第9卷第4期
1998年4月

软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol. 9, No.
Apr. 1998

概率逻辑类超树结构分解计算模型的完备性*

张晨东 陈火旺 王兵山 徐 光

(长沙工学院计算机系 长沙 410073) (空军指挥学院 北京 100081)

摘要 针对Nilsson概率逻辑推理在计算规模方面存在的问题,本文给出了公式集按类超树结构分解的计算模型,并证明了分解算法的完备性.

关键词 概率逻辑,不确定性推理,分解算法.

中图法分类号 TP18

针对Nilsson概率逻辑(Probabilistic Logic)[1]推理的计算难度,我们在文献[2]中提出了一种对公式集进行相对分解的思想,并给出了基于聚类的分解算法(算法的时间复杂性为O^2N^3).在公式集可被相对分解的前提下,在文献[3]中给出了一种链式分解计算模型,并证明了该分解算法的可靠性和完备性.由于链式模型适应的问题类型比较少,我们又进一步提出了类超树结构的分解模型,并给出了它的可靠性证明.本文是以上工作的继续,将给出类超树结构分解计算模型的完备性证明.

1 有关的符号定义和定理

本文沿用文献[2,3]中的符号和定理以及补充定义.

命题逻辑公式集:$F=\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$,其中$f_1,f_2,\ldots,f_n$为命题逻辑公式;公式集F中出现的原子公式集:$A=atom(F)$;关于F或A的可能世界集:$S=\{s|s:A\to\{0,1\}\}$,其中$A=atom(F)$;概率逻辑公式的形式为:$P(f)=p$,其中P为概率赋值函数且$p\in[0,1]$;设集合$A_0\supseteq A_1$,相应的真值赋值函数的集合记为$S_0=\{s|s:A_0\to\{0,1\}\}$,$S_1=\{s|s:A_1\to\{0,1\}\}$,并设$[S_0]_{S_1}=\sum_{h_1\in S_1}[S_0]h_1$为$S_0$的一个划分,$[S_0]h_1\subseteq S_0$且$\bigcup_{h_1\in S_1}[S_0]h_1=S_0$,满足:对$\forall h_0\in[S_0]h_1$,并对$\forall a\in A_1$,有$h_0(a)=h_1(a)$.

定理1. 以上给出的等价类$[S_0]h_1$存在且唯一.

证明:用集合的性质和等价类的概念可直接得证.

若$A_1\subseteq A_0$记$S_0=\{s|s:A_0\to\{0,1\}\}$,$S_1=\{s|s:A_1\to\{0,1\}\}$,对任意的$d_0\in S_0$,称$d_1$为$d_0$在$S_1$上的投影,只要$d_1\in S_1$,且满足:对任意$t\in A_1$(显然$t\in A_0$),$d_1(t)=d_0(t)$,并记$d_1$为$d_0\downarrow S_1$.

定理2. 真值赋值函数的投影具有存在唯一性.

设有原子公式的集合$A_0\supset A_1$,相应的真值赋值函数的集合记为$S_0=\{s|s:A_0\to\{0,1\}\}$,$S_1=\{s|s:A_1\to\{0,1\}\}$,设$S_0$上有概率函数$P_0:S_0\to[0,1]$满足:$\forall d\in S_0$,$P_0(d)\geqslant 0$且$\sum_{d\in S_0}P_0(d)=1$,称$P_1$为$P_0$在$S_1$上的投影.$P_1:S_1\to[0,1]$是$S_1$上的概率函数(对$\forall d\in S_1$,$P_1(d)\geqslant 0$且$\sum_{d\in S_1}P_1(d)=1$),且满足:对$\forall h_1\in S_1$,$H_0=[S_0]h_1$为$S_0$关于$h_1$的等价类,有$P_0(H_0)=P_1(h_1)$.按照概率的可加性有$P_0(H_0)=\sum_{h\in H_0}P_0(h)$,记$P_1$为$P_0\downarrow S_1$.

定理3. 概率函数的投影具有存在唯一性.

另外,在以下的证明中对文献[2,3]中的其它符号定义和定理将直接引用.

2 公式集的类超树分解

类超树分解是找公式集的一个划分:$F=F_1+F_2+\ldots+F_n$,使之满足如下条件:

---

* 本文研究得到国家自然科学基金和国家863高科技项目基金资助.作者张晨东,1960年生,博士,主要研究领域为概率性逻辑推理.陈火旺,1936年生,教授,博士导师,主要研究领域为软件工程,人工智能.王兵山,1938年生,教授,主要研究领域为计算机逻辑,软件工程.徐光,1951年生,教授,博士导师,主要研究领域为指挥控制,军事专家系统.

本文通讯联系人:张晨东,北京100081,空军指挥学院

本文1997-02-20收到原稿,1997-05-07收到修改稿

(1) 可行性：$\max(|atom(F_i)|)$ $(i=1,2,...,n)$的规模可实际计算；

(2) 弱相关性：记 $atom(F_{i,j})=atom(F_i)\cap atom(F_j)$，若 $atom(F_{i,j})\neq\varnothing$，其中 $i,j=1,2,...,n$，且 $i\neq j$，则 $|atom(F_{i,j})|\ll\min(|atom(F_i)|,|atom(F_j)|)$；其中"$\ll$"关系的确定可参照如下的上限标准：令 $W=\{atom(F_{ij})|i\neq j, atom(F_{ij})\neq\varnothing;1<i,j<n\}$，则 $\sum_{w\in W}2^{|w|}$ 的规模是实际可计算的；

(3) 类超树结构：对任意 $i,j,k\in\{1,2,...,n\}$，$i\neq j,i\neq k,j\neq k$，有 $atom(F_i)\cap atom(F_j)\cap atom(F_k)=\varnothing$，即原子公式只出现在至多两个公式集的原子集的交集之中；若令 $I=\{1,2,...,n\}$，$V=atom(F)$，$E=\{atom(F_i)|i\in I\}$，超图 $G=(V,E)$是连通的．对$\forall$ $i,j,k\in I,i\neq j,i\neq k,j\neq k$，若 $atom(F_i)\cap atom(F_j)\neq\varnothing$，且 $atom(F_i)\cap atom(F_k)\neq\varnothing$，记 $A_{(i)}=atom(F_i)-atom(F-F_i)$，当令 $V'=V-A_{(i)}$，$E'=E-\{atom(F_i)\}$，则超图 $G'=(V',E')$为非连通的．

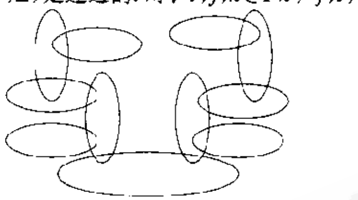

图1 公式集按类超树结构分解示意图

对于根据类超树结构划分后的公式集，其原子公式集的分解呈类似图1所示的形式．图1中，每一个圈代表一个分解后的公式子集所包含的原子集，两个圈相交表示这两个公式子集中包含相同的原子．从图中可以看出条件(3)的限制．

根据对公式集的类超树结构分解，按照文献[2]中给出的类似于链式分解结构的处理方法，可用相同的步骤建立一个主问题和若干相对独立的子问题组成的分解计算模型．

3 分解模型的完备性证明

引理1. 设有原子公式集合为 $A_1\subseteq A_0$，原子公式集对应的真值赋值函数集为 $S_1=\{s|s:A_1\to\{0,1\}\}$，$S_0=\{s|s:A_0\to\{0,1\}\}$，对概率逻辑公式 f，若 $atom(f)\subseteq A_1$，令$\{S_1\}_f$ 为真值赋值函数集 S_1 上使公式 f 成真赋值集，且$\{S_0\}_f$ 为真值赋值函数集 S_0 上使公式 f 成真赋值集．那么，对$\forall$ $d_1\in\{S_1\}_f$，$[S_0]d_1$ 为$\{S_0\}_f$ 的一个划分．

证明：先证明对$\forall$ $d_1,d_2\in\{S_1\}_f$ 且 $d_1\neq d_2$，必有$[S_0]d_1\cap[S_0]d_2=\varnothing$．由于 $d_1\neq d_2$，则$\exists$ $a\in A_1$，使 $d_1(a)\neq d_2(a)$．任选 $e_1\in[S_0]d_1$ 及 $e_2\in[S_0]d_2$，有 $e_1(a)=d_1(a)\neq d_2(a)=e_2(a)$；再证明$\bigcup_{d_1\in\{S_1\}_f}[S_0]d_1=\{S_0\}_f$，对$\forall$ $e\in\bigcup_{d_1\in\{S_1\}_f}[S_0]d_1$，不妨设 $e\in[S_0]d(d\in\{S_1\}_f)$，则对任选 $a\in A_1$，有 $e(a)=d(a)$，由$\models_d f$ 可推出$\models_e f$，即 $e\in\{S_0\}_f$．反之，对任选 $e\in\{S_0\}_f$，令 $e_1=e\downarrow_{S_1}$，则由 $atom(f)\subseteq A_1$ 及对$\forall$ $a\in A_1$，有 $e(a)=e_1(a)$，由$\models_e f$ 可得$\models_{e_1}f$，即 $e_1\in\{S_1\}_f$，又由 $e_1=e\downarrow_{S_1}$，可推出 $e\in[S_0]e_1\subseteq\bigcup_{d_1\in\{S_1\}_f}[S_0]d_1$，即 $e\in\bigcup_{d_1\in\{S_1\}_f}[S_0]d_1$，因此，对$\forall$ $d_1\in\{S_1\}_f$，$[S_0]d_1$ 为$\{S_0\}_f$ 的一个划分． □

引理2. 设有原子公式集合为 $A_1\subseteq A_0$，原子公式集对应的真值赋值函数集为 $S_1=\{s|s:A_1\to\{0,1\}\}$，$S_0=\{s|s:A_0\to\{0,1\}\}$．对概率逻辑公式 $f\in A_1$，令$\{S_1\}_f=\{s|s\in S_1,\models_s f\}$为真值赋值函数集 S_1 上使公式 f 成真赋值集，且$\{S_0\}_f=\{s|s\in S_0,\models_s f\}$为真值赋值函数集 S_0 上使公式 f 成真赋值集，$P_0:S_0\to[0,1]$为 S_0 上的概率函数，$P_1:S_1\to[0,1]$为 P_0 投影在 S_1 上的概率函数，$P_1=P_0\downarrow_{S_1}$，则有 $P_0(\{S_0\}_f)=P_1(\{S_1\}_f)$．

证明：$P_0(\{S_0\}_f)=\sum_{d_0\in\{S_0\}_f}P_0(d_0)$ (概率函数的可加性)

$=\sum_{d_1\in\{S_1\}_f}P_0([S_0]d_1)$ (引理1)

$=\sum_{d_1\in\{S_1\}_f}P_1(d_1)$ (概率函数投影的性质)

$=P_1(\{S_1\}_f)$ (概率函数的可加性) □

引理3. 设有命题公式集合的划分 $F=F_1+F_2+...+F_n(n\geqslant 2)$及每个公式集所包含的原子公式的集合 $A=A_1\cup A_2\cup...\cup A_n$，满足类超树结构的分解条件．记原子公式集对应的真值赋值函数集为 $S=\{s|s:A\to\{0,1\}\}$，$S_1=\{s|s:A_1\to\{0,1\}\}$，$S_2=\{s|s:A_2\to\{0,1\}\}$，...，$S_n\{s|s:A_n\{0,1\}\}$．若 S 上有概率函数 $P:S\to[0,1]$满足如下条件：对$\forall$ $f\in F$，$r(f)$为公式 f 的概率赋值，令$\{S\}_f=\{s|s\in S,\models_s f\}$，$\{S\}_f$ 是 S 中使公式 f 成真的那些真值赋值函数的集合，则 $P(\{S\}_f)=r(f)$．那么，有如下必然的结论：如果公式 f 在分解中被分配到第 k 个子公式集中，$f\in F_k(k=1,2,...,n)$，令$\{S_k\}_f=\{s|s\in S_k,\models_s f\}$，$\{S_k\}_f$ 是 S_k 中使公式 f 成真的真值赋值函数的集合，则 $P_k(\{S_k\}_f)=r(f)$，其中 $P_k=P\downarrow_{S_k}$．

证明：由于公式 f 属于第 k 个子公式集，即 $f\in F_k$，则按照公式集分解的原则可知，公式 f 中出现的所有原子公式都在第 k 个原子公式子集中，记 $atom(f)$为公式 f 中出现的原子公式集，则有 $atom(f)\in A_k$．因此，只需证明总的真值赋值函数集 S 中对公式的成真赋值集在概率 P 下的取值，等于第 k 个真值赋值函数集 S_k 中对公式的成真赋值集在投影概率 P_k 下的取值，即 $P(\{S\}_f)=P_k(\{S_k\}_f)$，这是引理2的结论．再由题设条件 $P(\{S\}_f)=r(f)$，可得 $P_k(\{S_k\}_f)=P(\{S\}_f)=r(f)$． □

定理 4(超树结构概率逻辑公式集分解模型的完备性). 沿用引理 3 的条件,若存在 S 上的概率函数 $P^{(n)}:S\to[0,1]$,则 $P_i:S_i\to[0,1]$($i=1,2,...,n$)存在且满足边缘概率赋值一致性,即对于 $\forall\ i,j\in\{1,2,...,n\}$,$i\neq j$,$A_{ij}=A_i\cap A_j\neq\varnothing$,记 $S_{ij}=\{s\mid s:A_{ij}\to\{0,1\}\}$为原子公式交集 A_{ij} 上的真值赋值函数集合,$P_i:S_i\to[0,1]$,$P_j:S_j\to[0,1]$,满足 $P_i\downarrow S_{ij}=P_j\downarrow S_{ij}$;并且对任何公式 f,$atom(f)\in A$,如果 $atom(f)\subseteq A_k$,且 $P(f)=r(f)$为给出的对公式 f 的概率赋值,则有 $P_k(f)=r(f)$.

证明:$P^{(n)}\downarrow_{s_i}$是可构造的,令 $P_i=P^{(n)}\downarrow_{s_i}(i=1,2,...,n)$. 因此,$P_i(i=1,2,...,n)$的存在性得证;此外,$P^{(n)}\downarrow_{s_{ij}}=(P^{(n)}\downarrow_{s_i})\downarrow_{s_{ij}}=P_i\downarrow_{s_{ij}}$以及 $P^{(n)}\downarrow_{s_{ij}}=(P^{(n)}\downarrow_{s_j})\downarrow_{s_{ij}}=P_j\downarrow_{s_{ij}}$,即 $P_i\downarrow_{s_{ij}}=P_j\downarrow_{s_{ij}}$. 边缘概率函数的一致性得证. 也就是说,如果存在总的概率空间上保证概率赋值的概率函数,则在各子空间上的投影函数将保持预先概率赋值,并具有边缘概率一致性;再根据引理 3,对任何公式 f,$atom(f)\in A$,如果 $atom(f)\subseteq A_k$,且 $P(f)=r(f)$为给出的对公式 f 的概率赋值,必有 $P_k(f)=r(f)$. 这将保证如果原问题存在一个解,那么这个解必定包含在用超树结构的分解算法求出的解集中. □

4 结 论

下面是类超树分解计算模型与几种典型的基于 Nilsson 逻辑的推理计算模型的比较.

表 1　几种关于 Nilsson 逻辑推理计算方法的比较

推理方法(计算模型)	适应问题类型	复杂性	完备性	利用问题特征	算法实验
KAVVADIAS 90[4]	两原子式	最大搜索空间 2^n	未证	公式结构	中规模
Andersen94[5]	一类有向图表示的 Horn 子句		未证	公式结构	
Hooker94[6]	Bayesian logic 网络	高于 Nilsson 模型	未证	条件概率	小规模
Frisch94[7]	一般公式/两原子式	高于 Nilsson 模型	未证/已证	条件概率	小规模
类超树分解	公式集可分解	规模 $\sum_{w\in W}2^{\lvert w\rvert}$	已证	公式集结构	中规模

从以上几种方法的比较可以看出,本文提出的类超树分解算法主要利用了公式集的结构特征. 其特点是对逻辑公式的形式限制较小,能有效地缓解一类问题的实际求解难度,且算法的完备性得到了证明. 此外,本文的方法还可与多种其它方法相结合,比如用 KAVVADIAS 的方法求解较大的子公式集中的局部问题.

参考文献

1 Nilsson Nils J. Probabilitic logic. Artificial Intelligence, 1986,28(1):71～87
2 张晨东,陈火旺,刘凤岐,概率逻辑公式集分解的合并聚类算法. 软件学报,1997,8(6):441～447
(Zhang Chen-dong, Chen Huo-wang, Liu Feng-qi. A clustering-algorithm for decomposition of probabilistic logic formula set. Journal of Software, 1997,8(6):441～447)
3 张晨东,陈火旺,王兵山等. 概率逻辑推理的弱相关分解方法. 计算机学报,1997,20(10):894～898
(Zhang Chen-dong, Chen Huo-wang, Wang Bing-shan *et al*. A weak-dependent-decomposition approach for probabilistic logic. Chinese Journal of Computers, 1997,20(10):894～898)
4 Dimitris Kavvadias, Christos H. Papadimitriou, a linear programming approach to reasoning about probabilities. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 1990,(1):189～205
5 Andersen K A. Characterizing consistency in probabilistic logic for a class of Horn clauses. Mathematical Programming, 1994,(66):257～271
6 Andersen K A, Hooker J N. Bayesian logic. Decision support systems, 1994,(11):191～210
7 Alan M. Frisch and peter haddawy, anytime deduction for probabilistic logic. Artificial Intelligence, 1994,69(1):93～122

The Completeness of the Super-tree-like Decomposition Model for Probabilistic Logic

ZHANG Chen-dong　CHEN Huo-wang　WANG Bing-shan

(*Department of Computer Science　Changsha Institute of Technology　Changsha*　410073)

XU Guang

(*Airforce Command College　Beijing*　100081)

Abstract　In order to reduce the complexity in the calculation model of Nilsson's probabilistic logic, the authors presented a new approach with the super-tree-like decomposition model in this paper, and proved the completeness theorem of the given method.

Key words　Probabilistic logic, reasoning in uncertainty, decomposition algorithm.