第7卷第10期
1996年10月

软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol.7,No.10
Oct. 1996

关于约束底盘装载问题的一种启发式方法*

王金敏 陈东祥 查建中 王爱虎 章节笑

（天津大学机械系 天津 300072）

摘要 已研究多年的底盘装载问题属于NP完备问题，关于它的解决方法多为启发式方法.本文讨论了约束底盘装载问题，并提出了一种基于计算机的启发式方法.实例表明，该方法能较好地解决约束底盘装载问题.

关键词 约束，底盘装载，NP完备问题，启发式方法，构造法，改进法.

底盘装载问题广泛存在于工业生产和交通运输中，如集装箱的存放与运输、集成电路的布置与设计及板材加工等.所谓底盘装载问题是指将一些大小相同的长方体箱子放入一长方体容器内，并且要求被放入箱子的数量尽可能的多.它属于组合优化问题，是布局问题的一种情况.[1]几十年来，许多学者和技术人员对此问题进行了深入的研究，并且取得了一些进展.[2~5]

在底盘装载问题中、由于箱子形状大小相同并且箱子的边平行于底盘的边.因此，底盘装载问题可化为二维问题，即将一些相同的小矩形块放入一个大矩形的问题.关于底盘装载问题有些学者提出了一些精确方法[2]，但所需计算时间是巨大的且仅对某些情况有效.底盘装载问题属于NP完备问题[1,2]，而解决NP完备问题较为有效的方法是启发式方法.

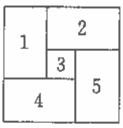


图1 底盘分区

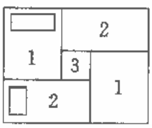


图2 三区底盘

Smith和De Cani[3]提出了将底盘分成4个区域（在每个区域箱子有相同的方向）的启发式方法.他们提出的方法虽然使问题获得较为满意的解，但需要检验大量的可能模式并且还存在某些缺点.Bischff和Dowsland[4]在分析了Smith－De Cani法的不足后，提出将底盘分成5个区域（在每个区域内箱子的方向保持一致）的方法，如图1所示.他们的方法是通过计算区域1、2、4、5的大小来决定区域3的大小，从而决定整个问题的解决.区域3的大小无法事先决定并且箱子在区域3的摆放位置也无法预见.该方法虽然克服了Smith－De Cani方法的缺点，但也需检验大量的可能模式，而且区域3如何处理也未论及.

---

* 本文研究得到国家自然科学基金资助.作者**王金敏**，1963年生，副教授，主要研究领域为计算机辅助设计，智能布局系统.**陈东祥**，1952年生，副教授，主要研究领域为计算机辅助设计.**查建中**，1947年生，教授，主要研究领域为现代设计及智能工程.**王爱虎**，1969年生，博士生，主要研究领域为智能布局系统.**章节笑**，女，1940年生，高级工程师，主要研究领域为智能工程.

本文通讯联系人：王金敏，天津300072，天津大学机械系

本文1995－08－14收到修改稿

传统的底盘装载问题强调的是最大限度地利用底盘的放置空间,但没有考虑其它约束情况,因而在实际使用时受到一些限制.

约束底盘装载问题是底盘装载问题的一种情况,它包括了一些实际的约束,如箱子重量的分布、底盘运输稳定性等约束.因此,对该问题进行研究具有很重要的实际意义.本文对约束底盘装载问题进行了研究,并提出了一种基于计算机的启发式方法.实例表明,该方法能较好地解决约束底盘装载问题.

1 模型及算法

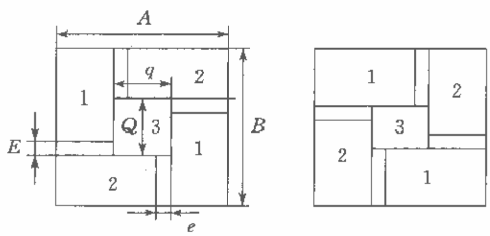
约束底盘装载问题的定义为:在一长方体容器(底盘)内,装载若干个形状大小相同、重量也相同的长方体箱子,要求装载的箱子尽可能的多并满足:

(1)所有箱子形成的总重心与容器(底盘)的重心(或中心)重合;

(2)容器(底盘)中间按要求留下一定的空间(区域),以备装载其他物体.

根据约束底盘装载问题的定义、为保证约束被满足,本文将底盘分成 3 个区域(如图 2 所示).这种模式既利于箱子堆的稳定性又保证了约束被满足.[6]

参考图 3,令 M,m 分别表示区域 1、2 上装载箱子(矩形块)的行的数目;n,N 分别表示区域 1、2 上装载箱子(矩形块)的列的数目.底盘的长度为 A,宽度为 $B(A\geqslant B)$;中间区域 3 的长度为 q,宽度为 Q. E,e 分别为底盘宽度、长度方向上未被区域 1、2 所占的剩余宽度和长度. a,b 分别为箱子(矩形块)的长度和宽度.显然有:



(a)　(b)

图3 底盘尺寸

$$\left.\begin{aligned}Mb+Na+E&=B\\ mb+na+e&=A\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

当 $Mb\geqslant Na$ 时,如图 3(a)所示,有

$$\left.\begin{aligned}Q+\triangle Q&=Mb-Na+E\\ q+\triangle q&=mb-na+e\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

当 $Mb<Na$ 时,如图 3(b)所示,有

$$\left.\begin{aligned}Q+\triangle Q&=Na-Mb+E\\ q+\triangle q&=na-mb+e\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

其中$\triangle Q,\triangle q$ 分别表示 Q,q 的容差,并且$\triangle Q\geqslant 0,\triangle q\geqslant 0$.

分别将(1)式代入式(2),(3)并整理得:

$$\left.\begin{aligned}\triangle Q&=B-Q-2Na\\ \triangle q&=A-q-2na\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}\triangle Q&=B-Q-2Mb\\ \triangle q&=A-q-2mb\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

约束底盘装载问题追求的是在满足各种约束的前提下,尽可能地多装载箱子也就是使底盘的无效空间尽量的小,因此,约束底盘装载问题的模型为:

$$\left.\begin{aligned}&\text{Max } S=Mn+Nm;\\&S.T.\\&Mb-Na\geqslant 0;\\&B-Mb-Na\geqslant 0;\\&A-mb-na\geqslant 0;\\&B-Q-2Na\geqslant 0;\\&A-q-2na\geqslant 0;\\&Na+(m+1)b-B\geqslant 0\\&na+(m+1)b-A\geqslant 0\\&M,N,m,n\text{ 为正整数;}\end{aligned}\right\}\ \mathrm{I}\quad\text{或}\quad\left.\begin{aligned}&\text{Max } S=Mn+Nm;\\&S.T.\\&Na-Mb>0;\\&B-Mb-Na\geqslant 0;\\&A-mb-na\geqslant 0;\\&B-Q-2Mb\geqslant 0;\\&A-q-2mb\geqslant 0;\\&Na+(m+1)b-B\geqslant 0\\&na+(m+1)b-A\geqslant 0\\&M,N,m,n\text{ 为正整数;}\end{aligned}\right\}\ \mathrm{II}$$

由上述模型可知，约束底盘装载问题为整数规划问题.模型(Ⅰ),(Ⅱ)中只有 M,N,m 和 n 为变量.

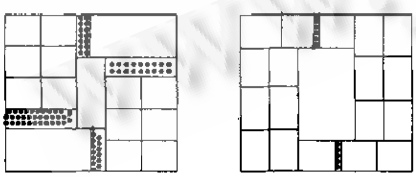
本文采用构造法与改进法的混合来解决约束底盘装载问题，即先利用构造法来寻找问题的一个可行解，然后利用改进法对其进行改进以获得一个改善的解.算法分为5步进行：

(1)首先假定 $\triangle Q=\triangle q=0$ 来确定 N,n 的上界 N_u 和 n_u，其中 $N_u=INT[(B-Q)/2a]$，$n_u=INT[(A-q)/2a]$；然后令 $N=N_u, n=n_u$；

(2)将 N,n 代入式(Ⅰ)从而使约束底盘装载问题化为两变量的整数线性规划问题.通过对模型中的约束条件进行分析可知，M 与 N 之间有一定的关系，m 与 n 之间也有一定的关系；利用此关系得：$M=INT((B-Na)/b)$，$m=INT((A-na)/b)$.然后检验约束条件 $(Mb-Na\geqslant 0)$ 是否满足；如果满足，则问题有解，转向步4；否则进行第3步；

(3)若 $N=n=0$，则问题无解，转向第5步；否则，令 $\triangle x=(Q+a)[q-bINT(q/b)]$，$\triangle y=(q+a)[Q-bINT(Q/b)]$，并比较 $\triangle x$，$\triangle y$ 的大小.如果 $\triangle x=\triangle y$，则令 $N=N-1$(或 $n=n-1$)；如果 $\triangle x>\triangle y$，则令 $N=N-1$，否则，$n=n-1$，返回第2步；

(4)如果 $E\leqslant(a-b)$(或 $e\leqslant(a-b)$)则转向步5；否则，对现有装载模式进行调整.调整的目的是在现有装载箱子数目不减少的情况下，尽量使中间区域的空间增大而 E(或 e)减小，如果有可能则增加装载箱子的数目.通过调整三区结构可能被打破，但并未违反约束，因此装载模式更加趋于合理.



(a) (b)

图4 调整形式

参考图4，令 M_1 为需调整的区域1行的数目，则有 $Mb\leqslant(M-M_1)b+M_1a\leqslant Mb+E$，故 $M_1=INT[E/(a-b)]$；那么可增加 $K_{11}=2M_1INT([n(a-b)+\triangle q/2]/b)$ 个箱子；调整的 M_1 行箱子及 K_{11} 个箱子与区域2中箱子方向相同；或增加 $K_{12}=2INT(M_1a/b)INT([n(a-b)+\triangle q/2]/a)$ 个箱子.令 $K_1=\text{Max}(K_{11},K_{12})$.如果不能增加箱子数目，则增加中间区域3的面积为 $S_1=2nM_1a(a-b)$.

同理，令 m_1 为需调整的区域2列的数目，则 $m_1=INT[e/(a-b)]$.可增加 $K_{21}=2m_1INT([N(a-b)+\triangle Q/2]/b)$ 或 $K_{22}=2INT(m_1a/b)INT([n(a-b)+\triangle Q/2]/a)$ 个箱子.令 $K_2=\text{Max}(K_{21},K_{22})$.调整的 m_1 列箱子及 K_2 个箱子与区域1中箱子方向相同.如果

调整不能增加箱子数目，则增加中间区域 3 的面积为 $S_2=2Nm_1a(a-b)$.

对于模型(Ⅱ)，$K_{11}=2INT[(M_1b+\triangle Q/2)/a]INT([n(a-b)+e]/b)$；

$K_{12}=2M_1INT([n(a-b)+e]/a)$；$S_1=2nM_1b(a-b)$；

$K_{21}=2INT[(m_1b+\triangle q/2)/a]INT([N(a-b)+E]/b)$；

$K_{22}=2m_1INT([N(a-b)+E]/a)$；$S_2=2Nm_1b(a-b)$.

经过调整后，在底盘上装载的箱子数目为 $K=2Mn+2Nm+K_1+K_2$.

(5)对模型(Ⅱ)进行类似的求解过程 1～4；其中

$$M_u=INT[(B-Q)/2b],m_u=INT[(A-q)/2b];$$

$$\triangle x=(Q+b)[q-aINT(q/a)],\triangle y=(q+b)(Q-aINT(Q/a)]$$

如果模型(Ⅰ)，(Ⅱ)皆有解，则取两者中装载箱子数目大的为最后解作为装载规划输出.

2　实例及结论

本文提出的方法既可处理约束底盘装载问题又可处理一般的底盘装载问题；此时仅需将 Q，q 置为零即可.

本文利用 Smith－De Cani 文中的数据($A=1060$，$B=813$，$a=(260\sim379)$，$b=(100\sim219)$)在 PC－286 微机上对算法进行了验证；箱子尺寸每次仅变化一个单位. 结果仅用 17s 就计算完上述 14 400 种情况，而用 Smith－De Cani 法却耗时 23 分种. 本算法共获得 2 620个理想解，比 Smith－De Cani 法多 590 个，提高理想最优率达 4.1%. 所谓理想解是指底盘的剩余面积小于一个箱子的面积时装载箱子的个数. 此外，利用本算法对 Q＝q＝300 的情况也进行了计算，其耗时 16s 获得到 2 119 个理想解，理想最优率为 14.7%.

对于实际情况而言，底盘上装箱的个数往往与底盘的大小及箱子的大小密切相关，它往往不可能使底盘的剩余面积小于一个箱子的面积，即获得理想解. 因而人们所追求的是实际最优解. 表 1 是对 Q＝q＝0 的情况进行计算的结果及与实际最优解的比较(表 1 中的最优解是在不满足约束的情况下获得的). 这种情况表明利用本文提出的方法进行计算，获得的实际最优解的数目往往是大于计算表明的理想解的数目，因此，计算结果令人满意.

表 1　实例比较

箱子尺寸	$a=390$, $b=225$	$a=355$, $b=220$
本文算法获得的解	$M=1$, $N=1$ $m=2$, $n=1$ $K_1=2$, $K_2=0$, $K=8$	$M=2$, $N=1$ $m=3$, $n=1$ $K_1=0$, $K_2=0$ $K=10$
理想解	9	13
最优解	8	10

参考文献

1　Dowsland K A, Dowsland W B. Packing problems. Eur. J. of Opt. Res., 1992, **56(1)**: 2～14.

2　Dowsland K A. An exact algorithm for the pallet loading problem. Eur. J. of Opt. Res., 1987, **31(1)**: 78～84.

3　Smith A, De Cani P. An algorithm to the layout of boxes in pallets. Journal of Operation Research Society, 1980, **31(7)**: 573～578.

4　Bischoff E, Dowsland W B. An application of the micro to product design and distribution. J. Opt. Res. Soc., 1982, **33**(3): 271～280.

5 Dowsland K A. Efficient automated pallet loading. Eur. J. of Opt. Res., 1990, **44**(2): 232～238.

6 Peleg K, Peleg E. Container dimensions for optimal utilization of storage and transportation space. Computer Aided Desige, 1976, **8**(3): 175～180.

A HEURISTIC METHOD FOR CONSTRAINED PALLET LOADING PROBLEM

Wang Jinmin Chen Dongxiang Zha Jianzhong Wang Aihu Zhang Jiexiao

(Department of Mechanical Engineering Tianjin University Tianjin 300072)

Abstract The pallet loading problem, which is NP—complete, has been studied for many years and solution methods tend to be heuristic. This paper discusses the constrained pallet loading problem and presents a computer—based heuristic method to solve it. The good results can be obtained by the method.

Key words Constraint, pallet loading problem, NP—complete, heuristic method, construction, improvement.