)} \Delta B_\alpha \\ \delta_2 = \frac{Z_2(t)}{Z_1^2(t) + Z_2^2(t)} \Delta B_\alpha \end{cases}. \tag{9}$$

采用约束优化的方法来移动控制顶点, 两控制顶点的位移方向与曲线上给定点的移动方向相同, 大小与相应的 C-Bézier 基函数成正比(如图 7(a)所示).

(2) 保持首、末点位置和切矢方向不变. 由于 C-Bézier 曲线属于低次曲线, 往往需要多段表示, 为保证各段曲线间的拼接 G^1 连续, 每段曲线在形状修改时, 首、末两点的位置和切矢方向都应保持不变. 为此可以通过固定两个控制端点 q_0 和 q_3 , 使中间两个控制点的位移 δ_1 和 δ_2 满足以下方程组来实现:

$$\begin{cases} \delta_1 = f_1(q_1 - q_0) \\ \delta_2 = f_2(q_3 - q_2) \\ Z_1(t)\delta_1 + Z_2(t)\delta_2 = \Delta B_\alpha \end{cases}, \quad - < f_1, f_2 < +. \tag{10}$$

即先沿 $q_1 - q_0$ 和 $q_3 - q_2$ 的方向, 将 ΔB_α 分解成 $\Delta B_{\alpha 1}$ 和 $\Delta B_{\alpha 2}$, 然后按照 $\delta_1 = \Delta B_{\alpha 1} / Z_1(t)$ 和 $\delta_2 = \Delta B_{\alpha 2} / Z_2(t)$ 分别得到 q_1 和 q_2 的位移矢量 δ_1 和 δ_2 (如图 7(b)所示).



(a) Fixing the position of starting and ending points, make the shape modification of curves less
 (a) 保持首、末点位置不变,使整条曲线变形较小
 (b) Fixing the position and tangent direction of the starting and ending points
 (b) 保持首、末点位置和切矢方向不变

Fig.7 The shape modification of curves through moving control points
 图 7 调节控制顶点来修改曲线的形状

6 结束语

本文提出的通过调节控制参数 α 和控制顶点来修改 C-Bézier 曲线形状的方法具有简单、直观和实用的特点,并可以进一步推广到 C-Bézier 曲面.这一曲线修改技术已应用于纸盆模具 CAD/CAM 软件系统设计的实呈中.如图 8 所示即为通过修改曲面拼接处拼接曲线的形状来控制整个曲面的实例.



Fig.8 Control the whole surface through modifying the shape of curves in the connected position
 图 8 通过修改拼接曲线的形状来控制整个曲面

致谢 浙江大学生产工程研究所的程耀东教授和柯映林教授以及浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室的罗国民高级工程师对本文的工作给予了细心的指导;林兴硕士和王伟民硕士对本文的完成提出了很多有益的建议,在此一并表示感谢.

References:

- [1] Zhang, Ji-wen. C-Curves: an extension of cubic curves. Computer Aided Geometric Design, 1996,13(3):199~217.
- [2] Zhang, Ji-wen. Two different forms of C-B-splines. Computer Aided Geometric Design, 1997,14(1):31~41.
- [3] Zhang, Ji-wen. C-Bézier curves and surfaces. Graphical Models and Image Processing, 1999,61(1):2~15.
- [4] Piegl, L. Modifying the shape of rational B-splines, Part 1: curves. Computer Aided Design, 1989,21(8):509~518.
- [5] Hu, Shi-min, Zhu, Xiang, Sun, Jia-guang. Shape modification of NURBS surfaces via constrained optimization. Journal of Software, 2000,11(12):1567~1571 (in Chinese).
- [6] Sánchez-Reyes, J. A simple technique for NURBS shape modification. IEEE Computer Graphics and Application, 1997,17(1): 52~59.
- [7] Juhász, I. Weight-Based modification of NURBS curves. Computer Aided Geometric Design, 1999,16(5):377~383.

附中文参考文献:

- [5] 胡事民,朱翔,孙家广.基于约束优化的 NURBS 曲面形状修改.软件学报,2000,11(12):1567~1571.

Shape Modification of C-Bézier Curves*

FAN Jian-hua, ZHANG Ji-wen, WU Yi-jie

(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China);

(Institute of Production Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

E-mail: jh_fan@sina.com

<http://cad.zju.edu.cn>

Abstract: In this paper, two methods of changing the control parameter α and changing control points are presented for the shape modification of C-Bézier curves. The relation between C-Bézier curves and the control parameter α is obtained based on the analysis of the derivative C-Bézier basis functions. Furthermore, the way of modifying the shape by the adjustment of α is introduced. On the other hand, the algorithm of shape control by modifying control points is given relying on the model between the shape of the curve and control points. The results have been applied to the CAD/CAM system for speaker cone models, which has got a good effect.

Key words: curve; shape modification; C-Bézier curve; Bézier curve; CAGD (computer aided geometric design); CAD/CAM

* Received April 16, 2001; accepted June 25, 2001

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60073025