Coons 型分形曲面的生成方法*

张廷杰 邱佩璋 李海涛

(北京信息工程学院应用数学研究室 北京 100101)

摘要 将传统计算几何中的网函数插值方法与分形插值函数理论相结合,给出生成分形 Coons 型曲面的一种新方法.

关键词 分形曲面,网函数插值,分形插值函数.

中图法分类号 TP391

自然场景用 CAD 描写并不自然. 因为许多景物(如山、水、云、树等)形态极不规则,其图象难以直接用经典的几何和分析来刻画,而 CAD 的数学基础是经典的几何和分析. 近年发展起来的分形几何的理论和方法是描绘不规则图象的有力工具[1~4],然而实际运用远不如 CAD 方便. 在 CAD 中,Coons 曲面片很基本,结构简单,便于计算机操作.

本文把网函数插值法[5,6](Gordon 称为 Boole 和,也称为 Langrange 超越插值,特殊情况称为 Coons 结构)与 Barnsley 的分形插值法[7]相结合而形成的生成分形曲面的新方法. 此方法便于在计算机上并行计算,绘制山脉等自然景物. 本文第 1 节回顾传统的网函数插值方法;第 2 节介绍分形插值函数理论;第 3 节给出分形曲面生成的新方法;最后给出一些用该方法生成的分形曲面,并作进一步的分析和展望.

1 网函数插值

网函数插值法可以从曲面在边界上的值来近似计算曲面内部的值.

设 D 为二维欧氏空间中的一个矩形区域,

$$D=\{(x,y)\mid x_0\leqslant x\leqslant x_1,y_0\leqslant y\leqslant y_1\}.$$

D 的 4 条边的全体称为 D 的 1-网,记作 N_1,即

$$N_1=\{(x,y)\mid x_0\leqslant x\leqslant x_1,y=y_i(i=0,1),\text{ 或 } x=x_i(i=0,1),y_0\leqslant y\leqslant y_1\}.$$

设 D 为二维欧氏空间中的一个矩形区域,

$$D=\{(x,y)\mid x_0\leqslant x\leqslant x_2,y_0\leqslant y\leqslant y_2\}.$$

下列直线段的全体称为 D 的 2-网,记作 N_2,这些直线段为

$$N_2=\{(x,y)\mid x_0\leqslant x\leqslant x_2,y=y_i(i=0,1,2),\text{ 或 } x=x_i(i=0,1,2),y_0\leqslant y\leqslant y_2\}.$$

在 N_1,N_2 上分别定义的函数 $f_{N_1}(x,y)$ 和 $f_{N_2}(x,y)$ 顺次称为 1-网函数、2-网函数. 这里的网函数只要求连续,可处处不可微.[8]

已知 N_1,N_2 上的网函数 f_{N_1} 和 f_{N_2},则可以用网函数插值法顺次求得在区域 D_1 和 D_2 上的函数 F_1 和 F_2,使得

$$F_1(x,y)=f_{N_1}(x,y),(x,y)\in N_1,$$

$$F_2(x,y)=f_{N_2}(x,y),(x,y)\in N_2.$$

F_1 和 F_2 的构造如下:对于 $(x,y)\in D$,

$$F_1(x,y)=(L^x_{x_0,x_1}+L^y_{y_0,y_1}-L^x_{x_0,x_1}L^y_{y_0,y_1})f_{N_1}(x,y).$$

其中 L 是 Lagrange 一次插值算子. 上角标表示插值作用变元. 下角标表示型点. $Z=F_1(x,y)$ 也就是 D_1 上的 Coons Patch.

---

* 本文研究得到国家自然科学基金和电子科学院军事预研基金资助. 作者张廷杰,1939 年生,教授,主要研究领域为应用数学,图象重建,图象数据压缩. 邱佩璋,1927 年生,教授,主要研究领域为应用数学,计算机图形学. 李海涛,1970 年生,工程师,主要研究领域为应用数学,小波理论及应用,图象数据压缩.

本文通讯联系人:邱佩璋,北京 100101,北京信息工程学院应用数学研究室

本文 1998-02-28 收到原稿,1998-04-20 收到修改稿

$$F_2(x,y)=(L^x_{x_0,x_1,x_2}+L^y_{y_0,y_1,y_2}-L^x_{x_0,x_1,x_2}L^y_{y_0,y_1,y_2})f_{N_2}(x,y)\ ,$$

$Z=F_2(x,y)$是Coons Patch的推广.

2 分形插值函数

分形插值函数(Fractal Interpolation Function)是由一类特殊的迭代函数系统产生的.[3]我们使用的是最简单的分形插值函数.

给定$\mathbb{R}^2$中一组点集

$$\{(x_i,y_i)\,|\,i=0,1,2,\ldots,N,x_0<x_1<\ldots<x_N\}\ .$$

如果连续函数$f(x):[x_0,x_N]\mapsto R$满足$f(x_i)=y_i(i=0,1,2,\ldots,N)$,则称$f(x)$为插值函数.$\{\mathbb{R}^2,\omega_n,P_n,n=1,2,\ldots,N\}$为一个迭代函数系统,若$\omega_n$称为$\mathbb{R}^2$中的压缩映射,$P_n>0$是与$\omega_n$相关的概率,且

$$P_1+P_2+\ldots-P_N=1\ .$$

对于给定的点集,现在考虑迭代函数系统$\{\mathbb{R}^2,\omega_n,P_n,n=1,2,\ldots,N\}$,其中$\omega_n$为压缩仿射变换

$$\omega_n\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n&0\\c_n&d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_n\\f_n\end{pmatrix}\tag{1}$$

P_n满足:

$$P_n=\frac{1}{N}\ .$$

式(1)中的常数a_n,c_n,d_n,e_n,f_n满足条件

$$\omega_n\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix},\omega_n\begin{pmatrix}x_N\\y_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix},n=1,2,\ldots,N$$

即

$$a_n=\frac{x_n-x_{n-1}}{x_N-x_0}$$

$$e_n=\frac{x_Nx_{n-1}-x_0x_n}{x_N-x_0}$$

$$c_n=\frac{y_n-y_{n-1}}{x_N-x_0}-d_n\cdot\frac{y_N-y_0}{x_N-x_0}$$

$$f_n=\frac{x_Ny_{n-1}-x_0y_n}{x_N-x_0}-d_n\cdot\frac{x_Ny_0-x_0y_N}{x_N-x_0}$$

这里,$\{d_n\}$为纵向压缩因子,且满足$0\leqslant d_n<1$,则迭代函数系统$\{\mathbb{R}^2,\omega_n,P_n\}$就成为一双曲迭代函数系统.由迭代函数系统的性质可知,存在唯一的非空紧子集$G\subset\mathbb{R}^2$,满足

$$G=\bigcup_{n=1}^{N}\omega_n(G)\ .$$

且G为某连续函数$f:[x_0,x_N]\mapsto R$的图,即

$$G=\{(x,f(x))\,|\,x\in[x_0,x_N]\}\ ,$$

并且函数f插值于点集$\{(x_i,y_i)\,|\,i=0,1,2,\ldots,N\}$.上述函数$f(x)$就称为一个分形插值函数.

3 生成分形曲面的方法

在直角坐标系$oxyz$中,用Ω表示在xoy平面上的一个矩形区域,即

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,x_L\leqslant x\leqslant x_H,y_L\leqslant y\leqslant y_H\}\ ,$$

取正整数$N_x\geqslant2$和$N_y\geqslant2$,作出分点

$$x_L=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{N_x}=x_H,$$

$$y_L=y_0<y_1<y_2<\ldots<y_{N_y}=y_H.$$

现在,我们已知在点$(x_i,y_j)(i=0,1,\ldots,N_x,j=0,1,\ldots,N_y)$上的值$z_{ij}$,要生成一个分形曲面,使得此曲面包含所有点$(x_i,y_j,z_{ij})$.我们的生成步骤如下.

(1) 对每一个固定的$y_j(j=0,1,\ldots,N_y)$,在平面$y=y_j$内,我们已知点集$\{(x_i,y_j,z_{ij})\,|\,i=0,1,\ldots,N_x\}$,则可利用第3节中产生分形插值函数的迭代函数系统$\{\mathbb{R}^2,\omega_n,P_n\}$,作出插值于$\{(x_i,y_j,z_{ij})\,|\,i=0,1,\ldots,N_x\}$的分形插值函数$z=f_{y_j}(x,y_j)$;

(2) 同样,对每一个固定的x_i,在平面$x=x_i$内,作出插值于点集$\{(x_i,y_j,z_{ij})\,|\,j=0,1,\ldots,N_y\}$的分形插值函数$z=f_{x_i}(x_i,y)$;

(3) 通过以上两步,我们求出了在 Ω 中的线段

$$\{x=x_i, i=0,1,\ldots,N_x, y_0\leqslant y\leqslant y_{N_y}\}$$

和

$$\{y=y_i, i=0,1,\ldots,N_y, x_0\leqslant x\leqslant x_{N_x}\}$$

上的函数,下面我们利用网函数插值生成 Ω 上的分形曲面.

1-网插值:记

$$\Omega_{ij}=\{(x,y)\,|\,x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}, y_j\leqslant y\leqslant y_{j+1}\}\quad 0\leqslant i\leqslant N_x-1, 0\leqslant j\leqslant N_y-1.$$

我们已由步骤(1)(2)求出了 Ω_{ij}边界上的函数值,则可用本文第1节中的1-网函数插值的公式生成每一个小区域 Ω_{ij}上的分形曲面,从而得到整个区域 Ω 上的1-网函数插值分形曲面.

2-网插值:当 N_x, N_y 为偶数时,记

$$D_{ij}=\{(x,y)\,|\,x_{2i}\leqslant x\leqslant x_{2(i+1)}, y_{2j}\leqslant y\leqslant y_{2(j+1)}\}\quad 0\leqslant i<\frac{N_x}{2}, 0\leqslant j<\frac{N_y}{2}.$$

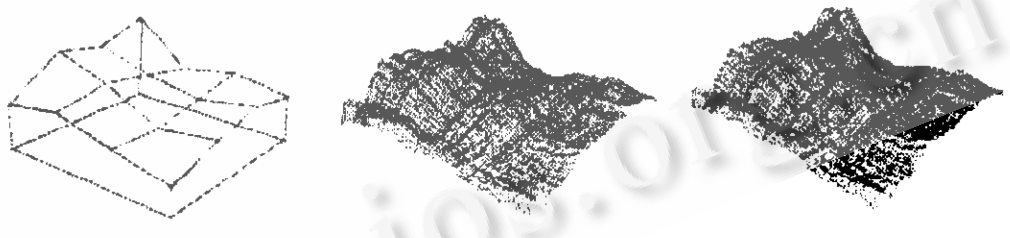
利用本文第1节的2-网函数插值公式,可生成小区域 D_{ij}上的曲面,即可得到 Ω 上的2-网函数插值分形曲面.

当 N_x, N_y 中有一个为奇数时,不妨设为 N_x,则可在 $D_{ij}(0\leqslant i<\frac{N_x-1}{2}, 0\leqslant j<\frac{N_y}{2})$上用2-网函数插值生成曲面,在 $\Omega_{(N_x-1)j}(0\leqslant j\leqslant N_y-1)$上生成1-网函数插值曲面;当 N_x, N_y 都为奇数时,在 $D_{ij}(0\leqslant i<\frac{N_x-1}{2}, 0\leqslant j<\frac{N_y-1}{2})$上生成2-网函数插值曲面,在 $\Omega_{ij}(i=N_x-1, 0\leqslant j\leqslant N_y-1$ 或 $0\leqslant i\leqslant N_x-1, j=N_y-1)$上生成1-网函数插值曲面.对于上述两种情形,生成的 Ω 上的曲面也认为是2-网函数插值分形曲面.

通过以上3步,可以生成包含已知点集 $\{(x_i,y_j,z_{ij})\}$的分形曲面.

4　实验及探讨

利用第3节中给出的方法,我们生成了三组分形曲面,如图1～3所示.其中,图1～3(a)为已知的插值型点,图1～3(b)为1-网函数插值分形曲面,图1～3(c)为2-网函数插值分形曲面.实际的计算表明,我们的生成方法计算简单,实现方便,生成速度快.由计算结果来看,对于分形曲面的生成,采用1-网插值和2-网插值的效果差别不大.



(a)　　(b)　　(c)

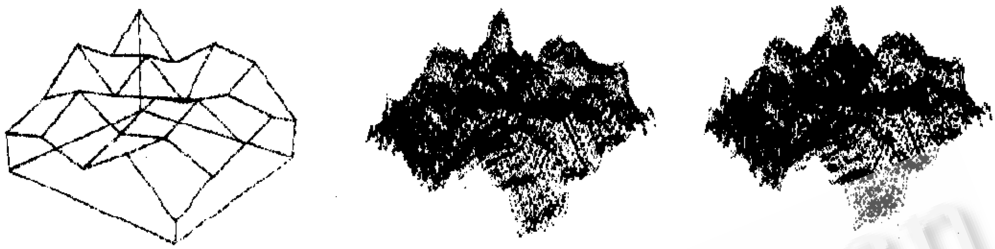
图1　插值型点为4×4

在实际计算中,$\{d_n\}$的确定是一个难点,可以用以下两种方法.(1) 由经验来选取 d_n 的值,根据所要生成的分形曲面的希望抖动程度来决定 d_n;(2) 文献[2]证明了下述定理.

定理. 若 $\sum_{n=1}^{N} d_n>1$ 且插值点集 $\{(x_i,y_i)\,|\,i=0,1,\ldots,N\}$不共线,则分形插值函数曲线的 Box 维数 D_B 是方程 $\sum_{n=1}^{N} d_n\cdot a_n^{D-1}=1$ 的唯一解;在其他情况下,$D_B=1$.

由此定理,在 D_B 已知的情况下,可以定出 $\{d_n\}$.

本文的生成算法可用于自然景物表面的模拟.例如,对于山脉表面,可以根据山体的起伏特点,选取其表面上的一组特征点作为插值型点,再由山脉的起伏程度来定出 $\{d_n\}$,就可生成山脉表面的模拟图象.对于景物表面的模拟,实际上是用少量的数据来刻画景物的大致轮廓或有关特征,是一种数据压缩,如何将我们的生成算法用于图象数据压缩是下一步的工作.如何计算用我们的方法所生成的分形曲面的一个重要参数——分形维数也是进一步要做的工作.



(a) (b) (c)

图 2 插值型点为 5×5

(a) (b) (c)

图 3 插值型点为 9×9

参考文献

1 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman W H and Co., 1982

2 Barnsley M F. Fractals Everywhere. Orlando: Academic Press. 1988

3 辛厚文. 分形理论及其应用. 合肥:中国科技大学出版社. 1993
(Xin Hou-wen. Theory of fractal andIts application. Hefei: Publisher of University of Science and Technology of China, 1993)

4 齐东旭. 分形及其计算机生成. 北京:科学出版社. 1994
(Qi Dong-xu. Fractal and Its Computing Generation. Beijing: Science Press, 1994)

5 Gordon W J. Distributive lattices and the approximation of multivariate functions. In: Schoenberg I J *ed*. Proceedings of the Symposium on Approximation with Special Emphasis on Splines, University of Wisconsin Press, 1969. 223~227

6 邱佩璋. n 维空间 (m) 网函数差值及其应用. 内蒙古大学学报, 1978, (1): 5~27
(Qiu Pei-zhang. Interpolation of (m) nets unction in n dimensional space and its application. Acta Scientiarum Naturatium Unirersitatis Intramongolicae, 1978, (1): 5~27)

7 Barnsley M F. Fractal functions and interpolation. Constructive Approximation, 1986, 2: 303~329

8 张廷杰, 李海涛, 邱佩璋. 一类四阶差分方程边值问题及分形曲面的生成. 应用数学学报, 1997, 20(3): 386~393
(Zhang Ting-jie, Li Hai-tao, Qiu Pei-zhang. Boundary value problem of a fourth order difference equation and the generation of fractal surface. Acta Mathematica Applicatae Sinica, 1997, 20(3): 386~393)

A Method for Generating Fractal Surface of Coons Type

ZHANG Ting-jie QIU Pei-zhang LI Hai-tao

(*Research Division of Applied Mathematics Beijing Information and Technology Institute Beijing* 100101)

Abstract In this paper, a new method for generating fractal surface of Coons type is given by using Bernsley's fractal interpolation and classical interpolation of nets function.

Key words Fractal surface, interpolation of nets function, fractal interpolation.