第7卷 增刊　软件学报 JOURNAL OF SOFTWARE　Vol.7, Supplement

布尔算子 Fuzzy 逻辑中的锁归结原理*

邓安生　刘叙华

(吉林大学计算机科学系　吉林　130023)

摘要　本文将一阶逻辑中的锁归结方法和广义锁归结方法推广到布尔算子 Fuzzy 逻辑中，并且证明了布尔算子 Fuzzy 逻辑中的锁归结方法和一种特殊的广义锁归结方法是广义完备的.

关键词　布尔算子 Fuzzy 逻辑，恒假水平，二值解释，锁归结，广义锁归结.

R. S. Boyer 的锁归结方法[1]通过对子句集中的原子进行配锁限制某些子句间的归结以减少无用子句的产生，是对 Robinson 归结方法的一个有力的改进. 文献[2]将锁归结原理推广到广义子句集. 一般地，在一阶逻辑中，锁归结方法是完备的，一种特殊的广义锁归结方法(相同谓词符号配以相同锁)是完备的，而一般的广义锁归结方法甚至在命题逻辑中都不完备.[3]

文献[4]将一阶逻辑中公式的真值取值范围扩展成一个布尔代数，从而建立了布尔算子 Fuzzy 逻辑 BOFL(Bodean operator Fuzzy logic)，同时将归结原理简洁自然地引入 BOFL. 一般地，对于 BOFL 中任意给定的公式 G，可以将 G 转化成形如 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_m,\lambda_{m+1}\vee C_1,\cdots,\lambda_{m+n}\vee C_n\}$ 的子句集 S，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{m+n}$ 是 Fuzzy 算子，而 $C_1,\cdots,C_n$ 是不含有 Fuzzy 算子的普通形式的子句，则对于任意的 Fuzzy 算子 λ，公式 G 是 λ-恒假的当且仅当子句集 S 是 λ-恒假的. 于是，在将归结原理用于子句集 S 时，有下述结论成立：

(1) BOFL 中的归结是有效的，即如果从 S 可以归结出 Fuzzy 算子 λ，则 S 是 λ-恒假的.

(2) BOFL 中的归结是广义完备的，即如果 S 是 λ-恒假的而 $\lambda<1$，则可以从 S 归结出有限个 Fuzzy 算子 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，使得 $\inf\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}\leqslant\lambda$.

随后，我们将一阶逻辑中的广义归结方法推广到 BOFL 中. BOFL 中的广义归结方法不仅是有效的，而且是广义完备的.

本文将一阶逻辑中的锁归结方法和广义锁归结方法推广到 BOFL 中，证明了 BOFL 中的锁归结方法和一种特殊的广义锁归结方法(相同谓词符号配相同锁)是广义完备的.

1　恒假水平和二值解释

以下我们总是假定$(B,\oplus,*,',0,1)$是完全布尔代数，其中$\oplus$、$*$和$'$分别是 B 上的上确

---

* 本文研究得到国家自然科学基金、国家 863 高科技和国家"攀登计划"项目资助. 作者邓安生，1963 年生，副教授，主要研究领域为计算机自动推理. 刘叙华，1937 年生，教授，博士导师，主要研究领域为人工智能理论，计算机自动推理.

本文通讯联系人：邓安生，吉林 130023，吉林大学计算机科学系

本文 1995—04—28 收到修改稿

界、下确界和余运算，0 和 1 分别是其最小元和最大元，相应的部分序关系记为$\leqslant$，记 BOFL 是建立在布尔代数 B 上的布尔算子 Fuzzy 逻辑.

定义. 设 G 是 BOFL 的公式，G 的恒假水平 $\lambda_F(G)$是如下定义的 Fuzzy 算子：

(1) G 是 $\lambda_F(G)$-恒假的，即对 G 的任意解释 I，有 $T_I(G)\leqslant\lambda_F(G)$.

(2) 若 λ 是 Fuzzy 算子且 G 是 λ-恒假的，则 $\lambda_F(G)\leqslant\lambda$.

显然，对 BOFL 中的任意公式 G 均有

$$\lambda_F(G)=\sup\{T_I(G)\mid I\text{ 是 }G\text{ 的解释}\}.$$

类似于一阶逻辑[1]，在 BOFL 中，对于任意给定的公式 G，可以求得 G 的 Skolem 范式 S，并定义 S 的 Herbrand 域及其上的 Herbrand 解释，于是对 S 的任意解释 I，设 I^* 是对应于 I 的 Herbrand 解释，易证 $T_I(S)\leqslant T_{I^*}(S)$成立.[3]

定义. 设 S 是 BOFL 中的 Skolem 型的公式，S 的一个 Herbrand 解释 I 称为一个二值解释，如果 I 将 S 的原子集中的每个基原子或者指定成 0 或者指定成 1.

下述结论在 BOFL 中成立，在此略去其证明.

(1) 设 S 是公式 G 的 Skolem 范式，则 $\lambda_F(G)=\lambda_F(S)$.

(2) 设 S 是 Skolem 型的公式，则

$$\lambda_F(S)=\sup\{T_I(S)\mid I\text{ 是 }S\text{ 的二值解释}\}.$$

(3) 设 S 是 Skolem 型的公式，则存在 S 的有限基例集 S^*，使得 $\lambda_F(S)=\lambda_F(S^*)$.

2 BOFL 中的锁归结原理

设 S 是 Skolem 型的公式，则 S 对应一个形如

$$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_m,\lambda_{m+1}\vee C_1,\cdots,\lambda_{m+n}\vee C_n\}$$

的子句集，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{m+n}$是 Fuzzy 算子，而 $C_1,\cdots,C_n$ 是不含有 Fuzzy 算子的普通形式的子句. 显然 $\lambda_F(S)=\inf\{\lambda_1,\cdots,\lambda_m\}*\lambda_F(\{\lambda_{m+1}\vee C_1,\cdots,\lambda_{m+n}\vee C_n\})$.

因而不失一般性，以下仅考虑形如$\{\lambda_1\vee C_1,\cdots,\lambda_n\vee C_n\}$的子句集，其中 $C_1,\cdots,C_n$ 是至少包含一个文字的普通形式的子句.

定义. 设 $S=\{\lambda_1\vee C_1,\cdots,\lambda_n\vee C_n\}$是子句集，若 S 中的每个原子都标以一个整数，则称 S 是锁子句集.

定义. 设 $C_1=\lambda_1\vee C_1^*$，$C_1=\lambda_2\vee C_2^*$ 是 2 个锁子句，改名使其无公共变量. 若 $R(C_1^*,C_2^*)$ 是 C_1^* 和 C_2^* 在一阶逻辑中的锁归结式，则子句$(\lambda_1\oplus\lambda_2)\vee R(C_1^*,C_2^*)$称为子句 C_1 和 C_2 在 BOFL 中的锁归结式.

定理 1. 设 S 是锁基子句集，若 $\lambda_F(G)<1$，则使用锁归结可以从 S 推出有限个 Fuzzy 算子 $\lambda_1^*,\cdots,\lambda_m^*$，使得 $\lambda_F(S)=\inf\{\lambda_1^*,\cdots,\lambda_m^*\}$.

证明：设 $S=\{\lambda_1\vee C_1,\cdots,\lambda_n\vee C_n\}$，记 $S_C=\{C_1,\cdots,C_n\}$是普通形式的子句集，由于 $\lambda_F(S)<1$，因而 S_C 在一阶逻辑中必是恒假的，否则取使 $T_I(S_C)=1$ 的二值解释 I，则在 I 下有 $T_I(S)=1$，矛盾.

将 S_C 中的每个子句扩展成关于 S_C 中原子的极大项，易知 S 可以等价地写成下述形式：

$$S=\{\tau_1\vee D_1,\cdots,\tau_k\vee D_k\}$$

其中 τ_i 是 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ 中一些 Fuzzy 算子的下确界，因而不妨记为 $\inf T_i$，这里 T_i 是 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ 的非空子集，$D_1,\cdots,D_k$ 是关于 S 中出现的基文字的所有互异的极大项.

首先，由于 $\{D_1,\cdots,D_k\}$ 在一阶逻辑中是极小的恒假子句集，故必有 $\lambda_F(S)=\sup\{\tau_1,\cdots,\tau_k\}$. 事实上，

(1) 由于 $\{D_1,\cdots,D_k\}$ 在一阶逻辑中恒假，故对 S 的任意二值解释 I，不妨设 $T_I(D_i)=0$，则有 $T_I(S)\leqslant\tau_i\leqslant\sup\{\tau_1,\cdots,\tau_k\}$，于是 $\lambda_F(S)\leqslant\sup\{\tau_1,\cdots,\tau_k\}$.

(2) 由于 $\{D_1,\cdots,D_k\}$ 在一阶逻辑中是极小的恒假子句集，所以对于任意的 τ_i，$i=1,\cdots,k$，取使 $T_I(\{D_1,\cdots,D_k\}-\{D_i\})=1$ 的二值解释 I，则有 $T_I(S)\geqslant\tau_i$，于是 $\lambda_F(S)\geqslant\sup\{\tau_1,\cdots,\tau_k\}$.

综合(1)、(2)，有 $\lambda_F(S)=\sup\{\tau_1,\cdots,\tau_k\}$.

其次，对于 $\tau_i=\inf T_i$，易证 $\lambda_j\in T_i$ 当且仅当 $C_j\subseteq D_i$. 因而对任意的 $\lambda_i^T\in T_i$（其中 $i=1,\cdots,k$），不妨设 $\{\lambda_1^T,\cdots,\lambda_k^T\}=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_j\}$，则 $\{C_1,\cdots,C_j\}$ 在一阶逻辑中必是恒假的. 根据锁归结在一阶逻辑中的完备性可知，在 BOFL 中相应地使用锁归结可以从 $\{\lambda_1\vee C_1,\cdots,\lambda_j\vee C_j\}$ 中推出某个 Fuzzy 算子 λ^*，使得 $\lambda^*\leqslant\lambda_1^T\oplus\cdots\oplus\lambda_k^T$. 注意到

$$\begin{aligned}\lambda_F(S)&=\inf T_1\oplus\cdots\oplus\inf T_k\\&=\inf\{\lambda_1^T\oplus\cdots\oplus\lambda_k^T\mid\lambda_i^T\in T_i,i=1,\cdots,k\}\end{aligned}$$

且集合 $\{\lambda_1^T\oplus\cdots\oplus\lambda_k^T\mid\lambda_i^T\in T_i,i=1,\cdots,k\}$ 是有限的，故必可以从 S 使用锁归结推出有限个 Fuzzy 算子 $\lambda_1^*,\cdots,\lambda_m^*$，使得

$$\inf\{\lambda_1^*,\cdots,\lambda_m^*\}\leqslant\inf\{\lambda_1^T\oplus\cdots\oplus\lambda_k^T\mid\lambda_i^T\in T_i,i=1,\cdots,k\}$$

即 $\inf\{\lambda_1^*,\cdots,\lambda_m^*\}\leqslant\lambda_F(S)$，而由 BOFL 中归结的有效性可知 $\lambda_F(S)\leqslant\inf\{\lambda_1^*,\cdots,\lambda_m^*\}$，所以有 $\lambda_F(S)=\inf\{\lambda_1^*,\cdots,\lambda_m^*\}$.

综上，定理成立. □

由于替换对 Fuzzy 算子和原子所配的锁不产生作用，因而下述提升引理是显然的.

引理 1（提升引理）. 设 C_1^*,C_2^* 分别是锁子句 C_1,C_2 的基例，$R(C_1^*,C_2^*)$ 是 C_1^*,C_2^* 的锁归结式，则存在 C_1,C_2 的锁归结式 $R(C_1,C_2)$，使得 $R(C_1^*,C_2^*)$ 是 $R(C_1,C_2)$ 的基例.

证明：参见文献[3]，略去. □

定理 2. 设 S 是锁子句集，若 $\lambda_F(G)<1$，则使用锁归结可以从 S 推出有限个 Fuzzy 算子 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，使得 $\lambda_F(S)=\inf\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$.

证明：设 S^* 是 S 的有限的基例集满足 $\lambda_F(S^*)=\lambda_F(S)$，由定理 1，使用锁归结演绎可以从 S^* 推出有限个 Fuzzy 算子 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，使得 $\lambda_F(S^*)=\inf\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$. 再由提升引理，使用锁归结演绎从 S 也可以推出 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，于是 $\lambda_F(S)=\inf\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$. 因而定理成立. □

3 BOFL 中的广义锁归结原理

定义. 在 BOFL 中形如 $(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)M(x_1,\cdots,x_n)$ 的公式称为广义子句，其中 $M(x_1,\cdots,x_n)$ 不含有量词，特别地，当其中的每个原子都标以一个整数时，则称为广义锁子句.

由于广义锁子句中的变量符号均受全称量词的约束，因而以下我们略去广义锁子句首标中的量词.

不含有原子的广义子句称为广义常子句，特别地，当其值为 λ 时，不妨就称这个广义常子句为 λ. 对于广义子句 Φ，当我们特别注意 Φ 中的某些原子 $A_1,\cdots,A_n$ 时，可以将 Φ 写成 $\Phi(A_1,\cdots,A_n)$，用 $\Phi(A=\lambda)$ 表示以 λ 代替 Φ 中所有 A 的出现所得到的结果. 我们规定：广义锁子句 Φ 中的原子 A 代以 Fuzzy 算子 λ 时，原子 A 的锁自动消失.

定义. 设 Φ 和 Ψ 是两个广义锁子句，改名使其无公共变量，设 Φ^σ 是合一 $A_1,\cdots,A_m$ 所得到的 Φ 的锁因子，Ψ^τ 是合一 $B_1,\cdots,B_n$ 所得到的 Ψ 的锁因子，设 ρ 是 A_1^σ 和 B_1^τ 的 mgu，若 A_1 和 B_1 分别是 Φ 和 Ψ 中有最小锁的原子，则

$$\Phi^{\sigma\rho}(A_1^{\sigma\rho}=0)\vee\Psi^{\tau\rho}(B_1^{\tau\rho}=1)$$

$$\Phi^{\sigma\rho}(A_1^{\sigma\rho}=1)\vee\Psi^{\tau\rho}(B_1^{\tau\rho}=0)$$

都称为 Φ 与 Ψ 的广义锁归结式，其中 A_1,B_1 分别称为 Φ 和 Ψ 的归结原子.

定理 3. 设 S 是广义锁基子句集，且相同的谓词符号配相同锁，则使用广义锁归结可以从 S 推出有限个 Fuzzy 算子 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，使得 $\lambda_F(S)=\inf\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$.

证明：对 S 的原子集 M 中所含有原子数 $|M|$ 作为归纳法.

当 $|M|=0$ 时定理显然成立. 设 $|M|=k$ 时定理成立，当 $|M|=k+1$ 时：

在 M 中取有最小锁的基原子 A，将 S 分成 2 部分：S_1 和 S_2，其中 S_1 由所有包含 A 的广义子句组成，$S_2=S-S_1$. 记 $S_1=\{\Phi_1,\cdots,\Phi_m\}$，以 A 为归结原子，令

$$S^*=\{\Phi\text{ 与 }\Psi\text{ 的广义锁归结式}\,|\,\Phi,\Psi\in S_1\}\cup S_2,$$

考虑到
$$(\Phi_1(A=0)\wedge\cdots\wedge\Phi_m(A=0))\vee(\Phi_1(A=1)\wedge\cdots\wedge\Phi_m(A=1))$$
$$=\{\Phi\text{ 与 }\Psi\text{ 的广义锁归结式}\,|\,\Phi,\Psi\in S_1,A\text{ 为归结原子}\},$$

于是有
$$\begin{aligned}\lambda_F(S)&=\sup\{T_I(S)\,|\,I\text{ 是 }G\text{ 的二值解释}\}\\&=\lambda_F(((\Phi_1(A=0)\wedge\cdots\wedge\Phi_m(A=0))\vee(\Phi_1(A=1)\wedge\cdots\wedge\Phi_m(A=1)))\wedge S_2)\\&=\lambda_F(S^*).\end{aligned}$$

根据归纳假设，使用广义锁归结从 S^* 可以推出有限个 Fuzzy 算子 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，使得 $\lambda_F(S^*)=\inf\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$. 由于 A 是 S 中具有最小锁的原子，因而由 S^* 的构造可知，使用广义锁归结也可以从 S 推出 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，且有 $\lambda_F(S)=\inf\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$.

综上，定理成立. □

下述提升引理显然成立：

引理 2. 设 Φ^*,Ψ^* 分别是广义锁子句 Φ 和 Ψ 的基例；$R(\Phi^*,\Psi^*)$ 是 Φ^* 和 Ψ^* 的广义锁归结式，则存在 Φ 和 Ψ 的广义锁归结式 $R(\Phi,\Psi)$，使得 $R(\Phi^*,\Psi^*)$ 是 $R(\Phi,\Psi)$ 的基例.

证明：参见文献[3]，略去. □

类似于定理 2，有

定理 4. 设 S 是广义锁子句集，且相同的谓词符号配以相同锁，则使广义锁归结可以从 S 推出有限个 Fuzzy 算子 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，使得 $\lambda_F(S)=\inf\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$.

证明：略去. □

应该指出，由于广义锁归结方法允许广义锁子句本身进行自归结，因而在定理 4 中无需限制 $\lambda_F(S)<1$.

4 进一步讨论

如上所述，锁策略的基本思想是通过对子句集中的原子进行配锁限制子句间的归结，从而提高归结方法的效率，所以，怎样合理地为子句集中的原子进行配锁是值得研究的．一般来说，子句集中各原子的锁越分散，锁策略的效用就越高，反之，子句集中各原子的锁越集中，锁策略的效用就越低．特别地，当所有原子均配相同锁时将完全无助于效率的提高．但是，对于子句集中各原子配锁的过份分散也带来一些缺点，例如在一阶逻辑中，对于常义的子句集，可以用任意的方式对子句集中的原子配锁而不影响锁策略的完备性，但与删除策略不相容（不难证明，当相同的谓词符号配以相同的锁时锁归结法与删除策略相结合是完备的）；对于广义的子句集，一般的广义锁归结方法甚至在命题逻辑中都不是完备的．

参考文献

1 Chang C L, Lee R C T. Symbolic logic and mechanical theorem proving. New York: Academic Press, 1973.
2 王湘浩，刘叙华．广义归结．计算机学报，1982，5(2)：81～92．
3 刘叙华．基于归结方法的自动推理．北京：科学出版社，1994．
4 刘叙华，邓安生．Boole 算子 Fuzzy 逻辑．中国科学(A 辑)，1994，24(6)：637～644．

LOCK RESOLUTION IN BOOLEAN OPERATOR FUZZY LOGIC

Deng Ansheng　Liu Xuhua

(*Department of Computer Science　Jilin University　Changchun*　130023)

Abstract　This paper spreads the lock resolution and the generalized lock resolution in the first-order logic to the BOFL (Boolean operator Fuzzy logic). It is shown that the lock resolution and a special generalized lock resolution in BOFL are complete in the broad sense.

Key words　Boolean operator Fuzzy logic, false-level, two-value interpretation, lock resolution, generalized lock resolution.