基于极大极小准则的 Hopfield 联想记忆学习算法*

梁学斌 吴立德

(复旦大学计算机科学系 上海 200433)

摘要 基于联想记忆各记忆模式的吸引域之间应保持大小平衡的思想,提出了设计 Hopfield 联想记忆网络的极大极小准则,即设计出的对称连接权阵应使得网络最小的记忆模式吸引域达到最大.首先提出了一种快速学习算法;再发展了一个启发性迭代学习算法,称为约束感知器优化学习算法.大量实验结果表明了本文学习算法的优越性.

关键词 联想记忆,极大极小准则,快速学习算法,约束感知器优化学习算法.

联想记忆是人工反馈神经网络[1]的一个重要的应用领域.联想记忆神经网络的性能主要是由具体的学习算法来决定.至今已提出不少学习算法.[2~8]文献[2]提出3条设计准则:(1)训练模式都是网络的稳定吸引子;(2)控制各训练模式的吸引域;(3)网络的伪状态,即不是训练模式的稳定吸引子应最少.准则(2)和(3)共同的目标是提高记忆模式的吸引域大小.一般来说,不大可能保证各记忆模式的吸引域都能达到最大,故必须控制各记忆模式的吸引域大小,应没有太大或太小的吸引域.[9]基于此,我们提出极大极小设计准则,即设计出的对称连接权阵应使得网络最小的记忆模式吸引域达到最大.这是一个不可微优化问题.在网络联想容错性的分析结果和极大极小准则的基础上,首先提出了一种快速学习算法;再进一步发展了一个启发性迭代学习算法,称为约束感知器优化学习算法,它以快速学习算法的结果作为连接权阵的迭代初值.大量实验结果表明了所提学习算法的优越性.

1 稳定吸引子和联想容错性分析

设网络状态 $V=(V_1,\ldots,V_N)^t$,其中 V_i 为1或$-1(i=1,2,\ldots,N)$.网络连接权阵 $W=(W_{ij})N\times N$ 是一个具零对角的实对称阵.Hopfield 神经网络模型可表述为[1]:

$$V_i'=sgn(\sum_{j=1}^{N}W_{ij}V_j),i=1,2,\ldots,N. \quad (1)$$

其中 $V'=(V_1',\ldots,V_N')^t$ 表示下一时刻的的状态向量,非线性函数 $sgn(x)$ 定义为当 $x\geqslant0$

* 本文研究得到国家攀登计划和国家自然科学基金资助.作者梁学斌,1967年生,讲师,主要研究领域为神经网络,计算机视觉.吴立德,1937年生,教授,主要研究领域为计算机视觉,计算语言学.

本文通讯联系人:吴立德,上海 200433,复旦大学计算机科学系

本文 1995-07-07 收到修改稿

时为 1,而当 $x<0$ 时为 -1.

设有 M 个不同训练模式,即 $X^1,X^2,\ldots,X^M$,其中 $X^u=(X_1^u,\ldots,X_N^u)^t$,$u=1,2,\ldots,M$. 它们成为系统(1)的稳定吸引子等价于对所有 $u=1,2,\ldots,M$,都成立

$$X_i^u=sgn(\sum_{j=1}^{N}W_{ij}X_j^u),\ i=1,2,\ldots,N. \tag{2}$$

Hopfield 网络的连接权阵可由 Hebb 学习准则[3]确定,即

$$W_{ij}=\begin{cases}\sum_{u=1}^{M}X_i^uX_j^u,\ i\neq j\\ 0,\ i=j.\end{cases} \tag{3}$$

定理 1. M 个不同训练模式 $X^1,X^2,\ldots,X^M$ 成为系统(1)的稳定吸引子的充分条件是对所有 $u=1,2,\ldots,M$,都成立

$$F_i^u=\sum_{j=1}^{n}(X_i^uX_j^u)w_{ij}>0,i=1,2,\ldots,N. \tag{4}$$

定理 2. 设 $X^u,u\in\{1,2,\ldots,M\}$ 是系统(1)的一个记忆模式,X 是一个畸变模式,$H(X,X^u)$ 表示 X 和 X^u 之间的 Hamming 距离. 若 $H(X,X^u)<F_i^u/(2W_{mi})$,$i\in\{1,2,\ldots,N\}$,则 X 一步迭代联想出 X_i^u,其中 $W_{mi}=\max\limits_{1\leq j\leq N}|W_{ij}|$.

证明:即要证 $X_i'=X_i^u$. 该等式成立的一个充分条件是

$$\sum_{j=1}^{N}(X_i^uX_j)W_{ij}>0. \tag{5}$$

注意到
$$\sum_{j=1}^{N}(X_i^uX_j)W_{ij}=\sum_{j=1}^{N}(X_i^uX_j^u)W_{ij}+\sum_{j=1}^{N}(X_j-X_j^u)W_{ij}. \tag{6}$$

由于
$$\sum_{j=1}^{N}X_i^u(X_j-X_j^u)W_{ij}\geq-2H(X,X^u)W_{mi},$$
故由等式(6)得

$$\sum_{j=1}^{N}(X_i^uX_j)W_{ij}\geq F_i^u-2H(X,X^u)W_{mi}>0.$$

从而不等式(5)成立.□

为了简洁,且不影响结论的实质,文后均假定对于所有 $i=1,2,\ldots,N$,$W_{ij}(j=1,2,\ldots,N)$ 不全为零,且 $W_{mi}=1$,$i=1,2,\ldots,N$. 这样,F_i^u 值越大,则 X^u 的第 i 个分量的联想容错性就越强.[6,10]显然,$F_i^u(i=1,2,\ldots,N;u=1,2,\ldots,M)$ 的值可反映学习算法的存储和容错能力.

令
$$F^u=\min_{1\leq i\leq N}F_i^u,\ u=1,2,\ldots,M. \tag{7}$$

推论 1. 设 $X^u,u\in\{1,2,\ldots,M\}$ 是系统(1)的一个记忆模式,X 是一个畸变模式. 若 $H(X,X^u)<F^u/2$,则 X 一步迭代联想出 X^u.

2 极大极小设计准则和两个学习算法

设
$$F=\min_{1\leq u\leq M}F^u. \tag{8}$$

由推论 1,$F^u/2$ 是记忆模式 X^u 的吸引域半径的一个下界,则 $F/2$ 是最小的记忆模式吸引域的半径的一个下界.

极大极小设计准则就是设计出的对称连接权阵应使得网络最小的记忆模式吸引域达到最大.它可表示为下列有约束不可微优化问题：

$$W^* = \operatorname{argmax}(F) = \operatorname{argmax} \min_{1\le u\le M} F^u,$$

即

$$W^* = \operatorname{argmax} \min_{1\le u\le M} \min_{1\le i\le N} F_i^u \tag{9}$$

其中 argmax 的约束条件是：$W_{ij}=W_{ji}, W_{ii}=0$，且 $|W_{ij}|\le 1, i,j=1,2,\dots,N$.

将(9)式中的 $W_{ij}(i>j, i,j=1,2,\dots,N)$ 都换成 W_{ji}，$W_{ii}(i=1,2,\dots,N)$ 都换成 0，则这个有约束不可微优化问题含有 $N(N-1)/2$ 个自由变量，即 $W_{ij}, i<j, i,j=1,2,\dots,N$，而 argmax 的约束条件是 $|W_{ij}|\le 1, i<j, i,j=1,2,\dots,N$. 因此，有约束不可微优化问题(9)等价于下列线性规划问题：

$$(P) \qquad \max(z) \tag{10}$$

并带有约束条件：

$$(C1) \qquad F_i^u \ge z, i=1,2,\dots,N; u=1,2,\dots,M; \tag{11}$$

$$(C2) \qquad |W_{ij}|\le 1, i<j; i,j=1,2,\dots,N. \tag{12}$$

线性规划问题(10)－(12)可以用单纯形方法来求解. 由于单纯形方法相对较复杂，特别是在 N 和 M 都较大时，本节则是要发展更有效的简单方法. 现对(9)式作分析：

$$\max_{(C2)} \min_{1\le u\le M} \min_{1\le i\le N} F_i^u = \max_{(C2)} \min_{1\le i\le N} \min_{1\le u\le M} F_i^u = \min_{1\le i\le N} \max_{(C3)} \min_{1\le u\le M} F_i^u, \tag{13}$$

其中第 2 个等号利用了 F_i^u 只与 $W_{ij}(j=1,2,\dots,N)$ 有关的事实，$\max\limits_{(C2)}$和 $\max\limits_{(C3)}$分别表示在约束$(C2)$和$(C3)$下求最大值，$(C3)$定义为

$$(C3) \qquad |W_{ij}|\le 1, j=1,2,\dots,N; j\ne i. \tag{14}$$

由于 $\min(a+b)\ge\min(a)+\min(b)$（其中 a 和 b 是变量），故由(13)式得

$$\max_{(C2)} \min_{1\le u\le M} \min_{1\le i\le N} F_i^u \ge \min_{1\le i\le N} \max_{(C3)} \sum_{j=1}^{N} \min_{1\le u\le M} (X_i^u X_j^u) W_{ij}. \tag{15}$$

易知约束优化问题

$$\max_{(C3)} \sum_{j=1}^{N} \min_{1\le u\le M} (X_i^u X_j^u) W_{ij} \tag{16}$$

的解是

$$W_{ij} = \begin{cases} 1, \text{若 } X_i^u X_j^u = 1, u=1,2,\dots,M, \text{且 } j\ne i \\ -1, \text{若 } X_i^u X_j^u = -1, u=1,2,\dots,M, \text{且 } j\ne i \\ 0, \text{其它情形}. \end{cases} \tag{17}$$

下面再进一步发展一个启发性迭代学习算法，称为约束感知器优化学习算法，它以快速学习算法的结果作为连接权阵的迭代初值，并且只对初值为零的非对角权元素进行优化迭代，因为初值为－1 或 1 的非对角权元素已经是最优选择.

设 f 是线性规划问题(10)～(12)的解，由定理 1，为保证所有训练模式都是系统(1)的稳定吸引子，应要求 $f>0$，故一定有 $f\in(0,N]$. 此时，线性规划问题(10)～(12)等价于在约束条件

$$(C4) \qquad |W_{ij}|\le 1, i<j; i,j=1,2,\dots,N; \tag{18}$$

下求解线性不等式组　$F_i^u \ge f, i=1,2,\dots,N; u=1,2,\dots,M.$　(19)

在无约束条件下求解线性不等式组(19)可用具有收敛性的感知器算法.[11]设训练模式

的学习序列是 $X^1,X^2,...,X^M,...,X^1,X^2,...,X^M,...$，即是一个循环学习序列. 感知器算法按此循环顺序接受训练模式 $X^u,u\in\{1,2,...,M\}$，且按下列规则来修改连接权：对于 $i=1,2,...,N$，有

$$W_{ij}(t+1)=\begin{cases}W_{ij}(t), & 若\ F_i^u\geq f\\ W_{ij}(t)+qX_i^uX_j^u, & 若\ F_i^u<f, 且\ i<j,\end{cases} \tag{20}$$

其中 t 是算法迭代次数，$q>0$ 是任意正数，且 W_{ij} 的迭代初值可以任意选定.

为使得每个训练模式具有一定大小的吸引域，可在感知器算法(20)中启发性地加入约束条件(C4). 由于 f 是所求的，是事先不知道的，我们采用文献[8]的让 f 逐级递增的方法，直到迭代算法无法收敛. 约束感知器优化学习算法可总结如下：

(1)初始化：$W_{ij}(0)(i<j;i,j=1,2,...,N)$ 由快速学习算法(17)确定，$f(0)=1$，并选取学习因子 q 和迭代次数 δ；

(2)学习：设从循环学习序列 $X^1,X^2,...,X^M,...,X^1,X^2,...,X^M,...$ 接受到训练模式 $X^u,u\in\{1,2,...,M\}$，则对于 $i=1,2,...,N$，按下式来修改 $W_{ij}(t)(j>i;j=1,2,...,N)$：

$$W_{ij}(t+1)=\begin{cases}W_{ij}(t), & 若\ F_i^u\geq f\\ \Phi(W_{ij}(t)+qX_i^uX_j^u), & 若\ F_i^u<f, W_{ij}(0)=0.\end{cases} \tag{21}$$

其中函数 $\Phi(x)$ 定义为当 $x>1$ 时为 1，当 $x<-1$ 时为 -1，否则为 x. 每完成一个循环序列 $\{X^1,X^2,...,X^M\}$，就称为迭代一次；

(3)判断：若算法(21)收敛，即 $F_i^u\geq f(i=1,2,...,N;u=1,2,...,M)$ 时的迭代次数小于 δ，则 $f=f+1$，转移至步骤(2)；若算法(21)迭代次数超过 δ 后仍不收敛，则 W_{ij} 返回算法(21)式迭代之前的值.

3 计算机实验结果

实验中取 $q=1/N,\delta=40$. 设

$$Fmax=\max_{1\leq i\leq N}\max_{1\leq u\leq M}F_i^u, \tag{22}$$

$$Fmin=\min_{1\leq i\leq N}\min_{1\leq u\leq M}F_i^u, \tag{23}$$

$$Fave=(\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}F_i^u)/(MN), \tag{24}$$

$$Fsd=[\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}(F_i^u-Fave)^2/(MN)]^{1/2}. \tag{25}$$

若 $Fmin>0$，则所有 M 个训练模式都成为系统(1)的记忆模式. $Fmin/2$ 就是最小的记忆模式吸引域的半径的一个下界. 由定理 2 可知，$Fmax$，$Fmin$ 和 $Fave$ 可用作统计量来定量客观地评价 Hopfield 联想记忆学习算法的联想容错能力. $Fmax$，$Fmin$ 和 $Fave$ 越大，则说明算法的联想容错能力越强. Fsd 反映 F_i^u 对于 $Fave$ 的偏离程度.

第 1 组实验的训练模式集是“飞机”、“坦克”和“直升机”，如图 1 所示. 表 1 是 3 种学习算法的联想容错能力的比较. 快速学习算法的 $Fmax$ 和 $Fave$ 比文献[8]的优化学习算法分别要高出 2 倍和 1 倍多，但 $Fmin$ 要小 1 倍多. 可以看出，将快速学习算法的结果作为本文优化学习算法迭代的初始值可大大提高算法的联想容错能力.

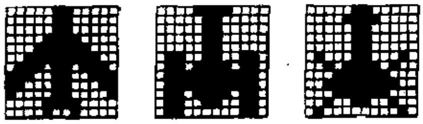

图 1 训练模式集

表1　3种算法的联想容错能力比较

	$Fmax$	$Fmin$	$Fave$	Fsd
快速算法	77	9	55.56	25.25
文献[8]优化算法	23.48	22.10	22.83	0.34
本文优化算法	80.40	22.10	58.66	22.30

第2组实验的训练模式集是英文字母“A”～“H”，如图2所示. 对于8组训练模式集$\{A\}$，$\{A,B\}$，$\{A,B,C\}$，$\{A,B,C,D\}$，$\{A,B,C,D,E\}$，$\{A,B,C,D,E,F\}$，$\{A,B,C,D,E,F,G\}$和$\{A,B,C,D,E,F,G,H\}$分别用本文优化学习算法和文献[8]的优化学习算法进行学习. 表2是两种优化学习算法的联想容错能力的比较，其中M表示上述8组训练模式集分别所含的模式个数. 由表2可知，从$M=2$开始，本文优化学习算法比文献[8]的优化学习算法具有更强的联想容错能力.

图 2 训练模式集

表2 2种优化算法的联想容错能力比较

M	1	2	3	4	5	6	7	8
$Fmax$(本文)	99	56.00	48.56	39.05	34.88	34.72	32.18	29.00
$Fmax$(文献[8])	99	42.56	34.63	14.70	14.83	14.83	14.41	17.88
$Fmin$(本文)	99	42.00	32.00	13.03	13.00	12.02	10.01	10.02
$Fmin$(文献[8])	99	42.00	32.03	13.04	13.08	11.00	10.01	10.01
$Fave$(本文)	99	49.98	38.91	24.11	20.58	20.02	17.44	15.80
$Fave$(文献[8])	99	42.32	32.77	13.75	13.81	11.86	10.94	11.00
Fsd(本文)	0	6.39	7.09	11.10	9.70	10.13	9.83	7.91
Fsd(文献[8])	0	0.28	0.60	0.34	0.39	0.51	0.58	0.82

参考文献

1 Hopfield J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. Proc. Natl. Acad. Sci., U.S.A., 1982, **79(4)**: 2554～2558.

2 Michel A N, Farrell J A. Associative memories via artificial neural networks. IEEE Contr. Syst. Mag., 1990, **10(4)**: 6～17.

3 Hebb D O. The organization of behavior. New York: Wiley, 1949.

4 Personnaz L, Guyon I, Dreyfus G. Collective computational properties of neural networks: new learning mechanisms. Phys. Rev. A, 1986, **34(5)**: 4217～4228.

5 Gardner E. The space of interactions in neural network models. J. Phys. A: Math. Gen., 1988, **21**: 257～270.

6 Krauth W, Mezard M. Learning algorithms with optimal stability in neural networks. J. Phys. A: Math. Gen., 1987, **20**: 745～752.

7 Hassoun M H, Youssef A M. High performance recording algorithm for Hopfield model associative memories. Optical Eng., 1989, 28(1): 46~54.

8 Wang T. Learning of the Hopfield associative memory by global minimization. Int. J. Pattern Recog. Artif. Intell., 1994, 8(1): 373~390.

9 Atiya A, Abu-Mostafa Y S. An analog feedback associative memory. IEEE Trans. Neural Network, 1993, 4: 117~126.

10 Abbott L F, Kepler T B. Optimal learning in neural network memories. J. Phys. A: Math. Gen., 1989, 22: 711~717.

11 Tou J T, Gonzalez R C. Pattern recognition principles. Massachusetts: Addison-Wesley, 1977. 165~168.

TWO LEARNING ALGORITHMS OF HOPFIELD ASSOCIATIVE MEMORY BASED ON MINIMAX CRITERION

Liang Xuebin Wu Lide

(*Department of Computer Science Fudan University Shanghai* 200433)

Abstract Based on the idea that the domains of attraction of all memorized patterns must possess balanced shape, a minimax criterion for design of Hopfield associative memory, which requires the smallest domain of attraction to be maximized, is proposed in this paper. A quick learning algorithm is first given, and furtherly, a constrained perception optimization algorithm is developed. A large number of simulation results confirm advantages of these algorithms given in this paper over existing ones.

Key words Associative memory, minimax criterion, quick learning algorithm, constrained perception optimization algorithm.