

BBN 曲面的形状分析与控制*

王兴波

(国防科学技术大学 机电工程与自动化学院,湖南 长沙 410073)

E-mail: xbwang@public.cs.hn.cn

http://www.nudt.edu.cn

摘要: 研究了调节凸 Bézier 曲面、B-样条曲面及 NURBS 曲面(BBN 曲面)一个控制点以后,曲面形状变化的规律.通过将 BBN 曲面分解成一张凸曲面与具有特殊形状曲面的叠加,建立了曲面变形前后一些几何量与变形位移量之间的数量关系,得到了凸 BBN 曲面失去凸性的充分条件和判据.相应的结果可应用于调节与控制 BBN 曲面形状的算法设计.

关键词: CAD 造型;参数曲面;形状控制;算法设计

中图法分类号: TP391 **文献标识码:** A

Bézier 曲面、B-样条曲面及 NURBS 曲面(本文统称为 BBN 曲面)是 CAD/CAM 系统广泛采用的描述其设计模型的工具.设计者可以通过调节 BBN 曲面的控制顶点来调整曲面的形状.这种调整通常表现为,在保持曲面原有凸性的基础上对一个曲面片(patch)进行微调.因此,有关 BBN 曲面保凸调形的问题一直是人们研究的热点.自 20 世纪 80 年代以来,国内外学者纷纷展开了这方面的研究,也取得了一些成果^[1~6].然而,就矩形域上的张量积参数 BBN 曲面而言,仍有许多问题需要进一步解决.

现有的理论和方法力图从正面回答 BBN 曲面保凸的问题,即什么样的控制网格可产生凸的曲面.但是从优化设计的角度来看,这样的研究还远远不够.优化设计需要从一系列符合条件的模型中选择一个最好的,因此曲面失去凸性的临界条件显得十分重要.凭设计者的经验和直觉判定、得到的临界条件显然是不科学的.因此研究凸曲面凸性被破坏的条件,以便为 CAD 系统设计出自动判断的算法,对于优化设计十分重要.

本文研究了调节凸 Bézier 曲面、B-样条曲面及 NURBS 曲面(BBN 曲面)一个控制点后曲面形状变化的规律.通过将 BBN 曲面分解成一张凸曲面与具有特殊形状曲面的叠加,建立了曲面变形前后一些几何量与变形位移量之间的数量关系,得到了凸 BBN 曲面失去凸性的充分条件和判据.本文的结果可应用于调节与控制 BBN 曲面形状的算法设计.

1 凸 BBN 曲面的变形分析

由控制顶点 $P_{ij}(i=0,1,\dots,n;j=0,1,\dots,m)$, 节点矢量 $U=[u_0,u_1,\dots,u_{m+p+1}]$, $V=[v_0,v_1,\dots,v_{m+q+1}]$ 确定的张量积 BBN 曲面可以统一表示成:

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{i,j} B_{i,p}(u) B_{j,q}(v), u_p \leq u \leq u_{m+p+1}, u_q \leq v \leq v_{m+q+1}. \quad (1)$$

这里, $B_{i,p}(u), B_{j,q}(v)$ 是 BBN 基函数.

设 S_1 是由式(1)定义的在端点具有 p 重 U 节点、 q 重 V 节点的凸 BBN 曲面.现在考虑将控制顶点 $P_{r,s}(0 \leq r \leq n, 0 \leq s \leq m)$ 调整为 $P_{r,s}^*$ 时 $S(u,v)$ 失去凸性的条件.设 S_2 为调整后的曲面,则 S_2 可以表示为

* 收稿日期: 2000-11-17; 修改日期: 2001-09-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50175106);湖南省自然科学基金资助项目(99YJJ20051)

作者简介: 王兴波(1963 -),男,湖北安陆人,博士,副教授,主要研究领域为 CAD/CAM 技术,优化设计与评估,模具工程.

$$S_2 = S_1 + S_{r,s} \tag{2}$$

这里, $S_{r,s} = P_{r,s} P_{r,s}^* B_{r,n}(u) B_{s,m}(v)$.

不难发现, $S_2(u, v)$ 的每一点可以由点 $S_1(u, v)$ 沿着矢量 $P_{r,s} P_{r,s}^*$ 的方向平移 $|P_{r,s} P_{r,s}^* B_{r,n}(u) B_{s,m}(v)|$ 而得到, 如图 1 所示.

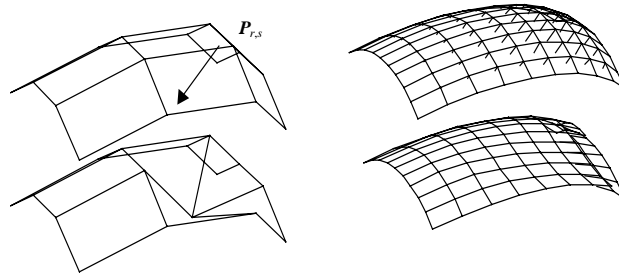


Fig.1 Deformation of a BBN surface
图 1 BBN 曲面的变形

根据物理规律, S_1 变形最剧烈的地方对应于 $|P_{r,s} P_{r,s}^* B_{r,n}(u) B_{s,m}(v)|$ 的峰值附近. 故 S_1 在 $|P_{r,s} P_{r,s}^* B_{r,n}(u) B_{s,m}(v)|$ 峰值对应点及其附近的形状变化数据是描述其变形的重要指标.

设 $|P_{r,s} P_{r,s}^* B_{r,n}(u) B_{s,m}(v)|$ 在 (u_0, v_0) 取得峰值, $P_1 = S_1(u_0, v_0), P_2 = S_2(u_0, v_0)$; 取参数 u, v 的一个增量 u, v , 取点:

$$\begin{aligned} Q^1_1 &= S_1(u_0 - u, v_0), Q^1_2 = S_1(u_0 + u, v_0), Q^1_3 = S_1(u_0, v_0 - v), Q^1_4 = S_1(u_0, v_0 + v), \\ Q^2_1 &= S_2(u_0 - u, v_0), Q^2_2 = S_2(u_0 + u, v_0), Q^2_3 = S_2(u_0, v_0 - v), Q^2_4 = S_2(u_0, v_0 + v), \end{aligned} \tag{3}$$

则空间四边形 $Q^1_1 Q^1_2 Q^1_3 Q^1_4, Q^2_1 Q^2_2 Q^2_3 Q^2_4$ 四条边的中点分别确定两个平行四边形 Q_1, Q_2 , 以 Q_1, Q_2 的中心 O_1, O_2 作矢量 $N_1 = P_1 O_1, N_2 = P_2 O_2$, 记 N^1_2 为 N_2 在 N_1 上的投影, 则有以下几种情形:

- (1) $N^1_2 = 0$;
- (2) N_1, N^1_2 方向相反;
- (3) N_1, N^1_2 方向相同.

可以证明, 在情形(1)和情形(2)下, S_1 变形后在 P_2 失去原来凸性.

事实上, 由于 P_1, P_2 与 $|P_{r,s} P_{r,s}^* B_{r,n}(u) B_{s,m}(v)|$ 的峰值点对应, 从而以平行四边形 Q_1, Q_2 为底, P_1, P_2 为顶点的凸锥的锥向分别与 S_1, S_2 在 P_1, P_2 附近的凸向相同. 此即 N_1, N_2 分别指向 S_1, S_2 凸的方向. 情形(2)表明, S_1, S_2 在 P_1, P_2 附近的方向是相反的, 因此 S_1 是凸的则 S_2 是凹的. 对情形(1)而言, 根据曲面的连续性, S_2 上至少存在一点 P'_2 使得 $O_2 P'_2$ 在 N_1 上的投影与 N_1 反向; 于是问题归结为情形(2).

如果 S_2 在 P_2 的 Gauss 曲率不为负, 则 S_2 在 P_2 为凸(或为平点-凸的一种特例). 情形(3)表明 S_1, S_2 在 P_1, P_2 附近的凸向是相同的, 因此 S_1 变形后没有改变原有凸性. 从而有:

定理 1. 设 $S_1, S_2, P_1, P_2, N_1, N_2$ 是如前所定义的各种几何量, 如果 S_2 在 P_2 的 Gauss 曲率不为负, 且 N_1, N_2 之间的角度是锐角, 则 S_1 变形后将保持原有凸性; 否则 S_1 变形后将失去原有凸性.

推论 1. 设 S_1, S_2, P_1, P_2 是如前所定义的各种几何量, N_1, N_2 是 S_1, S_2 上按照同一参数定向在 P_1, P_2 点的法矢, 如果 S_2 在 P_2 的 Gauss 曲率不为负, 且 N_1, N_2 之间的角度是锐角, 则 S_1 变形后将保持原有凸性; 否则 S_1 变形后将失去原有凸性.

根据法矢量的定义, 从几何上不难看出, 推论 1 描述的凸性改变实际上是一种严重的局部变形——扭曲. 依据上述定理和推论可设计相关的算法, 因篇幅所限本文不再列出. 以下讨论 $P_{r,s} P_{r,s}^*$ 与形状变化的数量关系.

记 S_1, S_2 在 P_1, P_2 点的偏导矢为 $S^1_u, S^2_u, S_u, S^1_v, S^2_v, S_v, N_1, N_2$ 是 S_1, S_2 按照同一参数定向在 P_1, P_2 点的法矢, 则

$$S^2_u \times S^2_v = S^1_u \times S^1_v + S^1_u \times S_v + S_v \times S^1_u + S_u \times S_v. \tag{4}$$

根据 $S_{r,s}$ 的定义知, S_u, S_v 与 $P_{r,s} P_{r,s}^*$ 的方向相同, 记 $S_u = \alpha P_{r,s} P_{r,s}^*, S_v = \beta P_{r,s} P_{r,s}^*, (\alpha, \beta > 0)$, 于是式(4)可以写成

$$S^2_u \times S^2_v = S^1_u \times S^1_v + (\alpha S^1_u - \beta S^1_v) \times P_{r,s} P_{r,s}^*. \tag{5}$$

易知 $\alpha S^1_u - \beta S^1_v$ 是 S_1 在 P_1 点切平面 π 的一个矢量, 记之为 T_p , 则有

$$S^2_u \times S^2_v = S^1_u \times S^1_v + T_p \times P_{r,s} P^*_{r,s} \tag{6}$$

此即

$$N_2 = N_1 + T_p \times P_{r,s} P^*_{r,s} \tag{7}$$

对于给定的参数定向而言, T_p 的方向不变, 故 $T_p \times P_{r,s} P^*_{r,s}$ 的方向取决于 $P_{r,s} P^*_{r,s}$ 的方向. 设 T_p 与 $P_{r,s} P^*_{r,s}$ 所决定的平面与 π 之间的二面角为 θ , 则 $T_p \times P_{r,s} P^*_{r,s}$ 与 π 之间的角度为 $\pi/2 - \theta$ (如图 2 所示).

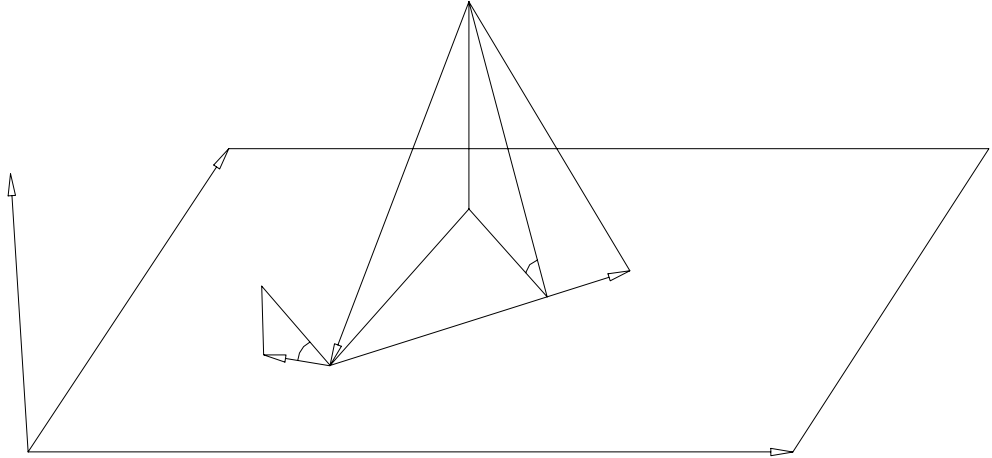


Fig.2 Angular relationship between N_1 and $P_{r,s} P^*_{r,s}$

图 2 $N_1, P_{r,s} P^*_{r,s}$ 角度关系示意图

不难看出有以下几点:

- (1) 如果 $P_{r,s} P^*_{r,s}$ 指向 π 的正方向, 那么 $T_p \times P_{r,s} P^*_{r,s}$ 也在 π 的正侧, $N_2 = N_1 + T_p \times P_{r,s} P^*_{r,s}$ 在 N_1 上的投影必与 N_1 同向, 曲面在 P 点不会发生扭曲.
- (2) 如果 $P_{r,s} P^*_{r,s}$ 指向 π 的负方向, 那么 $T_p \times P_{r,s} P^*_{r,s}$ 必在 π 的负侧, 因此当 $|P_{r,s} P^*_{r,s}|$ 达到一定数量时, $N_2 = N_1 + T_p \times P_{r,s} P^*_{r,s}$ 在 N_1 上的投影与 N_1 反向, 致使曲面发生扭曲变形.
- (3) $P_{r,s} P^*_{r,s}$ 平行于 π 属于临界情况, 在形状调整过程中不会出现, 故本文不对其作深入研究.

在 CAD/CAM 曲面造型过程中, 扭曲变形是要严格控制的. 下面的定理给出了扭曲变形的一个数量关系.

定理 2. 设 S 是由式(1)定义的光滑凸 BBN 曲面, $B(u, v) = B_{r,n}(u) B_{s,m}(v)$, B 在 (u_0, v_0) 取得最大值, S_u, S_v, N 是 S 对应于 (u_0, v_0) 的偏导矢及法矢, 如果以下方程:

$$|(S_u B_v - S_v B_u) \times X + N|^2 + |N|^2 - |(S_u B_v - S_v B_u) \times X|^2 = 0$$

存在一个解 X_0 , 那么当 $|P_{r,s} P^*_{r,s}| > |X_0|$ 时, 变换 $P_{r,s} \rightarrow P^*_{r,s}$ 将使曲面发生扭曲变形.

证明: 设切平面 π 的正侧是曲面的法矢 N 所指的半空间; 由于 $(S_u B_v - S_v B_u)$ 是 π 里的一个矢量, 因此对于任意指向 π 的负侧且与 N 不共面的矢量 X 都有 $(S_u B_v - S_v B_u) \times X$ 也指向 π 的负侧. 由于 N 的长度不变, 故 $N + (S_u B_v - S_v B_u) \times X$ 将会随 X 变长指向 π 的负侧, 其极限情况是 $N + (S_u B_v - S_v B_u) \times X$ 在 π 里. 在极限情形时, 由平行四边形法则可知 $N, (S_u B_v - S_v B_u) \times X, (S_u B_v - S_v B_u) \times X + N$ 构成一个直角三角形 (如图 3 所示), 满足定理的方程. 当 N 与 X 共面时, 根据曲面的光滑性可知, 在 N 附近必有 N^* 与 X 不共面, 故定理获证.

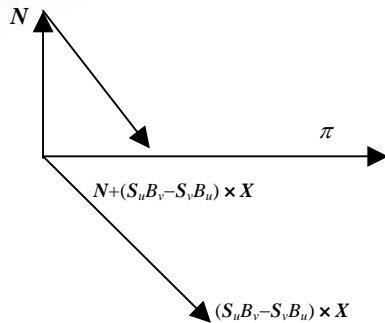


Fig.3 X must be hypotenuse if X plus a leg of a right triangle is the other leg

图 3 X 与一直角边之和为另一直角边, 则 X 必为斜边

根据连续性特征可知,曲面由凸到失去凸性之间的变化是连续变化的,因此存在一种临界状态.按照微分几何建立曲面第 2 基本量的方法,利用变形前后曲面上同一参数对应点到 P_1, P_2 处切平面的有向距离 d_1, d_2 可得到这种临界状态的关系.如果将指向切平面正向的有向距离为正的话,则有:

定理 3. 如果变形前任意 d_1 都为正,而变形后至少存在一个 d_2 为负,则曲面在 P 点失去原有凸性.

定理 3 表明,变形过程中使有向距离变为 0 的位置是临界位置.此时,曲面在 P 点附近变为平面,其第 2 基本量的系数全部为零,故得:

定理 4. 如果存在一个 X ,使得

$$(N+T_p \times X, S_u^2) = (N+T_p \times X, S_v^2) = (N+T_p \times X, S_{uv}^2) = 0.$$

那么当 $|P_{r,s} P_{r,s}^*| > |X|$ 时,变换 $P_{r,s} \rightarrow P_{r,s}^*$ 将使曲面发生凹变形.

根据这个定理,找到 S_u, S_v, S_{uv} 与 $P_{r,s}, P_{r,s}^*$ 的关系就可以准确地计算出曲面变凹的临界条件.

References:

- [1] Hua, Xuan-ji, Kuang, Zhi-quan. A theorem on Bézier patch's convexity. Journal of Zhejiang University, 1982, (Collection on 1982-Conference on Computational Geometry):182~189 (in Chinese).
- [2] Liang, You-dong. A geometry theory and convexity and shape preservation of B-spline curves and surfaces. Journal of Zhejiang University, 1982, (Collection on 1982-Conference on Computational Geometry):77~96 (in Chinese).
- [3] Piegl, L. Modifying the shape of rational B-splines (Part II): surfaces. CAD, 1989,21(8):509~518.
- [4] Zhu, Gong-qin, Yin Ming. The convexity of parametric Bézier patch over rectangle. Journal of Computational Maths, 1994,(3):273~277 (in Chinese).
- [5] Guillet, S., Leon, J.C. Parametrically deformed free-form surfaces as part of a variational model. Computer Aided Design, 1998,30(7):621~630.
- [6] Hu, Shi-min, Zhu, Xiang, Sun, Jia-guang. Shape modification of NURBS surfaces via constrained optimization. Journal of Software, 2000,11(12):1567~1571 (in Chinese).

附中文参考文献:

- [1] 华宣积,卞志全. Bézier 曲面的凸性定理. 浙江大学学报,1982,(计算几何讨论会论文集):182~189.
- [2] 梁友栋. B 样条曲线曲面的几何理论及其保凸性、保形性. 浙江大学学报,1982,(计算几何讨论会论文集):77~96.
- [4] 朱功勤,殷明. 张量积上 Bézier 曲面保凸的充分条件. 计算数学,1994,(3):273~277.
- [6] 胡事民,朱翔,孙家广. 基于约束优化的 NURBS 曲面形状修改. 软件学报,2000,11(12):1567~1571.

Analysis and Control of Shape Variation of BBN Surfaces*

WANG Xing-bo

(School of Mechatronic Engineering and Automation, National University of Defence Technology, Changsha 410073, China)

E-mail: xbwang@public.cs.hn.cn

http://www.nudt.edu.cn

Abstract: In this paper, the shape variation law of Bézier surfaces, B-spline surfaces and NURBS surfaces (BBN surfaces) is investigated under the modification of a control point of the surfaces. The relationship between the geometric elements of the surface before and after deformation and the deforming displacement is built up by decomposition a BBN surface into the summation of a convex surface and a surface with special shape. The law of a convex BBN surface losing its convexity is also obtained. The achievements in this paper can guide the algorithm design and shape control in CAD modeling.

Key words: CAD modeling; parametric surface; shape control; algorithm design

* Received November 17, 2000; accepted September 24, 2001

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.50175106; the Natural Science Foundation of Hu'nan Province of China under Grant No.99YJJ20051