

# 判断检测点是否是多边形或多面体内的新方法\*

王文成<sup>1</sup>, 吴恩华<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>(中国科学院软件研究所 计算机科学开放研究实验室, 北京 100080)

<sup>2</sup>(澳门大学科学技术学院, 澳门)

E-mail: whn@ios.ac.cn; weh@ios.ac.cn

http://www.ios.ac.cn/openlab/FirstPage.html

**摘要:** 提出一种新方法, 以检测一个点是否是多边形或多面体内。该方法通过将多面体的面片和多边形的边组织成层次结构, 在检测时运用二分查找算法, 不必处理每个面片和每条边。试验结果表明, 这种方法简单、有效, 有较高的检测速度。

**关键词:** 点; 多边形; 多面体; 包含检测

**中图法分类号:** TP391 **文献标识码:** A

关于点是否在一个多边形或多面体内的检测问题是计算机图形学中的基本问题。至今, 对于二维情况下点在多边形内的检测, 已有了深入的研究<sup>[1]</sup>。然而, 三维情况下点在多面体内的检测方面虽已有大量的工作, 却还存在着许多困难。这些方法大都因算法复杂而要处理许多奇异情况<sup>[2]</sup>。最近, 有人提出了两种不必处理奇异情况的检测方法<sup>[3,4]</sup>, 但它们均需进行大量的计算。迄今为止, 点在多边形、多面体内的检测方法, 大多要处理所有边或面片, 这无疑制约了检测速度的提高。

本文提出一种新的检测方法。通过预处理, 将多边形的边和多面体的面片进行层次化的组织。由此, 检测时不必处理多边形的所有边或多面体的所有面片, 就可以计算出测试点发出的检测线穿过多边形或多面体的区间段, 比较测试点与这些区间段, 就可以知道测试点是否是多边形或多面体内。

下面, 我们先给出多边形和多面体的定义, 再分别讨论二维平面上点在多边形内的检测方法以及三维空间中点在多面体内的检测方法, 最后对算法进行分析和讨论。

## 1 多边形和多面体的定义

根据参考文献[2], 多边形的一般定义为: 给出一系列共面的点  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 将这些点依次用线段连接, 最后,  $A_n$  与  $A_1$  相连。这样,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是多边形的顶点, 连接顶点间的线段称为边。

但本文讨论的多边形有两个约束条件: (1) 多边形的任意两条边, 除共享顶点外不能相交; (2) 多边形的边是直线段。我们将这类多边形称为简单直边多边形。为论述方便, 文中简称为多边形。

由文献[2]可知, 本文处理的多面体是由简单直边多边形构成的封闭体, 且任意一个多边形的一条边是而且只能是另一多边形的一条边, 两个多边形除共享边外不能相交。这些多边形称为多面体的面片。

将多边形和多面体构成的封闭空间定义为它们的内部。这样, 检测点是否是多边形或多面体内的问题, 就是判断它是否是多边形或多面体的内部。

\* 收稿日期: 1999-04-27; 修改日期: 1999-10-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69903009; 69873044)

作者简介: 王文成(1967-), 男, 湖南双峰人, 博士, 副研究员, 主要研究领域为科学计算可视化, 计算机图形学; 吴恩华(1947-), 男, 江苏如东人, 研究员, 博士生导师, 主要研究领域为虚拟现实, 科学计算可视化, 真实感图形学等。

## 2 点在多边形内的新检测方法

检测一个点是否在一个多边形中,一种常用的方法是射线法<sup>[5]</sup>,即从检测点发出一条射线,求该射线与多边形的边相交的数目。若有奇数个交点,则点在多边形中;否则,点在多边形外。虽然射线法简单、有效,但它很难处理一些奇异性情况。比如,射线与某一条边共线或射线经过多边形的顶点时,就很难统计射线与多边形的交点个数。当然,可以调整射线方向以避免这些奇异性情况,但这是比较麻烦的。况且我们也可以构造一个多边形,使它相对于某个检测点而言具有各个方向的边。对此,射线法是无能为力的。

结合射线法和多边形扫描转换算法<sup>[5]</sup>,我们提出一种新的检测方法,它由两部分组成。第1部分是预处理过程,它将多边形的边组织成层次结构,第2部分是检测过程,它根据被检测点的位置生成一条检测线,然后在预处理生成的边层次结构的基础上,快速求取检测线穿越多边形的区间段,最后将检测点与这些区间段进行比较,就可以知道检测点是否是多边形内。下面,我们对这两部分进行详细论述,不失一般性,在下面的论述中设多边形顶点的 $x, y$ 坐标值均大于0,  $X$ 轴方向由左向右,  $Y$ 轴方向由下向上。

### 2.1 预处理

预处理的步骤如下:

- (1) 将多边形的边分成许多单元,每个单元中的边是相连的,并且关于 $y$ 值是单调的。
- (2) 将各个单元中的边向 $Y$ 轴方向作正投影,根据它们作投影时的遮挡关系,建立“关于 $Y$ 轴的可见性”的边的层次结构。此时,必须保证同一单元中的边在同一层次。
- (3) 将每个层次中的边依其 $Y$ 坐标值排成一个单调序列,该序列称为边序列。此时,若两条边是相连的,且它们均不平行于 $X$ 轴,则它们的公共点只能判定属于一条边。对于平行于 $X$ 轴的边,其两个端点均判定属于它,而不能属于与它相邻的边(在此,平行于 $X$ 轴的边称为奇异边,因为它会引起检测操作时的奇异情况<sup>[2]</sup>)。

在具体操作时,先找到位于多边形最左的顶点,由该点开始沿着多边形的边依次搜索,找到与其相关且靠左的一个单元,显然,该单元中的边将属于最终边层次结构中的一个奇数和层次;然后,由该单元最上和最下的顶点开始,分别沿着多边形的边继续顺次搜索,找到两个单元,显然,它们将属于最终边的层次结构中的偶数层次。依此类推,可将所有的边分到各个单元,并形成奇数层次和偶数层次两个部分。由奇数层次与偶数层次的共生性可知,奇数层次中的一个单元若被偶数层次中的一个单元遮挡,则它一定被奇数层次中的一个单元遮挡。同理,对于偶数层次中的单元亦然。因此,我们可以在奇数层次和偶数层次这两个部分中分别进行遮挡关系的判定,并进行层次的排序。然后,将这两个部分中排好顺序的层次,由左向右,依次两两成对,这样就形成了最终边的层次结构。例如,奇数层次中的层次序列是 $odd_1, odd_2, \dots$ , 偶数层次中的层次序列是 $even_1, even_2, \dots$ , 则最终的层次序列是 $odd_1, even_1, odd_2, even_2, \dots$ 。

(4) 将层次结构中的各个层次,由左向右,依次两两成对地构成一组一组的顺序排列的组序列。在此序列中,每一组都由一个奇数层次和一个紧随的偶数层次组成。例如,设层次序列为 $lay_1, lay_2, lay_3, lay_4, \dots, lay_{2i-1}, lay_{2i} (i = 1, 2, \dots)$ , 我们可以得到组序列 $class_1, class_2, \dots, class_j; (j = 1, 2, \dots)$ , (其中 $class_j$ 由两个层次 $lay_{2j-1}$ 和 $lay_{2j}$ 组成,  $j = 1, 2, \dots, i$ )。

如图1所示,边 $IA, AB, BC, CD$ 属于一个单元,因为这些边是相连的,并且其 $y$ 值依顺序是单调的,即 $y_I < y_A < y_B = y_C < y_D$ 。同理,边 $DE, EF$ 属于一个单元,边 $FG$ 属于一个单元,而边 $GH, HI$ 属于一个单元。为叙述方便,将这些单元依次命名为 $unit_1, unit_2, unit_3, unit_4$ 。

将这些单元中的边向 $Y$ 轴作正投影,建立“关于 $Y$ 轴的可见性”的边的层次结构。显然, $unit_1$ 遮挡了其他单元, $unit_2$ 遮挡了 $unit_3$ 和 $unit_4$ ,而 $unit_3$ 遮挡了 $unit_4$ 。由此, $unit_1$ 中的边就属于第1层次 $lay_1$ ,  $unit_2$ 中的边就属于第2层次 $lay_2$ ,  $unit_3$ 中的边就属于第3层次 $lay_3$ , 而 $unit_4$ 中的边就属于第4层次 $lay_4$ 。当形成组序列时, $lay_1$ 和 $lay_2$ 组成 $class_1$ ,  $lay_3$ 和 $lay_4$ 组成 $class_2$ 。

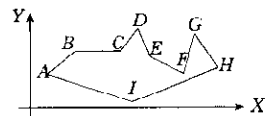


Fig. 1  
图1

## 2.2 检测操作

检测操作的过程如下:

(1) 根据检测点,生成一条平行于 $X$ 轴的检测线.例如,测试点为 $P$ ,其坐标为 $(P_x, P_y)$ ,则检测线为 $y=P_y$ .

(2) 在预处理生成的边层次结构中,根据二分查找技术,在组序列中挑选相关的组的边序列进行考察,以得到检测线穿越多边形的区间段,并进行检测判断.

具体地说,就是对于一个组中的一个奇数层次的边序列和一个偶数层次的边序列,分别求检测线与它们的交点,并由这两个交点得到一个检测线穿越多边形的区间段.在求检测线与某个边序列的交点时,运用二分查找技术,由 $P_y$ 值对此层次上的单调边序列进行搜索,快速找到与检测线相交的边,并求交.

每得到一个区间段,就考察检测点是否在这个区间段中.若在其中,则检测点在多边形内;否则,继续考察.

不失一般性,设测试点为 $P(P_x, P_y)$ .在求得检测线 $y=P_y$ 穿越某个 $class_m$ 相关层次的区间段 $[x_{min}, x_{max}]$ 之后,若 $P_x < x_{min}$ ,则根据二分查找技术挑选 $class_m$ 前面的一个 $class$ 进行下一步的检测;若 $P_x > x_{max}$ ,则挑选 $class_m$ 后面的一个 $class$ 进行下一步的检测.

但是,检测线有可能在某个组相关的两个层次上找不到交点,或只在一个层次上找到交点.对此,我们讨论如下:

(2.1) 若检测线在某个组相关的两个层次上找不到交点,则由于无信息可提供而无法决定搜索方向.此时只能由用户任选一个搜索方向,即往前或往后顺次考察各组,直至找到检测线与一个层次上的边有交点,或者搜索到了最边界的层次依然无交点,则换一个搜索方向考察各组.

(2.2) 若检测线只在一个层次上找到交点,那么此交点是在偶数层次,则表明该交点应该与前面一个奇数层次的交点形成区间段,于是,由当前组开始往前依次考察各组的奇数层次,直至找到一个交点;反之,若此交点是在奇数层次,则由当前组开始往后依次考察各组的偶数层次,直至找到一个交点(当然,此时可将该交点与检测点的 $x$ 坐标值进行比较,以决定搜索方向.例如,该交点是在偶数层次,但它的 $x$ 坐标值小于测试点的 $x$ 坐标值,此时就不必往前搜索了,而是往后挑选一个新的组进行考察).

(3) 如果用二分查找技术找不到一个区间段包含检测点,则检测点不在多边形内,结束检测过程.

显然,区间段生成的正确与否关系到新方法是否成功.对此,我们进行讨论并给出区间段生成的操作.

由射线法的原理和新方法中建立的边的层次结构易知,一个区间段的左端点肯定是检测线与奇数层次的边序列的交点,而其右端点肯定是检测线与偶数层次的边序列的交点(奇异边情况除外,它除了自身构成一个区间段以外,还将与其他交点构成一个区间段).因此,生成区间段的操作如下:

- 对于非奇异边,求出交点.若该边是在奇数层次,则与它一起生成区间段的点将是它后续偶数层次边序列中最靠近的交点;若该边是在偶数层次,则与它一起生成区间段的点将是它前面奇数层次边序列中最靠近的交点.

- 对于奇异边,则首先由奇异边本身形成区间段.然后,若奇异边是在奇数层次,则它的右端点被保留,以便与后继的偶数层次边序列中最靠近的交点形成区间段;若奇异边是在偶数层次,则将其左端点保留,以便与它前面奇数层次边序列中最靠近的交点形成区间段.

## 2.3 算法分析

在预处理时,为每条边建立一个节点,包含下列参数:边的最大 $y$ 坐标值,最小 $y$ 坐标值,以及对该边进行插值操作 $x=a*y+b$ 所需的参数 $a$ 和 $b$ .这相当于将边的表达由两个点的坐标替换为本文所用的边节点形式,并不增加空间.由于一个 $n$ 边形至多将边分成 $n$ 个层次以及 $n/2$ 个组,这意味着至多需 $1.5n$ 个寄存器来管理这些结构.因此,本文提出的方法对空间的要求不高.

进行检测操作时,运用二分查找技术,不必处理每条边,并且在对相应的边求交点时,只有1次乘法和1次加法.因此,新方法具有很快的检测速度.而文献[4]中的方法,对每条边均要处理,且对每条边进行行列式操作,要运算6次乘法和5次加法.

另外,一般检测方法中常见的奇异性问题,在新方法中得到了很好的解决,且操作简便.

### 3 点在多面体内的检测新方法

基于上一节给出的点在多边形内的新检测方法,我们运用同样的思路,提出点在多面体内的新检测方法.预处理时,将多面体的面组织成层次结构,并将同一层次中的面片向 $YZ$ 平面正投影所得的多边形按第2.1节中的处理方法,组织成边的层次结构.检测操作时,根据检测点的位置,生成一条平行于 $X$ 轴的检测线,并求得检测线穿越多面体的区间段以比较检测点与区间段,就可以知道检测点是否在多面体内.

为叙述方便,设多面体顶点的 $x, y, z$ 坐标值均大于0, $X$ 轴方向为由左向右, $Y$ 轴方向为由下向上, $Z$ 轴方向为由后向前.多面体的面片均向 $YZ$ 平面正投影,以进行面的层次划分.

#### 3.1 预处理

(1) 将多面体的面分成许多单元.每个单元中的面片是相连的,且它们在向 $YZ$ 平面正投影时相互间无遮挡,即对于其中任意两个面,设法向分别为 $(n_x, n_y, n_z), (m_x, m_y, m_z)$ ,则 $n_x * m_x$ 必须不小于0.0(注意:在进行单元划分时,凹奇异面必须先剖分成几个凸的多边形.其理由将在关于检测区间段生成的讨论中给出.在此,奇异面就是与 $X$ 轴平行的面片).

(2) 将各单元中的面片向 $YZ$ 平面作正投影,依据它们之间的遮挡关系,形成由左向右依次排列的面片层次结构.在此,同一单元中的面片必须分在同一层次.在具体实现时,仿照第2.1节的讨论,先找到多面体最左边的顶点,由此开始沿着多面体的面顺序搜索,找到包含该顶点的且靠左的一个面单元.显然,该面单元将属于最终面层次结构中的一个奇数层次.然后,由此面单元的边界开始,继续沿着多面体的面顺序搜索,找到新的一些面单元,它们显然将属于最终面层次结构中的偶数层次.依此类推,将多面体的面分成许多面单元,并形成奇数层次和偶数层次两个部分.随后,在这两个部分中,分别进行基于遮挡关系的面层次的划分及由左向右的排序,并最终将这两个部分中的面层次,由左向右顺序地两两成对,形成最后的面层次结构.

(3) 对于每个层次上的面片,它们在 $YZ$ 平面上的正投影是一些无相互遮挡的多边形.引用第2节的方法,将这些投影多边形的边相对于 $Y$ 轴(或 $Z$ 轴)组织成边的层次.由于多边形的任意一条边只是两个空间的分界线,为每条边标注它的两边分别趋向于哪一个多边形、或者是所有多边形的外部,以便检测操作时知道检测线与哪个面片相交(其实,根据面片或多边形在空间分布的连续性,只需为每条边标注一个趋向方向即可).

由于奇异面在 $YZ$ 平面上的正投影只是一条线,因此,这条线要特别标注;并将该奇异面向 $XZ$ 或 $XY$ 平面正投影以得到一个投影多边形,且为此多边形建立边的层次结构.另外,仿照第2节的讨论,在对面层次进行组织时,尽管与奇异面有共享边的面在奇异面关于 $YZ$ 面上的投影处也有投影,但在进行面的层次结构组织时,这些非奇异面在 $YZ$ 面上的投影要除去与奇异面投影共享的部分.

(4) 仿照第2.1节的讨论,顺序排列的面层次也可由相邻的奇偶层次配对形成一组一组的组序列.

#### 3.2 检测操作

在预处理之后,就可以进行点在多面体内的检测.对于检测点 $P(P_x, P_y, P_z)$ ,形成检测线 $\{y=P_y; z=P_z\}$ .然后,运用二分查找技术,在面片层次结构的组序列中进行搜索,求得检测线穿越多面体的区间段.比较这些区间段与检测点,就能知道检测点是否在多面体内.其操作与第2.2节中所介绍的相一致.

在求检测线 $\{y=P_y; z=P_z\}$ 与某个面层次中面片的交点时,首先求 $YZ$ 平面上点 $(P_y, P_z)$ 在该面层次中处于哪个多边形的正投影内.利用第2节介绍的方法,设这些多边形在 $YZ$ 平面上的正投影的边相对于 $Z$ 轴建立边的层次结构.由此求得 $YZ$ 平面上线 $z=P_z$ 与相关边的交点,判断点 $(P_y, P_z)$ 处于哪两个交点之间,即可知检测线 $\{y=P_y; z=P_z\}$ 与哪个面片相交,因为每条边均标注了它的两边是属于哪个多边形.由此,就能求得检测线与面片的交点.

一般而言,检测线与每个面层次中的面片至多有一个交点.但当奇异面与检测线共线时,其相交的部分就是一些线段.因此,仿照第2.2节的讨论,生成区间段的操作如下:

·若相交的面片是非奇异面,则求出交点.若该面是在奇数层,则与该交点一起生成一个区间段的另一点必定是它后继的最靠近的偶数层上的面片与检测线的交点.若该面是在偶数层,则该交点将与它前面最靠近的奇

数层上的面片与检测线的交点一起形成一个区间段。

·若相交的面片是奇异面,则首先根据奇异面的边层次结构,仿照第 2.2 节的处理方法,计算检测线在 XY 或 XZ 面上的投影线与奇异面的边序列的交点,由此得到检测线与奇异面相交的线段,该线段自身形成一个区间段。然后,再由这线段的端点与其他交点形成新的区间段。由于奇异面均简化成了凸多边形,检测线穿越奇异面的部分只能是一条线段。若此奇异面是在奇数层,则该线段的右端点,将与后继的最最近的偶数层上的面片与检测线的交点一起形成区间段;否则,该线段的左端点将与它前面最最近的奇数层上的面片与检测线的交点一起形成一个区间段。

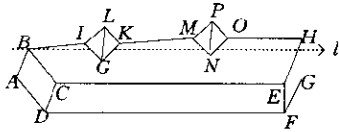


Fig. 2 图2

将凹奇异面剖分成多个凸多边形,是因为它与检测线相交的部分可能是多条线段,而这些线段的端点在与其它交点生成区间段时,情况非常复杂。如图 2 所示的奇异面 B C E H O N M K G I,它可以与多个非奇异面同属一个层次,但这些非奇异面却应当属于多个层次。当检测线 l 与该奇异面相交得到 3 条线段时,这些线段的端点如何与其它交点形成区间段,是很难处理的。为正确生成区间段,我们采用以下方式处理:将此凹奇异面剖分成多个凸多边形,并且这些凸多边形不能属于相同的面层次。

### 3.3 算法分析

在预处理时,为各个面层次上的每条边建立一个节点。对于面层次中的面片在 YZ 平面上的投影多边形,设其边均向 Z 轴正投影,则为每条边建立的节点包含下列参数:边的最小 Z 坐标值、最大坐标值以及对该边进行插值所需的两个参数、该边向上的部分所属的面片标记号。另外,管理各个面层次在 YZ 平面上的边层次,需要一些寄存器;而管理各个面层次,也要一些寄存器。例如,设多面体有 n 个面片, m 条边,则新方法至多要 n 个寄存器管理面层次, 2m 个寄存器管理所有面层次上的边层次。因此,新方法所需的空间不多。

检测时,运用二分查找技术,不必处理每个面片,且对相应的面片求交点时,运用线面相交的计算方法,不过要进行 9 次乘法, 8 次加法,因此,新方法具有很快的检测速度。而文献[4]中的方法,对每个面片均需处理,且每个面片要剖分成一些三角形,对每个三角形进行行列式操作,要运行 48 次乘法, 23 次加法。

另外,新方法较好地处理了奇异性问题,且操作简便。

## 4 试验结果

为检验新方法的有效性,我们将它与文献[4]中介绍的方法进行比较。为方便起见,我们只比较二维情况下点在多边形内的判断。如图 3 所示,检测点 A, B 是否在此多边形中。

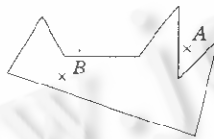


Fig. 3 图3



Fig. 4 图4

在运用新方法时,我们将此多边形分别向左和向下投影,以比较当边的层次数减少时所提高的效率。试验在 SGI Indigo2 工作站上完成,结果见表 1。

Table 1 表 1

	Time ( $\mu$ s) <sup>①</sup>	Preprocess <sup>②</sup>	Testing <sup>③</sup>	
			Point <sup>④</sup> A	Point B
The method in Ref. [4] <sup>⑤</sup>			23	21
New methods <sup>⑥</sup>	Project onto Y-axis <sup>⑦</sup>	113	9	7
	Project onto X-axis <sup>⑧</sup>	40	6	5

①时间(微秒),②预处理,③检测,④点,⑤文献[4]中的方法,⑥新方法,⑦Y轴方向,⑧X轴方向。

试验表明,新方法的检测时间远小于文献[4]中的方法,虽然其预处理过程要花费一些时间,但在实际应用中,一个多边形往往要被多次检测,这正有利于发挥新方法的优点。另外,当边的层次数减少时,预处理和检测的时间也都随之降低了。

另外,我们还检验了新方法关于点在多面体内的判断。如图4所示,预处理时考察了任意两个面片之间及每个面层次中任意两条边的遮挡关系,时间是1536 $\mu$ s。检测一个在多面体中的点A的时间是18 $\mu$ s,而另一个不在多面体中的点B的时间是20 $\mu$ s。

## 5 结束语

本文介绍了一种检测点在多边形或多面体内的新方法,该方法通过将多面体的面片及多边形的边组织成层次结构,在检测时利用二分查找技术,不必处理每个面片和边,具有很快的检测速度。同时,在区间段的生成操作中,新方法很好地解决了检测时的奇异性问题。另外,这种方法对空间的要求并不高。这些都显示了新方法的优越性。

虽然新方法的预处理要花费一些时间,但其结果可以被反复使用。这在实际应用中有利于检测效率的提高。本文在试验中的预处理,计算了任意两个面层次和任意两个边层次之间的遮挡关系,这无疑使得预处理的复杂度较高、时间较长。若运用Z-buffer消隐的方式求面片之间以及边与边之间的遮挡关系,则预处理的复杂度可以降低很多。比如,对凸多边形而言,每条边至多被处理两次,复杂度为 $O(n)$ 。但如何方便地实现,尚需进一步探讨。

实验表明,减少层次数目将有效地提高预处理和检测的速度。这在实际应用中值得注意。

## References:

- [1] Preparata, F.P., Shamos, S. Computational Geometry an Introduction. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [2] Kalay, Y. E. Determining the spatial containment of a point in general polyhedra. Computer Graphics and Image Processing, 1982,19(4):303~334.
- [3] Horn, W., Taylor, D. L. A theorem to determine the spatial containment of a point in a planar polyhedron. Computer Vision, Graphics and Image Processing, 1989,45(1):106~116.
- [4] Feito, F. R., Torres, J. C. Inclusion test for general polyhedra. Computers & Graphics, 1997,21(1):23~30.
- [5] James, D. F., Andries, V. D., Steven, K. F., et al. Computer Graphics: Principles and Practice, 2nd ed. CA: Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

## A New Method for Deciding Whether a Point is in a Polygon or a Polyhedron

WANG Wen-cheng<sup>1</sup>, WU En-hua<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>(Laboratory of Computer Science, Institute of Software, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China);

<sup>2</sup>(Faculty of Science and Technology, University of Macao, Macao, China)

E-mail: whn@ios.ac.cn; weh@ios.ac.cn

<http://www.ios.ac.cn/openlab/FirstPage.html>

Received April 27, 1999; accepted October 8, 1999

**Abstract:** A new method is presented in this paper to decide whether a point is in a polygon or a polyhedron. By taking a preprocessing to organize facets of polyhedrons and edges of polygons in to layers, it employs the binary searching algorithm to perform tests instead of handling all facets and edges. Experimental results show that it is simple, robust, and easy to use.

**Key words:** point; polygon; polyhedron; inclusion test