

基于约束区域神经网络的动态遗传算法*

陶卿^{1,2}, 曹进德³, 孙德敏¹, 方廷健⁴

¹(中国科学技术大学 自动化系, 安徽 合肥 230027);

²(中国人民解放军炮兵学院一系, 安徽 合肥 230031);

³(东南大学 应用数学系, 江苏 南京 210096);

⁴(中国科学院 合肥智能机械研究所, 安徽 合肥 230031)

E-mail: qtao@mail.iim.ac.cn

http://www.ustc.edu.cn

摘要: 提出一种基于约束区域神经网络的动态遗传算法, 将遗传算法的全局搜索和约束区域神经网络模型的局部搜索结合了起来. 利用动态遗传算法确定神经网络模型的初始点, 同时使用神经网络确定动态遗传算法的适应度函数. 该算法具有一定的理论意义和生物意义. 与标准的遗传算法相比, 缩小了搜索规模, 可获得不定二次规划问题更好的近似最优解.

关键词: 遗传算法; 神经网络; 二次规划

中图法分类号: TP18 **文献标识码:** A

遗传算法(genetic algorithm)这一术语最早出现在1967年美国学者 J. D. Bagay 的博士论文中^[1]. 1975年, 美国芝加哥大学 J. H. Holland 教授的专著《Adaptation in Natural and Artificial Systems》问世, 成为遗传算法得以正式承认的标志. 20世纪90年代以来, 遗传算法不断向广度和深度发展, 并得到了广泛的应用^[2~5].

从数学角度看, 遗传算法实质上是一种搜索寻优技术, 但它还具有一定的智能因素, 这主要表现在它不是穷举式的全面搜索, 而是依赖于适应度函数的有指导的搜索. 因此, 选择适当的适应度函数对提高遗传算法的智能程度显得尤为重要. 由于遗传算法采用交换、突变等操作, 产生了新的个体, 扩大了搜索范围, 使得搜索到的结果是全局最优解. 由此可知, 它会在求解数学规划问题中发挥重要作用. 实际上, 优化问题是遗传算法的主要应用之一.

神经网络方法和遗传算法相结合早已受到人们普遍的重视, 它们是软计算的重要组成部分. 目前, 大量有成效的研究主要集中在用遗传算法对各种神经网络的规模进行简化^[5,6]. 近些年来, 单纯应用神经网络方法求解数学规划问题的研究进展迅速^[7~10], 其中的一些网络具有较好的性能. 但不论是 BP 网络还是 Hopfield 网络, 它们都基于梯度原理, 因而只能进行局部搜索, 所以, 目前神经网络所解决的二次规划问题都具有正定性的假设, 以保证局部解就是最优解. 显然, 如何将遗传算法的全局搜索与神经网络的局部搜索相结合来求解不定的二次规划问题, 是一个很有意义的研究课题.

在应用遗传算法求解约束规划问题时, 一般都是将优化问题的目标函数直接当作遗传算法的

* 收稿日期: 1999-07-20; 修改日期: 1999-12-08

作者简介: 陶卿(1965-), 男, 安徽长丰人, 副教授, 博士, 主要研究领域为神经网络, SVM 理论, 应用数学; 曹进德(1963-), 男, 安徽和县人, 博士, 教授, 主要研究领域为神经网络, 稳定性理论, 应用数学; 孙德敏(1939-), 男, 辽宁新民人, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为模式识别, 智能系统; 方廷健(1939-), 男, 上海人, 研究员, 博士生导师, 主要研究领域为模式识别, 智能系统.

适应度函数,并对整个约束区域进行分割编码,但对维数较高、约束区域很大的规划问题来说,则会导致描述初始群体的字符串长度过长,运算规模也会扩大。

对正定性的二次规划问题,我们曾提出一种基于约束区域的连续神经网络模型,它具有很好的局部搜索功能,性能也较完善^[11~13]。本文将遗传算法的全局搜索与基于约束区域神经网络模型的局部搜索相结合,使初始群体的含义为神经网络动力系统的初始点(超闭立方体的顶点)。与标准的遗传算法相比,极大地缩小了搜索规模。本文利用神经网络沿边界面搜索全局极小值点的思想来源于文献[14]中的 LSSM(linear systems in a saturated mode)和文献[15]对 LSSM 的定量分析。LSSM 仅考虑联想记忆问题,即关心所有极小值点,文献[16,17]虽然根据 LSSM 来求解优化问题,但却没有很好地利用 LSSM 的特点,都以假定规划问题的正定性为基础。本文不要求规划问题的正定性,并从理论上证明了当穷举超闭立方体的顶点为初始点时,基于约束区域的神经网络一定能搜索到精确最优解(但这是指数级算法),即使没有搜索到最优初始点,神经网络也能搜索到局部次最优解,从而说明了本文的算法是有一定理论依据的,可获得不定二次规划的近似最优解,并给出了算法的生物解释。

1 不定二次规划问题

考虑下述不定二次规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x^T Ax + a^T x, \\ \text{subject to } & x \in Q, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $A_{m \times m}$ 是对称矩阵, $Q \subset R^m$ 是有界超闭方体。为简单起见,假设 $Q = \{x: 1 \geq x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m\}$, x_i 表示 x 的第 i 个分量。显然式(1)的解集非空,记 x^* 是式(1)的一个解, $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + a^T x$, P 为 Q 上的投影算子(定义见文献[11])。

与文献[11,12]所讨论的二次规划问题相比,这里没有要求矩阵 A 的半正定性。

定理 1. x^* 是规划问题式(1)的解的必要条件是 $x^* = P(x^* - Ax^* - a)$ 。

证明: 见文献[11]的定理 2。

定理 2. 若式(1)的一个解属于某一边界面的相对内部,则式(1)限制在此边界面上为半正定的。

证明: 不妨设 x^* 位于边界面 $S_1^{m-1} = \{x: x_m = 0, 0 \leq x_i \leq 1, i=1, 2, \dots, m-1\}$ 的相对内部 $(S_1^{m-1})^0 = \{x: x_m = 0, 0 < x_i < 1, i=1, 2, \dots, m-1\}$, 此时显然有 $\langle Ax^* + a, x - x^* \rangle = 0, \forall x \in Q \cap S_1^{m-1}$ 。

根据 Taylor 展式 $f(x) - f(x^*) = \langle Ax^* + a, x - x^* \rangle + \frac{1}{2}(x - x^*)^T A(x - x^*)$, 故 $\frac{1}{2}(x - x^*)^T A(x - x^*) \geq 0, \forall x \in Q \cap S_1^{m-1}$ 。

2 基于约束区域的神经网络模型

在文献[13]中,我们曾提出以下基于约束区域的连续神经网络模型:

$$\frac{dx}{dt} = P(x - Ax - a) - x. \quad (2)$$

它在优化和联想记忆问题中有很好的应用^[12,13,18]。

定义 1. 所谓神经网络模型式(2)限制在 $Q \cap S_T^{n-1}$ (记号同定理 2)是指要求 $x_n = 0, \frac{dx_m}{dt} = 0$, 而其余 $m-1$ 个变量依式(2)变化. 式(2)限制在其他边界面上与限制在 $Q \cap S_T^{n-1}$ 的含义是相同的.

定理 3. 对于 $\forall x_0 \in Q \cap S_T^{n-1}$, 式(2)限制在 $Q \cap S_T^{n-1}$ 的轨道仍然在 $Q \cap S_T^{n-1}$ 中, 且 $f(x)$ 沿此轨道单调递减收敛于式(2)限制在 $Q \cap S_T^{n-1}$ 的平衡点.

证明: 类似于文献[15]中定理 1 的证明.

定理 4. 如果 $\frac{1}{2}(x-x^*)^T A(x-x^*) \geq 0, \forall x \in Q \cap S_T^{n-1}$, 则式(2)限制在 $Q \cap S_T^{n-1}$ 中, 以 $\forall x_0 \in Q \cap S_T^{n-1}$ 为初始点, 都渐近收敛于二次规划问题式(1)限制在 $Q \cap S_T^{n-1}$ 的解集.

证明: 类似于文献[12]中定理 2 的证明.

3 动态遗传算法设计

标准的遗传算法可分为以下 4 步^[9]:

- (1) 随机建立由字符串组成的初始群体;
- (2) 计算各个体的适应度;
- (3) 根据遗传规律, 利用复制(reproduction)、交换(crossover)和突变(mutation)操作, 产生新群体;
- (4) 反复执行(2)、(3)步以后, 一旦达到终止条件, 选择最佳个体作为遗传结果.

下面来说明基于约束区域神经网络的动态遗传算法应用于不定二次规划问题式(1)时的步骤.

(1) 随机产生一定规模长度为 m 的三进制码表示初始群体, 不妨设 22...210 是一个体, 实际上, 它表示边界面 $Q \cap \{x: x_{m-1}=1, x_m=0\}$.

(2) 根据个体对神经网络模型式(2)进行限制和选取初始点, 选取某一时刻 $t_1 > 0$, 以限制后的式(2)的 $x(t_1)$ 处目标函数值为适应度函数的值. 如对个体 22...210, 即表示将式(2)限制在 $Q \cap \{x: x_{m-1}=1, x_m=0\}$, 选取 $x_0 \in Q \cap \{x: x_{m-1}=1, x_m=0\}$ 为初始点, 如可选 $x_0 = (0, 0, \dots, 0, 1, 0)$ 或 $x_0 = (1, 1, \dots, 1, 1, 0)$ 为初始点, 并以此时 $x(t_1)$ 处目标函数的值 $f(x(t_1))$ 为适应度函数的值.

(3)、(4)与标准的遗传算法相同.

显然, 规划问题式(1)的解或属于 Q 的内部, 或属于某一边界面的相对内部, 或为 Q 的顶点. 当它属于 Q 的内部时, 如果选择了个体 22...22, 根据定理 2 和定理 4, 式(2)显然可大范围收敛于式(1)的解; 而当其属于某一边界面的相对内部时, 根据定理 2 和定理 4, 通过对式(2)的适当限制即可得到式(1)的解. 另一方面, 容易知道, Q 的顶点实际上是对式(2)的特殊限制. 因此, 当我们穷举所有长度为 m 的三进制码, 即对所有边界面采用限制后的神经网络进行局部搜索时, 就可获得式(1)的精确解, 但这显然是一种指数级(3^m)算法, 即使遗传算法没有搜索到最优边界面, 定理 3 也保证了神经网络能搜索到相应边界面上的次最优解. 综上所述, 本文所提出的算法是有理论依据和应用价值的. 并且, 从实施步骤可以看出, 它利用了遗传算法的通过交换、突变产生新个体, 扩大搜索范围的先进思想. 另外, 本文采用三进制码表示群体进行遗传操作, 很好地描述了搜索求解式(1)的思路.

从生物学角度来看, 标准遗传算法中表示初始群体的字符串实际上相当于遗传物质, 静态适应度相当于“生存竞争, 适者生存”的生物生存能力^[19]. 本文所提出的遗传算法中表示初始群体的字符串相当于选育良种, 而神经网络动力系统式(2)的运动过程就相当于良种的发育生长过程, 此时

的动态适应度则表示种子的发育成长状况.

4 应用举例

本节仅考虑一个简单的不定二次规划问题以说明动态遗传算法的应用情况. 为了与标准的遗传算法相一致, 这里举一个求最大值的例子.

例 1:

$$\max -\frac{1}{10}(x_1^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 5)^2 + (x_4 - 7)^2 - (x_5 + 2)^2 - (x_6 + 4)^2 - (x_7 + 6)^2 - (x_8 - 10)^2),$$

$$\text{subject to } 10 \geq x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 8.$$

显然, 例 1 的理论解为 (0, 3, 5, 7, 10, 10, 0), 所求最大值为 69.6.

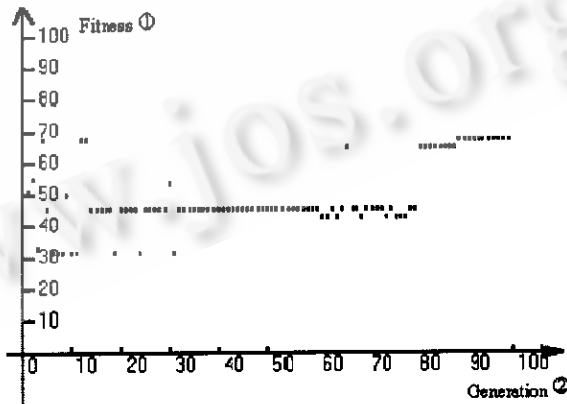
在使用遗传算法时, 取群体规模为 16, 初始群体由随机方式产生, 复制对象采用 Holland 教授的轮盘选择方法, 交换概率取为 0.6, 突变概率为 0.06. 用四阶龙格-库塔法模拟约束区域上的连续神经网络, 取步长为 0.1, 叠代次数为 100.

一次运行的结果如下:

随机产生初始群体为

```
00210210  20112021  10020012  01212002
00210120  20122101  01021221  21220211
20221002  11100020  01002010  11200120
00201212  20110202  11012212  01111200
```

此时, 适应度函数的最大值为 45.8. 运行至第 100 代时产生最优个体 02021110, 由神经网络得到次优解为 (0.00, 3.00, 0.00, 7.00, 10.00, 10.00, 10.00, 0.00), 求得函数的近似最大值为 67.1. 每代适应度函数的最优值变化趋势如图 1 所示:



①适应度, ②代次.

Fig. 1 The changing trend for the optimum of fitness in dynamic genetic algorithm

图 1 动态遗传算法适应度函数的最优值变化趋势

当我们只使用上述参数的遗传算法, 而不使用动态适应度时, 显然, 得到的近似最优解只能是超立方体的顶点. 为了获得精确度更好的解, 单纯的遗传算法不得不依据所需的精确度, 大幅度扩大群体的规模, 会给约束区域较大的优化问题增加很多不必要的计算量. 动态遗传算法添加了神

经网络的局部搜索,虽然计算量略有所增大(龙格-库塔法中的步长和叠代次数可视具体计算量调整),但获得了精确度很好的解。

以上结果表明,本文所提出的基于神经网络的动态遗传算法是有一定应用价值的。

5 结 论

本文提出一种将神经网络的局部搜索与遗传算法的整体搜索相结合的动态遗传算法,它可以近似求解约束不定二次规划问题.这种算法的思想是用遗传算法来确定神经网络的初始点,用神经网络在约束面上进行局部搜索并确定遗传算法的适应度函数的值.本文论述了它的理论依据,解释了它的生物学意义,对具体问题的应用说明,本文所提出的算法是有实用价值的。

References:

- [1] Bagley, J. D. The behavior of adaptive systems which employ genetic and correlation algorithms. *Dissertation Abstracts International*, 1968,28(12):1~10.
- [2] Goldberg, D. E. *Genetic Algorithm——in Search, Optimization and Machine Learning*. New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989.
- [3] Koza, J. R. *Genetic Programming: on the Programming of Computers by Means of Natural Selection*. Cambridge, MA: MIT Press, 1992.
- [4] Koza, J. R. *Genetic Programming II, Automatic Discovery of Reusable Programs*. Cambridge, MA: MIT Press, 1994.
- [5] Chen, Guo-liang, Wang, Xu-hua, Zhuang, Zhen-quan, *et al.* *Genetic Algorithm and its Applications*. Beijing: People's Post & Telecommunication Publication House, 1996 (in Chinese).
- [6] Mehrotra, K., Mohan, C. K., Ranka, S. *Elements of Artificial Neural Network*. Cambridge, MA: MIT Press, 1997.
- [7] Kennedy, M. P., Chua, L. O. Neural networks for nonlinear programming. *IEEE Transactions on Circuit and System*, 1988,35(5):554~562.
- [8] Zak, S. H., Uptising, V., Hui, S. Solving linear programming problems with neural networks; a comparative study. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1995,6(6):94~104.
- [9] Xia, Y. A new neural network for solving linear and quadratic programming problems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1996,7(6):1544~1547.
- [10] Xia, Y. New neural network for solving extended linear programming problems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1997,8(3):803~806.
- [11] Tao, Qing, Fang, Ting-jian. A kind of neural network for solving quadratic programming problems on a closed convex set. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 1998,11(1):7~11 (in Chinese).
- [12] Tao, Qing, Fang, Ting-jian. The neural network based on the constraints domain and its applications. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 1996,11(4):474~478 (in Chinese).
- [13] Tao, Qing. The neural network based on the constraints domain and its applications in optimization and associative memory [Ph. D. Thesis]. Hefei: University of Science and Technology of China, 1999 (in Chinese).
- [14] Li, J., Michel, A. N., Porod, W. Analysis and synthesis of a class of neural networks; linear systems operating on a closed hypercuber. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1989,36(11):1405~1422.
- [15] Tao, Qing, Fang, Ting-jian, Liu, Xin. The neural network based on the constraints domain and LSSM. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2000,13(1):28~31 (in Chinese).
- [16] Zhang, Qing-fu, Jiao, Li-cheng, Bao, Zheng. A kind of new neural network for linear programming. *Acta Electronica Sinica*, 1992,20(10):44~49 (in Chinese).
- [17] Yang, Re-li, Wu, Cang-pu. A kind of new neural network for nonlinear programming problems. *Acta Automatica Sinica*, 1996,22(3):293~299 (in Chinese).
- [18] Tao, Qing, Fang, Ting-jian, Sun, De-min. The continuous neural network based on the constraints domain for associative memory. *Chinese Journal of Computers*, 1999,22(12):1253~1258 (in Chinese).

- [19] Yun, Qing-xia, Huang, Guang-qiu, Wang, Zhan-quan. Genetic Algorithm and Genetic Programming——a Kind of Technique for Searching Optimum. Beijing: Metallurgy Industrial Publication House, 1997 (in Chinese).

附中文参考文献:

- [5] 陈国良,王煦法,庄镇泉,等.遗传算法及其应用.北京:人民邮电出版社,1996.
- [11] 陶卿,方廷健.一种求解闭凸集上二次规划问题的神经网络模型.模式识别与人工智能,1998,11(1):7~11.
- [12] 陶卿,方廷健.基于约束区域的神经网络模型及其应用.模式识别与人工智能,1998,11(4):474~478.
- [13] 陶卿.基于约束区域的神经网络模型及其在优化和联想记忆中的应用[博士学位论文].合肥:中国科学技术大学,1999.
- [15] 陶卿,方廷健,刘欣.基于约束区域的神经网络模型与LSSM.模式识别与人工智能,2000,13(1):28~31.
- [16] 张青富,焦李成,保铮.一种新的求解线性规划的神经网络.电子学报,1992,20(10):44~49.
- [17] 杨若黎,吴仓浦.一种新的非线性规划的神经网络模型.自动化学报,1996,22(3):293~299.
- [18] 陶卿,方廷健,孙德敏.基于约束区域的连续时间联想记忆神经网络.计算机学报,1999,22(12):1253~1258.
- [19] 云庆夏,黄光球,王战权.遗传算法和遗传规划——一种搜索寻优技术.北京:冶金工业出版社,1997.

A Dynamic Genetic Algorithm Based on the Neural Network with Constraints*

TAO Qing^{1,2}, CAO Jin-de³, SUN De-min¹, FANG Ting-jian⁴

¹(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China);

²(PLA Artillery Academy of China, Hefei 230031, China);

³(Department of Applied Mathematics, Southeast University, Nanjing 210096, China);

⁴(Hefei Institute of Intelligent Machines, The Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China)

E-mail: qtao@mail.iim.ac.cn

http://www.ustc.edu.cn

Abstract: In this paper, a kind of dynamic genetic algorithm based on the neural network with constraints is presented, which combines the local searching ability of neural network with the global searching ability of genetic algorithm. The dynamic algorithm is used to decide the initial point of the neural network, and the neural network is employed to decide the fitness of the dynamic genetic algorithm. The proposed algorithm has some theoretical and biological meanings. Compared with the standard genetic algorithm, it can decrease the searching scale and get the approximate solution of quadratic programming problems that are non-definite.

Key words: genetic algorithm; neural network; quadratic programming

* Received July 20, 1999; accepted December 8, 1999