第 7 卷第 1 期
1996 年 1 月
软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE
Vol. 7, No. 1
Jan. 1996

二元可满足性问题有解的充要条件*

吴向军　余丰人

(中山大学计算机系、电子系　广州　510275)

摘要　二元可满足性问题是一个多项式可解的问题.本文首先证明了该问题有解的充要条件,然后给出了判定该问题的一个新的多项式算法.如果判定某个表达式是可满足的话,那么求解算法不需要任何回溯就能准确地给出它的每个解.本文试图通过对二元可满足性的研究为研究其它问题提供一点启示.

关键词　二元组,解的相容性,布尔表达式的恒等变换,子句集,极大式.

二元可满足性问题(2SAT)是布尔表达式可满足性问题的一种限制形式[1],即在布尔表达式中的每个子句恰好包含二个文字,它的形式描述如下:

对于任意一个布尔表达式

$$f(X_1,X_2,\ldots,X_n)=C_1*C_2*\ldots*C_t \tag{1}$$

其中 $C_r=X'_i+X'_j$,符号 X' 是变量 X 的文字($X,\overline{X}$ 或 X^1,X^0),$i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$,$r=1,2,\ldots,t$.

二元可满足性问题是:对表达式 $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$,问是否存在变量 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 的一个真值赋值 $\langle P_1,P_2,\ldots,P_n\rangle$ ($P_i\in\{T,F\}$, $i=1,2,\ldots,n$),使得:$f(P_1,P_2,\ldots,P_n)=T$.如果存在这样的真值赋值的话,那么,称表达式 $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 是可满足的,真值赋值 $\langle P_1,P_2,\ldots,P_n\rangle$ 是它的一个解.

众所周知,二元可满足问题是一个在多项式时间内可判定的问题,详细证明见文献[2].该证明过程是回溯法求解思想和布尔代数知识的运用,虽然用该证明思想可以在多项式时间内判定任意 $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 是否是可满足的,但不能准确地给出它的一个解,其原因就是该证明思想受回溯法求解的约束.本文所给出的判定算法不仅能在多项式时间内完成判定工作,而且其相应的求解算法还能准确地给出表达式的所有解(如果有解的话),在列出所有解的过程中根本不需要回溯.

下面定义几个本文所用的基本概念.

---

* 作者吴向军,1965 年生,讲师,主要研究领域为算法设计与分析,数据库.余丰人,1959 年生,讲师,主要研究领域为布尔代数基础理论,现代通信理论.

** 为了便于表示,用乘号‘*’代表与运算‘∩’,用加号‘+’代表或运算‘∪’.本文中所说的表达式都是指满足 2SAT 条件的布尔表达式.

本文通讯联系人:吴向军,广州 510275,中山大学计算机系、电子系

本文 1994－05－27 收到,1994－12－29 定稿

定义 1. 用 V 来表示子句或表达式所含的变量集合，用 D 表示表达式所含子句的集合. 如：$V(C_i)$表示子句 C_i 所含变量的集合，$D(f)$表示表达式 f 所含的子句集合.

定义 2. 若 $V(C_1)=V(C_2)=...=V(C_t)=\{X_i,X_j\}$，那么称表达式 $C_1*C_2*...*C_t$ 为二元组，用 $E(X_i,X_j)$来表示，在不强调二元组中所含的变量集时，也可以用 E_r 来表示.

定义 3. 假设有两个二元组 E_1 和 E_2，分别取它们的一个解 S_1 和 S_2，如果在解 S_1 和 S_2 中，相同变量不取互反的真值，那么称解 S_1 和 S_2 相容，或称解 S_1 和 S_2 互为相容解.

根据二元组的定义可知：n 个变量总共有 C_n^2 个不同的二元组，而每一个二元组又最多有 4 个子句，所以有：$0\leqslant t\leqslant 4C_n^2$.

对任意一个表达式 $f(X_1,X_2,...,X_n)$，我们可根据二元组的定义把具有相同变量集的子句归并在一起，这样就得到如式(2)所示的形式. 在本文以后叙述中，将根据具体的需要，把表达式写成如式(1)或(2)的形式.

$$f(X_1,X_2,...,X_n)=C_1*C_2*...*C_t \qquad (t\leqslant 4C_n^2)$$

$$=\prod E(X_i,X_j) \qquad i,j\in\{1,2,...,n\},i\neq j \tag{2}$$

其中 $E(X_i,X_j)$是二元组，它可不含任何子句.

本文所用的二个恒等式如下：

(1) $(X_i'+X_j')(X_i'+\overline{X_j'})\equiv(X_i'+X_j')(X_i'+\overline{X_j'})\prod[(X_i'+X_k')(X_i'+\overline{X_k'})]$

$$k\in\{1,2,...,n\}-\{i,j\}$$

(2) $(X_i'+X_j')(\overline{X_j'}+X_k')\equiv(X_i'+X_j')(\overline{X_j'}+X_k')(X_i'+X_k')$

定义 4. 对任意一个表达式 $f(X_1,X_2,...,X_n)$，下面用构造法来定义它极大式的子句集：

(1) $D(fg^0)=D(f)$

(2) $D(fg^{m+1})=D(fg^m)\cup D_1$

　　(D_1 是 $D(fg^m)$中的子句用恒等变换所能增加新子句的集合)

(3) 对任意两个由(1)和(2)得到的子句集 $D(fg_1)$和 $D(fg_2)$，如果 $D(fg_1)\subseteq D(fg_2)$，那么，$D(fg)=D(fg_2)$.

称由子句集 $D(fg)$所构成的表达式为表达式 f 的极大式 fg(或称表达式 f 的饱和式).

对任意一个表达式 $f(X_1,X_2,...,X_n)$，求它极大式的过程就是利用两个恒等式，不断地把右边生成出来的新子句加到新的子句集中(如果某生成子句已存在，那么再加入无意义)，最后使得：对表达式中子句用这些恒等式经过任意次恒等变换所能生成的子句都在新的子句集中. 该过程在不能加入新的子句时结束，我们称该过程为表达式的极大化过程.

以上过程是恒等变换过程，所以不会改变原表达式的任何性质，即有：$fg=f$，但 $D(fg)\supseteq D(f)$.

1　2SAT 问题有解的充要条件

假设：任意一个表达式为 $f(X_1,X_2,...,X_n)$，它的极大式为 $fg(X_1,X_2,...,X_n)$.

$f(X_1,X_2,...,X_n)=\prod E(X_i,X_j) \quad (i,j\in\{1,2,...,n\},i\neq j)$

$fg(X_1,X_2,\ldots,X_n)=\prod E'(X_i,X_j)\quad(i,j\in\{1,2,\ldots,n\},i\neq j)$

由上一节的定义可知:$fg(X_1,X_2,\ldots,X_n)=f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$.

下面我们来研究极大式 $fg(X_1,X_2,\ldots,X_n)$所具有的性质.

引理 1. 对于任意一个表达式为 $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$,它的极大式 $fg(X_1,X_2,\ldots,X_n)$具有下列性质:

(1)若其中某一个二元组是不可满足的,那么它的所有二元组都是不可满足的.

(2)它的任意一个二元组的任意解,在其它任意二元组的解集中一定存在相容解.

证明:在 $fg(X_1,X_2,\ldots,X_n)$中任取一个二元组 $E'(X_i,X_j)$.以下简称为:Es'.

〈1〉假设:二元组 Es'是不可满足的

由于二元组是二元子句的合取式,所以,在 Es'中一定含有子句:$\overline{X_i}+\overline{X_j}$、$\overline{X_i}+X_j$、$X_i+\overline{X_j}$和 X_i+X_j.由恒等式(1)和极大式的定义可知:子句$\overline{X_i}+\overline{X_k}$、$\overline{X_i}+X_k$、$X_i+\overline{X_k}$和 X_i+X_k一定在二元组 $E'(X_i,X_k)$中($k\in\{1,2,\ldots,n\}-\{i,j\}$),于是得到了一系列新的不可满足的二元组 $E_1',E_2',\ldots,E_u'$.对新的不可满足的 E_r',再用恒等式(1)进行恒等变换,这样不断地利用恒等式(1)进行恒等变换,最后一定能使所有的二元组都变成是不可满足的.

所以,在极大式 $fg(X_1,X_2,\ldots,X_n)$中,如果有一个二元组是不可满足的,那么它的所有二元组都是不可满足的.

〈2〉假设:二元组 Es'是可满足的,任取它的一个解〈P_i,P_j〉,P_i,P_j 分别是变量 X_i,X_j 的真值赋值.

任取另一个二元组 Et',它的变量集为 $V(Et')$.由性质 1 可知:Et'也是可满足的.

〈2.1〉当$|V(Es')\cap V(Et')|=0$ 时

任取二元组 Et'的一个解 Si,Si 和〈P_i,P_j〉一定能满足相容性定义,所以,Si 是〈P_i,P_j〉的相容解.

所以,对于 Es'的任意解〈P_i,P_j〉,在 Et'的解集中一定存在它的相容解.

〈2.2〉当$|V(Es')\cap V(Et')|=1$ 时

不妨假设:$V(Es')\cap V(Et')=\{X_i\}$,$V(Et')=\{X_i,X_u\}$,并且 Et'的所有解都与〈P_i,P_j〉不相容,即在 Et'的解集中,变量 X_i 不能取 P_i,也就是说,在 Et'中一定存在子句:$X_i^{1-P_i}+X_u^1$、$X_i^{1-P_i}+X_u^0$.

这时,在对 Et'用恒等式(1)进行恒等变换时,在 Es'中一定会加入子句:$X_i^{1-P_i}+X_j^1$、$X_i^{1-P_i}+X_j^0$,这就使得 Es'中的 X_i 也不能取 P_i,这显然与〈P_i,P_j〉是 Es'的一个解相矛盾.

所以,对于 Es'的任意解〈P_i,P_j〉,在 Et'的解集中一定存在它的相容解.

由〈2.1〉和〈2.2〉可得:$fg(X_1,X_2,\ldots,X_n)$中的任意一个二元组的任意解,在其它任意二元组的解集中一定存在它的相容解.□

引理 2. 对任意一个表达式 $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$,如果在它的极大式 $fg(X_1,X_2,\ldots,X_n)$中有一个二元组是可满足的,那么,$f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$一定是可满足的.

证明:我们对表达式 $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$所含的变量个数 n 用数学归纳法来证明.

〈1〉当 $n=2$ 时,命题显然成立;

〈2〉假设:$n=m$ 时,命题成立,现在来证明:当 $n=m+1$ 时,命题也同样成立;

〈3〉假设：在 $f(X_1,X_2,...,X_m,X_{m+1})$ 的极大式 $fg(X_1,X_2,...,X_m,X_{m+1})$ 中有一个二元组是可满足的.

$$f(X_1,X_2,...,X_m,X_{m+1})=fg(X_1,X_2,...,X_m,X_{m+1})$$
$$=f'(X_1,X_2,...,X_m)*\prod_{i\in\{1,2,...,m\}}E(X_i,X_{m+1})$$

(1)由于 $f'(X_1,X_2,...,X_m)$ 是极大式 $fg(X_1,X_2,...,X_m,X_{m+1})$ 的一部分，用反证法即可证得：表达式 $f'(X_1,X_2,...,X_m)$ 的极大式就是它自身.

(2)由归纳条件和引理 1 可得：$fg(X_1,X_2,...,X_m,X_{m+1})$ 中的所有二元组都是可满足的，显然，在 $f'(X_1,X_2,...,X_m)$ 中一定有一个二元组是可满足的.

由归纳假设可得：$f'(X_1,X_2,...,X_m)$ 一定是可满足的.

任取 $f'(X_1,X_2,...,X_m)$ 的一个解 $\langle P_1,P_2,...,P_m\rangle$. 现在来构造表达式 $f(X_1,X_2,...,X_m,X_{m+1})$ 的解.

由于 $\langle P_1,P_2,...,P_m\rangle$ 是表达式 $f'(X_1,X_2,...,X_m)$ 的一个解，所以，在它的所有二元组中，变量 X_i 一定能取值 P_i，也就是说：在极大式 $fg(X_1,X_2,...,X_m,X_{m+1})$ 的前 C_m^2 个二元组中，变量 X_i 能取值 P_i. 由引理 1 可得：在二元组 $E(X_i,X_{m+1})$ 的解集中，变量 X_i 也一定能取值 P_i(其中 $i=1,2,...,m$).

〈3.1〉假设存在一个二元组 $E(X_i,X_{m+1})$，在它的解集中只有解 $\langle P_i,P_{m+1}\rangle$，没有解 $\langle P_i,\overline{P_{m+1}}\rangle$

我们构造真值赋值：$\langle P_1,P_2,...,P_m,P_{m+1}\rangle$，现在只要证明：它的任意二元分量 $\langle P_j,P_{m+1}\rangle$ 都是其相应的二元组 $E'(X_j,X_{m+1})$ 的解($j\in\{1,2,...,m\}$).

假设：存在一个二元分量 $\langle P_j,P_{m+1}\rangle$，它不是其对应的二元组 $E'(X_j,X_{m+1})$ 的解.

由于二元组 $E(X_i,X_{m+1})$ 没有解 $\langle P_i,\overline{P_{m+1}}\rangle$，即在该二元组中一定含有子句 $C_1:X_i^{1-P_i}+X_{m+1}^{P_{m+1}}$，又二元组 $E(X_j,X_{m+1})$ 没有解 $\langle P_j,P_{m+1}\rangle$，即在该二元组中一定含有子句 $C_2:X_j^{1-P_j}+X_{m+1}^{1-P_{m+1}}$，这时对子句 C_1 和 C_2 用恒等式(2)进行恒等变换时就一定能得到子句：$X_i^{1-P_i}+X_j^{1-P_j}$，这就使得：在 $E'(X_i,X_j)$ 的解集中，变量 X_i,X_j 不能取 $\langle P_i,P_j\rangle$. 这就于 $\langle P_1,P_2,...,P_m\rangle$ 是 $f'(X_1,X_2,...,X_m)$ 的一个解相矛盾.

所以，如果存在一个二元组 $E(X_i,X_{m+1})$，它只有解 $\langle P_i,P_{m+1}\rangle$，没有解 $\langle P_i,\overline{P_{m+1}}\rangle$，那么，真值赋值 $\langle P_1,P_2,...,P_m,P_{m+1}\rangle$ 中的任意二元分量 $\langle P_j,P_{m+1}\rangle$ 都一定是二元组 $E'(X_j,X_{m+1})$ 的解($j=1,2,...,m$).

故：构造出来的真值赋值 $\langle P_1,P_2,...,P_m,P_{m+1}\rangle$ 一定是表达式 $f(X_1,X_2,...,X_m,X_{m+1})$ 的一个解.

〈3.2〉假设在所有的二元组 $E(X_i,X_{m+1})$ 的解集中都存在解 $\langle P_i,T\rangle$ 和 $\langle P_i,F\rangle$ ($i=1,2,...,m$).

这时，根据解的定义很容易证得：真值赋值 $\langle P_1,P_2,...,P_m,T\rangle$ 和 $\langle P_1,P_2,...,P_m,F\rangle$ 一定都是表达式 $f(X_1,X_2,...,X_m,X_{m+1})$ 的解.

由〈3.1〉和〈3.2〉可得：如果在表达式 $f(X_1,X_2,...,X_n)$ 的极大式 $fg(X_1,X_2,...,X_n)$ 中有一个二元组是可满足的，那么，$f(X_1,X_2,...,X_n)$ 一定是可满足的. □

定理 1. 表达式 $f(X_1,X_2,...,X_n)$是可满足的充要条件是:在它的极大式 $fg(X_1,X_2,...,X_n)$中有一个二元组是可满足的.

证明:由于求极大式的过程是一个恒等变换的过程,所以有:$fg(X_1,X_2,...,X_n)=f(X_1,X_2,...,X_n)$

(1)充分条件

假设:在极大式 $fg(X_1,X_2,...,X_n)$中有一个二元组是可满足的.

由引理 2 的证明可知:表达式 $f(X_1,X_2,...,X_n)$一定是可满足的.

(2)必要条件

假设:表达式 $f(X_1,X_2,...,X_n)$是可满足的.

显然,极大式 $fg(X_1,X_2,...,X_n)$也一定是可满足的.

所以,在 $fg(X_1,X_2,...,X_n)$中一定存在一个二元组是可满足的.□

推论 1. 对任意一个表达式为 $f(X_1,X_2,...,X_n)$,如果在它的极大式 $fg(X_1,X_2,...,X_n)$中有一个二元组是可满足的,那么,极大式中的任意一个二元组中的任意解都能构造出该表达式的解.

证明:在极大式 $fg(X_1,X_2,...,X_n)$中任取一个二元组 $E'(X_i,X_j)$,再任取它的一个解 $\langle P_i,P_j\rangle$.

由引理 2 的证明,我们不难看出用该部分解扩展求解的方法.这个求解方法就是:

在取定的部分解$\langle P_i,P_j\rangle$的情况下,如果其中有一个变量的取值迫使 X_k 只能取 P_k(T 或 F)的话,那么,X_k 就取 P_k,且$\langle P_i,P_j,P_k\rangle$就是一个更长的部分解,如果这时 X_k 能取 T 和 F 的话,那么,$\langle P_i,P_j,T\rangle$和$\langle P_i,P_j,F\rangle$都是一个更长的部分解,用同样的方法对任意一个更长的部分解进行扩展,直至所有的变量都有了取值,这时的部分解就是表达式 $f(X_1,X_2,...,X_n)$的解.

所以,$E'(X_i,X_j)$的解$\langle P_i,P_j\rangle$能构造出表达式 $f(X_1,X_2,...,X_n)$的解.□

推论 1 说明了极大式 $fg(X_1,X_2,...,X_n)$中的每个二元组的每个解都是有用的,它们都能扩展成为表达式 $f(X_1,X_2,...,X_n)$的一个解,从而不能任意去掉二元组中的某个解.另外,由推论 1 的证明也可看出:在该求解(或所有解)过程中根本不需要回溯.

推论 2. 对于任意一个表达式 $f(X_1,X_2,...,X_n)$,它有唯一解的充要条件是:极大式 $fg(X_1,X_2,...,X_n)$中的每一个二元组都只有一个解.

证明:(1)充分条件

假设:$fg(X_1,X_2,...,X_n)$中的每一个二元组都只有一个解.

由定理 1 可得:$f(X_1,X_2,...,X_n)$一定有解.

假设:$f(X_1,X_2,...,X_n)$中有二个或更多的解.

不妨任取二个解:$\langle P_1,P_2,...,P_n\rangle$和$\langle P_1',P_2',...,P_n'\rangle$,且至少存在一个:$P_i\neq P_i'$.

在$\langle P_1,P_2,...,P_n\rangle$和$\langle P_1',P_2',...,P_n'\rangle$中任取二元分量$\langle P_i,P_j\rangle$和$\langle P_i',P_j'\rangle$,由假设可知:$\langle P_i,P_j\rangle$和$\langle P_i',P_j'\rangle$一定都能满足二元组 $E'(X_i,X_j)$,即:二元组 $E'(X_i,X_j)$至少有二个解.这就于假设条件"它的每一个二元组都只有一个解"相矛盾.

所以,$f(X_1,X_2,...,X_n)$一定只有唯一解.

(2)必要条件

假设：$f(X_1,X_2,...,X_n)$只有唯一解.

假设：在极大式 $fg(X_1,X_2,...,X_n)$中的有一个二元组有二个或更多的解.

由推论 1 可得：$f(X_1,X_2,...,X_n)$一定有多于一个的解. 这就于"它只有唯一解"相矛盾.

所以，极大式 $fg(X_1,X_2,...,X_n)$中的每个二元组都只有一个解. □

2 2SAT 的判定算法

本文所给的判定算法的主要工作在于求出表达式的极大式，然后对该极大式作一简单的判断即可. 所以，我们先给出求极大式算法的描述，然后再给出整个判定算法的形式描述.

(1)求极大式的算法

本文所给的算法是以"新子句集"为处理对象的，对任意一个表达式 $f(X_1,X_2,...,X_n)=C_1*C_2*...*C_t$，我们可把它理解为：在永真式的表达式(子句集为空集)中，加入一个"新子句集"D_1 所得到的(其中 D_1 为$\{C_1,C_2,...,C_t\}$).

于是有 $D(f)=\{C_1,C_2,...,C_t\}=\Phi\cup\{C_1,C_2,...,C_t\}$

利用上式的表示法和极大式的定义设计出下列求极大式的算法，在整个算法中仅用恒等式进行恒等变换. 该算法的形式描述如下：

```
1. D1=D(f);
2. D(fg) = Φ;      /* 永真式的子句集 */
3. while (D1非空)
     do begin
        D(fg)=D(fg)∪D1;
        new=Φ;      /* 置新增加的子句集为空 */
4.        对D1中的每一个子句Ci,做:
          begin
          if (存在和Ci组合能满足恒等式(1))
             then begin
                  用恒等式(1)产生出2*(n-2)个子句;
                  对每一个生成子句Cj,做:
                    if (Cj不在D(fg)中) then new=new∪{Cj};
                  end
          if (存在和Ci组合能满足恒等式(2))
             then if (生成的子句Cj不在D(fg)中) then new=new∪{Cj};
          end
        D1=new;
        end
```

步骤3的循环是会终止的，这是因为：在 n 个布尔变量的2SAT 问题中，最多只有$4C_n^2$个不同的子句. 在最坏情况下，当循环到把所有的子句都加到表达式中时，在恒等变换过程中也就不会再加入新的子句了.

(2)2SAT 问题的判定算法

2SAT 问题判定算法的形式描述如下：

1. 读入表达式 $f(X_1,X_2,...,X_n)$；

2. 求出 $f(X_1,X_2,...,X_n)$的极大式 $fg(X_1,X_2,...,X_n)$;

3. 在极大式中,任取一个二元组 $E'(X_i,X_j)$;

4. if ($E'(X_i,X_j)$是可满足的) then 表达式 $f(X_1,X_2,...,X_n)$是可满足的;
else 表达式 $f(X_1,X_2,...,X_n)$是不可满足的;

3 算法的时空分析

在第2节,我们给出了2SAT 问题的一个判定算法,现在来分析它的时空复杂度.

(1)该判定算法的空间复杂度为 $O(n^2)$

在该判定算法中,需要存储表达式的所有子句,而2SAT 问题最多只有$4C_n^2$ 个不同的子句,存储它们所用的空间为:$4C_n^2$;另外,还需要一些存储单元来存放中间结果,这些临时空间远小于$4C_n^2$.

所以,该判定算法的空间复杂度为 $O(n^2)$.

(2)该判定算法的时间复杂度为 $O(n^3)$

①一个新子句和其它子句组合用恒等式(1)进行一次恒等变换所需的时间

对任意一个新子句:$X_i^{Pi}+X_j^{Pj}$,它最多与子句 $X_i^{1-Pi}+X_j^{Pj}$ 或 $X_i^{Pi}+X_j^{1-Pj}$ 组合才能满足恒等式(1),对这每种组合,恒等式(1)最多只能生成$2*(n-2)$个新子句(因为有的生成子句可能已经存在).

所以,一个新子句和所有其它子句用恒等式(1)进行一次恒等变换所需要的时间为:$2*2(n-2)$.

②一个新子句和其它子句组合用恒等式(2)进行一次恒等变换所需的时间

对任意一个新子句:$X_i^{Pi}+X_j^{Pj}$,它只能与子句:$X_i^{1-Pi}+X_k^{Pk}$ 和 $X_j^{1-Pj}+X_k^{Pk}$ 组合才能满足恒等式(2)($k\in\{1,2,...,n\}-\{i,j\}$),而对这每种组合,恒等式(2)最多只能生成一个新子句.

所以,一个新子句和所有其它子句用恒等式(2)进行一次恒等变换所需要的时间为:$2*(n-2)$.

(3)求极大式算法的时间复杂度

假设:求 n 个变量的表达式的极大式所花的时间为 $T(n)$.

在求极大式算法执行过程中,如果又生成了新的子句,那么步骤3(外循环)就再循环一次.不妨

假设:步骤3总共需要循环 k 次,且在第 i 次循环时所加入的新子句个数为 M_i.

由(1)和(2)的分析可得:所有 M_i 个子句和其它子句组合进行一次恒等变换(步骤4内循环)所花的时间就为:$M_i*O(n)$,于是有

$$T(n)=\sum_{i=1}^{k}(M_i*O(n))=O(n)*\sum_{i=1}^{k}M_i$$

$T(n)$中的求和项就是在算法执行过程中所加入新子句的总数,而2SAT 问题最多只有$4C_n^2$ 个不同的子句,所以,$\sum_{i=1}^{k}M_i\leqslant 4C_n^2$.

故 $$T(n)=O(n)*\sum_{i=1}^{k}M_i\leqslant O(n)*4C_n^2=O(n^3)$$

假设：对 n 个变量的表达式进行判定，该判定算法所花的时间为 $P(n)$.

在该判定算法中，步骤1所花的时间显然为 t，t 是子句的个数（$0\leqslant t\leqslant 4C_n^2$）.

所以，$P(n)=t+T(n)+O(1)\leqslant 4C_n^2+O(n^3)+O(1)=O(n^3)$

4 结束语

通过对2SAT 问题的深入细致的研究，我们对该问题有了进一步的认识. 我们在构造解的过程中，部分解的每一次扩展都是确定的，这就克服了回溯法求解方法在求解过程中所带来的不确定性. 本文所给算法的重点在于它可摆脱回溯法的约束，希望能为研究其它问题（比如：图中只有唯一一个 Hamilton 圈的充要条件等）提供一点启发.

参考文献

1 加里 M R，约翰逊 D S. 张立昂等译. 计算机和难解性——NP 完全性理论导引. 北京：科学出版社，1987.

2 张泽增. NPC 理论导引. 贵阳：贵州人民出版社，1989.

3 Galil Z. On resolution with clause of bounded size. SIAM J. Comput. 1977，6(3)：444～459.

4 Horowitz E，Sahni S. Fundamentals of computer algorithms. Computer Science Press，Inc.，U.S.A.，1978.

AN SUFFICIENT AND NECESSARY CONDITION FOR 2SAT PROBLEM

Wu Xiangjun　Yu Fengren

(*Department of Computer Science　Department of Electrics　Zhongshan University　Guangzhou*　510275)

Abstract　2—Satisfiability (2SAT) is a determinable problem in polynomial time. This paper proves a sufficient and necessary condition for 2SAT problem, and presents a new polynomial algorithm for 2SAT problem. In addition, if one 2—CNF expression is satisfiable, the algorithm for solution can give every solution without backtracking. This paper tries to give some idea for other problem through the study of 2SAT problem.

Key words　Group of clauses with the same two variable, compatible of two solutions, identical transformation, set of clauses, minimax expression.