

一类新的支撑矢量机核*

张莉, 周伟达, 焦李成

(西安电子科技大学 雷达信号处理重点实验室, 陕西 西安 710071)

E-mail: zhangli@rsp.xidian.edu.cn; zhouwd@rsp.xidian.edu.cn; lchjiao@mail.xidian.edu.cn

http://www.rsp.xidian.edu.cn

摘要: 提出了一类新的支撑矢量机核函数——坐标变换核. 该类核函数是同维映射. 理论证明和计算机仿真实验都表明了该类核的正确性和有效性.

关键词: 支撑矢量机; 核函数; 坐标变换核

中图法分类号: TP18 **文献标识码:** A

支撑矢量机是 Vapnik 及其合作者在统计学习理论的启发下, 针对模式识别而提出的一类新的普适的学习算法^[1,2]. 支撑矢量机采用了一种核映射^[3], 把输入空间的样本映射到某一特征空间 H . 在特征空间中, 映射后的样本是线性可分的. 针对具体的问题, 核函数的选择关系到能否得到正确识别结果, 而核函数的构造与选择仍是一个有待解决的问题.

本文针对在直角坐标线性不可分, 而可以在极坐标、柱面坐标、或球面坐标线性可分的情况, 构造一类新的核函数, 称之为坐标变换核. 文中的仿真实验证明了该类核的正确性、有效性和可行性.

1 支撑矢量核

假设已知样本 $\{(x_1, y_1), \dots, (x_l, y_l)\}$, 其中 $x \in R^N$, $y \in \{-1, 1\}$, R^N 表示输入模式的空间. 对于任何对称的、连续的函数 $K(x, x')$ 满足 Mercer 条件, 则必存在一个 Hilbert 空间 H 以及一个映射 $\Phi: R^N \rightarrow H$, 使得

$$K(x, x') = \sum_{i=1}^{N_H} \lambda_i \phi_i(x) \phi_i(x'), \quad (1)$$

其中 $N_H \geq N$ 是特征空间的维数. 如果非线性映射函数可以写成

$$\Phi(x) = (\sqrt{\lambda_1} \phi_1(x), \sqrt{\lambda_2} \phi_2(x), \dots, \sqrt{\lambda_{N_H}} \phi_{N_H}(x))^T, \quad (2)$$

那么式(1)可以写为

$$K(x, x') = (\Phi(x) \cdot \Phi(x')).$$

现在来看看 Mercer 条件(Mercer 定理的证明见文献[4]):

$$\iint_{L_2 \otimes L_2} K(x, x') g(x) g(x') dx dx' \geq 0, \quad (3)$$

$$\forall g(x) \in L_2(R^N), K(x, x') \in L_2(R^N) \otimes L_2(R^N).$$

如果式(3)满足, 我们就称 $K(x, x')$ 是一个正半定的核, 也就是支撑矢量核.

许多学者也已给出并证明了满足 Mercer 条件的核函数, 比如高斯核函数:

* 收稿日期: 2000-05-18; 修改日期: 2000-11-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69772029); 国家 863 高科技发展计划资助项目(863-306-ZT06-06-1)

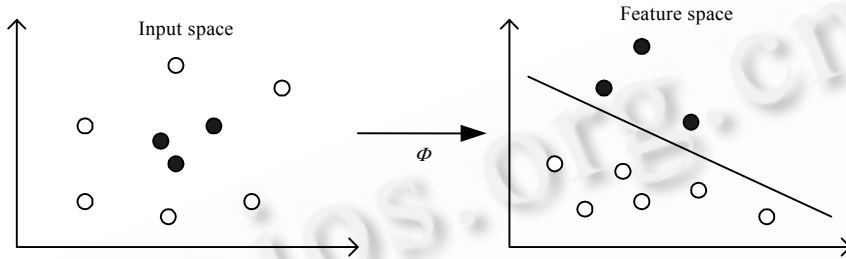
作者简介: 张莉(1975 -), 女, 江苏张家港人, 博士生, 主要研究领域为模式识别, 人工神经网络, 智能信号处理; 周伟达(1974 -), 男, 浙江海宁人, 博士, 主要研究领域为机器学习, 统计学习理论, 智能信号处理; 焦李成(1959 -), 男, 陕西白水人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为神经网络, 数据挖掘, 计算智能与集成系统, 非线性智能信号与通信.

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = e^{-\beta \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2}, \beta > 0 \tag{4}$$

以及多项式核函数:

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j)^d, d \in N. \tag{5}$$

由于支撑向量机的性能取决于所用的核函数,所以选取适当的核函数是正确识别的前提.如果我们能够选择适当的核,就能够把在输入空间线性不可分的模式映射到特征空间后,成为线性可分的模式,如图 1 所示.我们针对在直角坐标线性不可分,而可以在极坐标、柱面坐标,或球面坐标线性可分的情况,构造一类新的核函数,称之为坐标变换核.在第 2 节,我们将给出这一类核,并证明其满足 Mercer 条件.



输入空间, 特征空间.

Fig.1 The training examples in an input space are mapped into a feature space by a nonlinear map Φ

图 1 输入空间映射到特征空间的样本矢量分布

2 坐标变换核

我们构造一类从直角坐标到极坐标、柱面坐标以及球面坐标的核映射.该类映射是同维映射,即输入空间的维数和特征空间的维数相等.

定理 2.1. 平面直角坐标映射到极坐标.我们记映射 $\Phi: R^2 \mapsto [0, 2\pi] \times [0, \infty) \in R^2$, 即

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^T \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} \theta \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctg(x_2 / x_1) \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

则极坐标核函数为

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \arctg(x_2 / x_1) \cdot \arctg(x_2' / x_1') + \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \|\mathbf{x}'\|_2. \tag{7}$$

现在,我们来证明它满足式(3),即满足支撑向量核的条件.

证明: $\forall g(\mathbf{x}) \in L_2(R^2), K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in L_2(R^2) \otimes L_2(R^2)$,

$$\begin{aligned} & \iint_{L_2 \otimes L_2} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ &= \iint_{L_2 \otimes L_2} (\arctg(x_2 / x_1) \cdot \arctg(x_2' / x_1') + \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \|\mathbf{x}'\|_2) g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ &= \iint_{L_2 \otimes L_2} \arctg(x_2 / x_1) \cdot \arctg(x_2' / x_1') g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' + \iint_{L_2 \otimes L_2} \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \|\mathbf{x}'\|_2 g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ &= \left(\int_{L_2} \arctg(x_2 / x_1) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^2 + \left(\int_{L_2} \|\mathbf{x}\|_2 g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{8}$$

式(8)证明了式(7)满足 Mercer 条件.

定理 2.2. 空间直角坐标映射到球面坐标.我们记映射 $\Phi: R^3 \mapsto [0, \pi] \times [0, 2\pi] \times [0, \infty) \in R^3$, 即

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^T \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} \psi \\ \theta \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arccos(x_3 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}) \\ \arctg(x_2 / x_1) \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

则球面坐标核函数为

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \arccos(x_3 / \|\mathbf{x}\|_2) \cdot \arccos(x'_3 / \|\mathbf{x}'\|_2) + \arctg(x_2 / x_1) \cdot \arctg(x'_2 / x'_1) + \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \|\mathbf{x}'\|_2. \quad (10)$$

接着,我们来证明它满足式(3),即满足支撑矢量核的条件.

证明: $\forall g(\mathbf{x}) \in L_2(\mathbb{R}^3), K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in L_2(\mathbb{R}^3) \otimes L_2(\mathbb{R}^3),$

$$\begin{aligned} & \iint_{L_2 \otimes L_2} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ &= \iint_{L_2 \otimes L_2} (\arccos(x_3 / \|\mathbf{x}\|_2) \arccos(x'_3 / \|\mathbf{x}'\|_2) + \arctg(x_2 / x_1) \cdot \arctg(x'_2 / x'_1) + \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \|\mathbf{x}'\|_2) g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ &= \iint_{L_2 \otimes L_2} \arccos(x_3 / \|\mathbf{x}\|_2) \cdot \arccos(x'_3 / \|\mathbf{x}'\|_2) g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' + \\ & \iint_{L_2 \otimes L_2} \arctg(x_2 / x_1) \cdot \arctg(x'_2 / x'_1) g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' + \iint_{L_2 \otimes L_2} \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \|\mathbf{x}'\|_2 g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ &= \left(\int_{L_2} \arccos(x_3 / \|\mathbf{x}\|_2) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^2 + \left(\int_{L_2} \arctg(x_2 / x_1) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^2 + \left(\int_{L_2} \|\mathbf{x}\|_2 g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)证明了式(10)满足 Mercer 条件.

定理 2.3. 空间直角坐标映射到柱面坐标.我们记映射 $\phi: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \times [0, \infty) \in \mathbb{R}^3,$ 即

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^T \xrightarrow{\phi} \begin{pmatrix} x_3 \\ \theta \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ \arctg(x_2 / x_1) \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

则柱面坐标核函数为

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = x_3 x'_3 + \arctg(x_2 / x_1) \cdot \arctg(x'_2 / x'_1) + \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(x_1'^2 + x_2'^2)}. \quad (13)$$

下面,我们来证明它满足式(3),即满足支撑矢量核的条件.

证明: $\forall g(\mathbf{x}) \in L_2(\mathbb{R}^3), K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in L_2(\mathbb{R}^3) \otimes L_2(\mathbb{R}^3),$

$$\begin{aligned} & \iint_{L_2 \otimes L_2} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ &= \iint_{L_2 \otimes L_2} (x_3 x'_3 + \arctg(x_2 / x_1) \cdot \arctg(x'_2 / x'_1) + \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(x_1'^2 + x_2'^2)}) g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ &= \iint_{L_2 \otimes L_2} x_3 x'_3 g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' + \\ & \iint_{L_2 \otimes L_2} \arctg(x_2 / x_1) \cdot \arctg(x'_2 / x'_1) g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' + \\ & \iint_{L_2 \otimes L_2} \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(x_1'^2 + x_2'^2)} g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ &= \left(\int_{L_2} x_3 g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^2 + \left(\int_{L_2} \arctg(x_2 / x_1) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^2 + \left(\int_{L_2} \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)证明了式(13)满足 Mercer 条件.

3 仿真实验

现在我们在支撑矢量机中采用坐标变换核来对两类模式进行识别.我们用极坐标核对双螺旋线进行分类,用球面和柱面坐标核对随机产生的两类数据进行分类.

实验 1. 双螺旋线问题^[5]是一个两类划分问题,是公认的检验学习算法能力的“试金石”.该问题的分类要求是把 x - y 坐标平面上两条不同螺旋线上的点正确地分开.螺旋线的平面坐标形式可用参数方程表示如下:

$$x = (k\theta + \alpha) \cos \theta, \quad (15)$$

$$y = (k\theta + \alpha) \sin \theta. \quad (16)$$

其中 k 和 α 都是常量,分别代表速度和起始距离. θ 是以弧度为单位的相角.双螺旋线有 4 个参数 k_1, k_2, α_1 和 $\alpha_2,$

都是待设定的.这里,有 $k_1 = k_2$; $\alpha_1 \neq \alpha_2$, 即这两条螺旋线的速度相同,但起始位置不相同.

这里,令 $k_1 = k_2 = 4$, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3$, 由于极坐标核的非线性映射函数的定义域为 $[0, 2\pi] \times [0, \infty)$, 所以我们在式(15)和式(16)中取 $\theta \in [0, 2\pi)$, 即我们取双螺旋线的一个周期的点.如图 2 所示,“+”和菱形分别代表不同的螺旋线.这样,我们得到每类 63 个采样点,每类随机取 3 个点作为训练样本,其余的作为检验样本.进行 10 次仿真实验,将平均结果作为识别结果,见表 1.我们的识别率达到 100%.

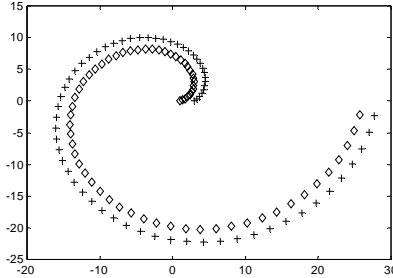


Fig.2 One period of dual-spiral

图 2 一个周期内的双螺旋

Table 1 Recognition results of three data sets

表 1 3 种数据的识别结果

Data type	Kernel function	Training set		Test set	
		Number	Recognition rate (%)	Number	Recognition rate (%)
Two-Spiral data	Polar coordinates kernel	6	Class one: 100 Class two: 100	120	Class one: 100 Class two: 100
Data A	Cylinder coordinates kernel	20	Class one: 100 Class two: 100	180	Class one: 95.56 Class two: 95.33
Data B	Sphere coordinates kernel	20	Class one: 100 Class two: 100	180	Class one: 96.35 Class two: 99.49

数据类型, 核函数, 训练集合, 检验集合, 样本个数, 识别率(%), 双螺旋, 极坐标核, 柱面坐标核, 球面坐标核.

实验 2. 人工产生两组三维随机数据 A.如图 3 所示,样本可以用柱面来分开.我们的目的是把十字点和菱形点分开.图 4 是数据 A 在 $x-y$ 平面上的投影,可知投影后的样本是非线性可分的.随机数据 A 经柱面坐标核的非线性映射函数映射后得到的数据分布情况如图 5 所示.从这些图可以看出,在输入空间(如图 3 所示),样本是线性不可分的,而在特征空间(如图 4 所示),样本成为线性可分的.我们进行 10 次仿真实验,把平均结果当成我们的识别结果.分类结果见表 1.该问题的识别率达到 95.56%和 95.33%.

实验 3. 人工产生两组三维随机数据 B.如图 6 所示,样本是可以球面分开的.图 7 是数据 B 在 $x-y$ 平面坐标上的投影.投影后的样本重叠到了一起,在此平面上是非线性不可分的.数据 B 经球面坐标核的非线性映射函数映射后的数据如图 8 所示.我们进行 10 次仿真实验,把平均结果作为我们的识别结果,见表 1.平均识别率为 96.35%和 99.49%.

从表 1 可以看出,我们的核函数对直角坐标线性不可分,而在极坐标、柱面坐标、或球面坐标线性可分的问题的分类效果是很好的,最低的识别率也达到 95.33%.证明了所提出来的核函数的正确性、有效性和可行性.

4 结 论

本文提出了一类新的支撑向量机核.该类核是同维映射,适用于直角坐标线性不可分,而在极坐标、柱面坐标,或球面坐标线性可分的情况.理论和仿真实验都表明了该类核的正确性、有效性和可行性.

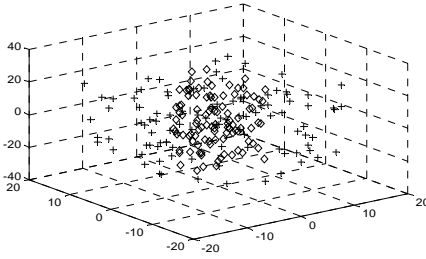


Fig.3 The input space of data set A
图 3 数据 A 的输入空间

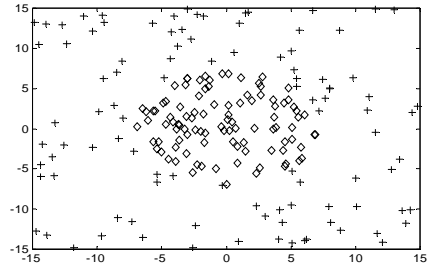


Fig.4 The projective of set A on x-y plane
图 4 数据 A 在平面上的投影

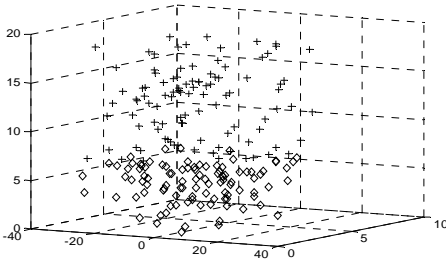


Fig.5 The feature space of set A
图 5 数据 A 的特征空间

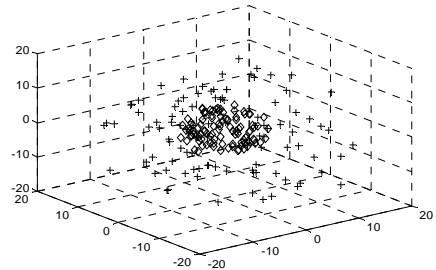


Fig.6 The input space of data set B
图 6 数据 B 的输入空间

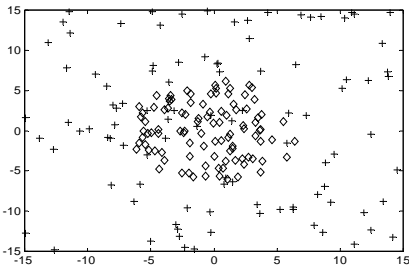


Fig.7 The projective of set B on x-y plane
图 7 数据 B 在平面坐标的投影

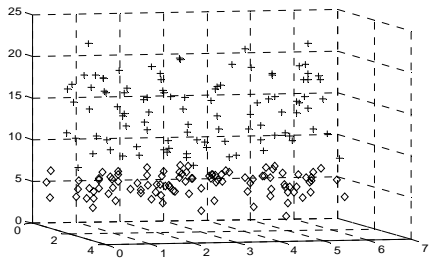


Fig.8 The feature space of set B
图 8 数据 B 的特征空间

References:

[1] Vapnik, V. The Nature of Statistical Learning Theory. New York: Springer-Verlag, 1995.
 [2] Cortes, C., Vapnik, V. Support vector networks. Machine Learning, 1995,20:273~297.
 [3] Burges, C.J.C. Geometry and invariance in kernel based methods. In: Schölkopf, B., Burges, C.J.C., Smola, J., eds. Advance in Kernel Methods—Support Vector Learning. Cambridge, MA: MIT Press, 1999. 89~116.
 [4] König, H. Eigenvalue Distribution of Compact Operator. Basel: Birkhäuser, 1986.
 [5] Wu, You-shou, Zhao, Ming-sheng, Ding, Xiao-qing. A new kind of ANN based on active function and its application. Science in China (Series E), 1997,27(1):55~60 (in Chinese).

附中文参考文献:

[5] 吴佑寿,赵明生,丁晓青.一种激励函数可调的新人工神经网络及应用.中国科学(E 辑),1997,27(1):55~60.

A New Kind of Support Vector Machine Kernel*

ZHANG Li, ZHOU Wei-da, JIAO Li-cheng

(National Key Laboratory for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

E-mail: zhangli@rsp.xidian.edu.cn; zhouwd@rsp.xidian.edu.cn; lchjiao@mail.xidian.edu.cn

<http://www.rsp.xidian.edu.cn>

Abstract: A new kind of support vector machine kernel is presented in this paper, which is called coordinate-transform kernel. The character of this kind of kernel is the mapped space has the same dimension as input space. Theoretic analysis and simulated experiment show that this kind of kernel is of accuracy and validity.

Key words: support vector machine; kernel function; coordinates-transform kernel

* Received May 18, 2000; accepted November 7, 2000

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.69772029; the National High Technology Development 863 Program of China under Grant No.863-306-ZT06-06-1

第 5 届亚太人机交互会议 APCHI 2002

征文通知

第 5 届“亚太地区人机交互”国际会议 APCHI2002(Asia-Pacific Conference on Computer-Human Interaction)将于 2002 年 11 月 1 日~4 日在中国北京召开.该会议由国际信息处理协会技术委员会 IFIP、国家自然科学基金委员会、中国微软研究院协办,由中国科学院软件研究所承办.APCHI 2002 旨在吸引来自世界各地兴趣广泛的研究者和参与者参加,包括人类工程学、人机交互、信息系统、软件工程、人工智能、设计方法学、社会科学、管理科学等其他多种相关学科.APCHI 2002 将汇集世界各地的人机交互研究人员,并特邀著名学者和专家就人机交互的最新动态和热点问题作专题讲演和报告.欢迎从事相关科研、教学、工程、开发及推广应用的研究开发人员参加.

一、征文内容

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| (1) 人机交互界面理论、方法和应用; | (2) 用户、界面和领域相关的理论,模型和建模方法; |
| (3) 可用性的理论、方法和实现; | (4) 用户界面软件体系结构、工具和技术; |
| (5) 用户界面设计和开发的实例研究; | (6) 以用户为中心驱动的用户界面设计和开发的理论、模型和工具; |
| (7) 感知用户界面和自适应性用户界面; | (8) 新型用户界面,包括笔、语音、手势、多通道、多媒体、虚拟现实等; |
| (9) 基于认知心理学的人机界面实现方法; | (10) 面向残疾人的人机交互和用户界面; |
| (11) 人机交互与移动计算、泛化计算、沉浸计算下的人机交互和用户界面. | |

二、征文要求及有关事项

投稿可以是全文、短文、技术报告或专题讨论.所投寄论文都要求在理论或应用方面具有创新性,且未在国内外公开发表.投稿必须用英文撰写;稿件将会由国际知名的学术专家组成的国际评审委员会评审,被录用的论文将会在大会上宣读,并将被收录在由国际知名出版社 Elsevier 出版发行;会后评选出的优秀论文将有机会被选送到国内知名科技期刊《软件学报》或国际知名杂志《Asian Information-Science-Life》(由纽约 Nova Science Publishers Inc.出版)发表,其他稿件将以短文、演示或短文报告的形式在大会进行报告.投稿可以电子投稿或者正常打印投稿(附软盘),凡经录用论文,将按照同一格式排版印刷.具体投稿格式和方法,请登陆 <http://iel.iscas.ac.cn/apchi/index.htm>. 电子文稿提交: apchi.submission@iel_mail.iscas.ac.cn. 打印稿件(一式 3 份)寄至:(请注明 APCHI2002 投稿).

三、重要日期和联系方式

征文截稿时间: 2002 年 4 月 20 日 提前优惠注册时间: 2002 年 7 月 15 日

联系人: 戴国忠研究员 中国科学院软件研究所,北京,100080 电话:010-62540434;13901187349 传真:010-62562533

E-mail: guozhong@admin.iscas.ac.cn

傅小兰研究员 中国科学院心理研究所,北京,100101 电话:010-64850862 传真:010-64872070

Email: fuxl@psych.ac.cn(Office);fuxl@ht.rol.cn.net(Home)

关志伟博士 中国科学院软件研究所智能工程实验室,北京,100080

电话:010-62540434;62540451 传真:010-62562533

E-mail: gzw@iel_mail.iscas.ac.cn; apchi2002@iel_mail.iscas.ac.cn