第6卷第5期
1995年5月

软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol. 6, No. 5
May 1995

一个在弗协调逻辑中的限制*

林作铨

(汕头大学计算机科学系，汕头 515063)
(国家智能计算机研究开发中心，北京 100080)

摘要 本文通过应用限制到一个弗协调逻辑给出一种弗协调限制，弗协调限制是一种弗协调非单调逻辑，它能被极小化语义所刻划，并具有两方面优点：非单调逻辑在包含矛盾时是不平凡的；弗协调逻辑在矛盾没有影响时等价于经典逻辑.

关键词 弗协调逻辑，非单调逻辑，限制，极小模型.

一个理论称为非协调(inconsistent)，如果对某个命题 A，它同时包含 A 与 $\neg A$；一个理论称为平凡(trivial)，如果它可推出任何命题. 弗协调逻辑(Paraconsistent Logic)是一种非协调但不平凡的理论.

一个理论称为非单调(nonmonotonic)，如果由前题 S 可推出命题 A，但由一个包含 S 的增大前题 S' 可能推不出 A. 非单调逻辑(Nonmonotonic Logic)就是非单调的理论.

众所周知，经典逻辑具有协调性，平凡性与单调性. 我们知道，在不完全与非协调知识情形下的常识推理是非单调与弗协调的[1]. 在不完全与非协调知识下常识推理的形式化正愈加受到重视[2,3].

非单调逻辑是不完全知识推理的形式化，它通过维护协调性提供一种修正机制来把不完全知识转化为较完全知识状态；弗协调逻辑是在非协调知识推理的形式化，它提供一种机制包容矛盾但使得矛盾局部化. 虽然它们具有都是处理矛盾的共性，但两者具有相当不同的机制. 从矛盾观点看，前者通过排除矛盾维护协调性来增加新知识，而后者包容矛盾没有新增加知识需要修正. 一般地说，非单调逻辑不是弗协调的，弗协调逻辑不是非单调的，如文献[1]论证，非单调逻辑有必要引进弗协调性，弗协调逻辑有必要引进非单调性，这也是形式化常识推理 所必需的.

Priest[4]提出的悖论逻辑 LP(Logic of Paradox)是一个重要的弗协调逻辑，作为一个弗协调逻辑，LP 能局部化矛盾获得不平凡性，但是 LP 有一个主要缺点：一些在经典逻辑中有效的推理在 LP 中是无效的，致使 LP 不能作出许多有用的结论而显得太弱了. Priest[5]最近提出了极小化悖论逻辑 LP_m 能克服这个缺点，LP_m 是 LP 的一个非单调扩充，它是非单

* 本文1993－07－24收到，1993－10－22定稿

本文是国家863计划、国家基础研究攀登计划与国家自然科学基金资助项目. 作者林作铨，1963年生，副教授，主要研究领域为计算机科学与人工智能的逻辑基础.

本文通讯联系人：林作铨，汕头 515063，汕头大学计算机科学系

调的由于它所包含的矛盾是极小化的,但 LP_m 并不适合如一般非单调逻辑所处理的不完全知识的表示与推理.

McCarthy[6]提出的限制 *CIRC*(Circumscription)是一个主要的非单调逻辑,限制是基于经典逻辑的非单调扩充,因此不是弗协调的,作为一个非单调逻辑,限制有一个缺点:限制理论如果包含一个矛盾就会倒塌为平凡的.

事实上,LP_m 扩充 LP 是基于 *CIRC* 的思想,本文中我们将提出一个在弗协调逻辑 LP 中的限制,弗协调限制 *LPC*(The Logic of Paradox with Circumscription),它是完全非单调与弗协调的,简单地说,*LPC* 将具有 LP_m 的良好性质,并且具有限制的非单调推理能力.此外,*LPC* 从技术上作出两方面贡献:扩展弗协调逻辑到真正的非单调逻辑形式;扩展限制到弗协调逻辑形式.

下一节,我们从极小后承出发定义限制的极小语义,第 2 节与第 3 节分别给出 LP 与 LP_m 并指出一些问题.第 4 节,我们给出 *LPC* 作为一种限制的弗协调形式,并证明了 *LPC* 与 LP 和 LP_m 的关系.

1　极小后承

在本文中,我们设定 $\mathscr{L}$ 为一个命题语言,$\mathscr{L}$ 中公式定义如常.一个赋值 v 赋予 $\mathscr{L}$ 中任一原子命题 p 二值:0(假)与 1(真),如常.下面,我们称一个赋值为一个命题(命题集)的模型,如果在该赋值下这个命题(命题集中的每个成员)为真.令 S 是一个公式集,A 是一个公式,在经典逻辑中,A 是 S 的一个语义后承,记为 $S\models A$,定义如下:A 在 S 所有的模型中都为真.极小后承将由限定语义后承的模型中相对于一个赋值上的偏序关系(称为优先关系)$\prec$之极小模型来定义*.

定义 1. 令 v,v' 为两个赋值,定义 v' 小于 v,记如 $v'\prec v$,当且仅当对任一原子命题 p,若 $v'(p)=1$ 则 $v(p)=1$,并且存在一个原子命题 p 使得 $v(p)=1$ 但 $v'(p)\neq 1$.

定义 2. 令 S 是一个公式集,一个赋值 v 是 S 的极小模型,当且仅当 v 是 S 的模型,并且不存在 S 的其它模型 v',使得 $v'\prec v$.

定义 3. 令 S 是一个公式集,A 为一个公式,定义 A 是 S 的极小后承,记为 $S\models_m A$,若 A 在 S 所有的极小模型中都为真.

例 1:令 p 与 q 是两个不同的原子命题.容易看出,$p\vee q\models_m \neg p\vee\neg q$,因为 $p\vee q$ 有两个极小模型使得 $v_1(p)=1,v_1(q)=0$ 和 $v_2(q)=1,v_2(p)=0$.

发展非单调逻辑的目的之一是转化不完全知识到较完全的知识状态,例如,如果我们有一个不完全知识库 $S=\{p,r\}$ 并有一个关于 q 的询问,我们能基于 $S\models_m\neg q$ 回答这个询问的结果为$\neg q$,这也被称为封闭世界假设[9],因为当不完全知识库中缺乏有关正命题,我们可把相应负命题加进去使得该知识库对有关询问来说是完全的.

极小后承是非单调的,因为一个增大了的前提集的极小模型将会改变,使得一些先前的结论可能被废除.实际上,极小后承的思想来自限制,限制的语义是基于对一组原子命题极

* 关于非单调逻辑的语义定义参见文献[7,8].

小化的极小后承*.

定义 4. 令 S 是一个公式，P 为在 A 中出现的原子命题集，语义上，限制是相对于偏序关系 $\prec^P$ 的极小后承，记为 $\models P, \prec^P$ 定义如下：令 v, v' 是两个赋值，$v' \prec^P v$ 当且仅当对原子命题 $p \in P$，若 $v'(p)=1$，则 $v(p)=1$，并且存在一个原子命题 $p \in P$，使得 $v(p)=1$，但 $v'(p) \neq 1$.

例 2：令 S 是如下公式的合取：

$bird(Tweety) \wedge \neg abnormal(Tweety) \rightarrow fly(Tweety)$

$bird(Tweety)$

$penguin(Tweety) \rightarrow \neg fly(Tweety)$

我们既没有 $S \models fly(Tweety)$ 也没有 $S \models mfly(Tweety)$；但如果我们令 $P=\{abnormal(Tweety), penguin(Tweety), bird(Tweety)\}$，则我们可有 $S \models_P fly(Tweety)$.

这样，限制，作为一个主要非单调逻辑，比基本的极小后承表达能力强，但是，它有一个主要缺点，因为限制是基于经典逻辑，当限制一个包含一个矛盾的理论时，就会推出任何命题，即限制具有平凡性. 因此，一般的非单调逻辑或特殊的限制不能描述含矛盾知识的推理问题，而常识推理与知识库通常是包含矛盾的.

2　悖论逻辑

下面，我们定义悖论逻辑 LP 的语义. 一个赋值 π 赋予 $\mathscr{L}$ 中每个原子命题 p 有如下三值之一：0(假且仅假)，1(真且仅真)与 01(既真又假).

定义 5. 一个命题 p 在赋值 π 下为真，若 $\pi(p)=1$ 或 $\pi(p)=01$；一个命题 p 在赋值 π 下为假，若 $\pi(p)=0$ 或 $\pi(p)=01$.

这样，LP 是基于一种三值语义，使得某些命题的赋值既真又假.

定义 6. 在一个赋值下，真值能被扩展到合式公式如下：

1. $\neg A$ 为真，当且仅当 A 为假；$\neg A$ 为假，当且仅当 A 为真.

2. $A \wedge B$ 为真，当且仅当 A 与 B 都为真；$A \wedge B$ 为假，当且仅当 A 或 B 为假.

其它联词可基于 $\neg$ 与 $\wedge$ 定义如常.

定义 7. 令 S 是一个公式集，A 为一个命题. A 是一个 S 的语义后承，记为 $S \models_{LP} A$，当且仅当 A 在 S 所有的模型都为真**.

例 3：令 p 与 q 是两个不同的原子命题. 不难看出，$p \wedge \neg \models_{LP} p$；但 $p \wedge \neg p \not\models_{LP} q$，因为在赋值 π 下使得 $\pi(p)=01$ 与 $\pi(q)=0$，$p \wedge \neg p$ 为真(实际上为既真又假)但 q 不是真.

发展弗协调逻辑的目的之一是使得矛盾不可能推出任何命题，这样，LP 能破坏经典逻辑的平凡性，作为一个弗协调逻辑，它确实可以使矛盾局部化，但是，LP 为此付出了一个代价：如果 B 是一个协调的公式，A 在经典逻辑中可由 B 推出，那么在 LP 中 A 可能从 B 推不出. 实际上，假言推理，$A, \neg A \vee B/B$，在 LP 中无效，这只要取一个赋值 π 使得 A 为既真又假而 B 假且仅假就马上可以看出，如果把假言推理加进 LP，那么 LP 脱变成经典逻辑，

---

* 对限制的各种形式的进一步解释可参见文献[10].

** 这里模型的定义如上.

在这意义上，假言推理是唯一在经典逻辑中有效但在 LP 中无效的规则[5]. 发展极小化悖论逻辑 LP_m 的目的之一就是为了解决这个问题.

3　极小非协调性

如上所述，LP 导致假言推理无效的情况是由于某个命题的取值既真又假，为此我们可以考虑非协调（矛盾）情形作为缺省假设，LP_m 扩充 LP 基于这样的直观想法：通常矛盾总是稀少的，我们赋既真又假值（01）予某个命题，仅当这个命题确实是个矛盾. 事实上，LP_m 是一种基于限制的极小非协调推理. 技术上，我们定义 LP_m 的极小后承，记为$\models_{LP_m}$如下.

定义 8. 令 S 是一个公式集，A 是一个公式，$S\models_{LP_m}A$ 当且仅当 A 在 S 所有的极小非协调（miniamlly inconsistent）模型（mi）中都为真；一个 S 的模型 π 是极小非协调的，当且仅当不存在 S 的其它模型 π' 使得 $\pi'<_m\pi$，这里偏序关系$<_m$ 定义如下：令 π 与 π' 是两个赋值，$\pi'<_m\pi$若对任一原子命题 p，如果 $\pi'(p)=01$ 则 $\pi(p)=01$，并且存在一个原子命题 p 使得 $\pi(p)=01$但 $\pi'(p)\neq 01$.

换句话说，$\pi<_m\pi$ 当且仅当 π 包含比 π' 更多的矛盾，mi 模型就是那些矛盾极小化模型.

例 4.：令 p 与 q 是两个不同的原子命题，不难看出，$p,\neg p\vee q\models LP_m q$，因为赋值 π 使得 $\pi(p)=01$ 不是 mi 模型；但$\neg p\vee q,p,p\wedge\neg p\not\models LP_m q$，因为赋值 π 使得 $\pi(p)=01$ 与 $\pi(q)=0$，$p\wedge\neg p$为真但 q 不是真.

LP_m 具有一些良好的性质，当前提协调时，它能作出所有经典有效的结论，这是由于协调前提的 mi 模型实际上就是经典逻辑的模型，即没有赋值 01 给协调前题的任何命题，进一步，即便在一些非协调情况下，LP_m 也能有效假言推理，例如，$p,\neg p\vee q,r\wedge\neg r\models LP_q$，换句话说，当矛盾没有直接影响时，$LP_m$ 可使所有经典推理有效. 这就解决了 LP 存在的问题.

另一个有趣的事实是，$\models_{LP_m}$具有与$\models_{LP}$一样的不平凡性能力（参见下节）. 但是，LP_m 仅在极小非协调性意义上是非单调的，显然，LP_m 不足以达到如例 2 中限制那样把不完全知识转化成较完全知识的表示与推理能力.

4　弗协调限制

综上所述，我们将考虑在弗协调逻辑 LP 中的限制. 我们考虑这样做至少有两方面的优点，首先，基于弗协调逻辑定义限制使得限制具有弗协调性而克服非单调逻辑的平凡性问题，再者，基于限制扩充弗协调逻辑使得弗协调逻辑具有限制的非单调推理能力并且可作出几乎所有经典结论.

结合限制的悖论逻辑 LPC 是一种限制的弗协调形式，技术上，我们只须通过结合限制的极小化命题外延与基于 LP 的极小非协调性在一起定义 LPC.

定义 9. 令 S 是 $\mathscr{L}$ 中的一个公式，P 为在 A 中出现的原子命题集，π 与 π'是 LP 的两个赋值. 我们定义 $\pi'<_m^P\pi$，当且仅当

1. 对每个原子命题 $p\in P$，若 $\pi'(p)=1$ 则 $\pi(p)=1$；若 $\pi'(p)=01$ 则 $\pi(p)=01$.

2. 存在一个原子命题 $p\in P$ 使得 $\pi(p)=1$ 或 01 但 $\pi'(p)\neq 1$ 或 01.

S 的一个模型 π 称为极小的，当且仅当不存在 S 的另一个模型 π' 使得 $\pi'<_m^P\pi$.

这样，弗协调限制 LPC 的语义后承，记为 $\models_{LPC}$，可定义如下.

定义 10. 令 S 是一个命题集，A 为一个命题，$S\models_{LPC}A$ 当且仅当 A 在 S 所有的极小模型中都为真.

例 5：令 S 是如下公式的合取：

$bird(Tweety)\wedge\neg abnormal(Tweety)\rightarrow fly(Tweety)$

$bird(Tweety)$

$yellow(Tweety)\wedge\neg yellow(Tweety)$

$penguin(Tweety)\rightarrow\neg fly(Tweety)$

并令 $P=\{abnormal(Tweety),penguin(Tweety),bird(Tweety)\}$. 如所期望，我们有 $S\models_{LPC}fly(Tweety)$，即鸟颜色的矛盾不影响我们作出鸟会飞的结论.

这样，LPC 是非单调与弗协调的. 事实上，我们能证明下面几个衡量弗协调与非单调性质的事实.

定理 1. 对任一公式 A，如果存在一个 A 的极小模型，则 $\{A\}\models_{LPC}B$ 对任何 B 都成立，当且仅当 $\{A\}\models_{LP}B$ 对任何 B 都成立；即 $\models_{LPC}$具有与 $\models_{LP}$同样的不平凡性.

证明：容易看出，我们只要证明：LPC 的极小模型所满足的所有公式，当且仅当它们也是 LP 的模型所满足的公式，因为存在一个 A 的极小模型 π，$\{A\}$是有限的，且$\{A\}\models_{LPC}B$ 对任何 B 都成立，可见 π 也是 A 的 LP—模型，且$A\models\{LP\}B$ 对任何 B 都成立.

定理 2. 令 A 是一个不含矛盾的公式，B 为一个公式，$\{A\}\models_{LPC}B$，当且仅当$\{A\}\models_{P}B$；即$\models_{LPC}$具有与$\models_{P}$ 同等的非单调性.

证明：对协调的 A，限制与 LPC 具有相同的极小模型，因为这时没有任何命题取值既真又假，由此定理得证.

定理 3. 对任一公式 A，如果存在一个 A 的极小模型，则 $A\models_{LPC}B$ 对任何 B 都成立，当且仅当 $A\models LP_mB$ 对任何 B 都成立；即$\models_{LPC}$具有与$\models_{LP_m}$同样的不平凡性与非单调性.

证明：容易看出，我们只要证明：LPC 的极小模型所满足的所有公式，当且仅当它们也是 LP 的模型所满足的公式，因为存在一个 A 的极小模型 π，$\{A\}$是有限的，且$\{A\}\models_{LPC}B$ 对任何 B 都成立，可见 π 也是 A 的 LP_m-模型，且$\{A\}\models_{LP}B$ 对任何 B 都成立.

最后，我们讨论 LPC 的证明论问题. 如文献[5]指出，虽然 LP 已有证明论，但给出一种 LP_m 的证明论是一个并不容易的未解问题，Priest 把它作为一个困难的挑战问题；再者，虽然限制原来是作为一条证明论模式提出的，但限制模式是基于经典逻辑，完全不能用于 LP，这是显见的，因为 LP 不具有限制模式所需要的系统能力. 有幸的是，文献[11]基于表系统(tableaux)首先给出了一种 LP_m 的证明论并证明了完全性定理，同样的技术也能给出一个 LPC 的证明论，但如限制一般，LPC 没有完全性定理，只有有限完全性结果. 这是另一方面的问题，这里限于篇幅，如 LP 与 LP_m 一样，我们先给出语义方面结果，我们将在另文给出 LPC 的证明论结果.

5 结 论

综上所述，LP 作为一个弗协调逻辑，通过破坏平凡性来形式化非协调推理，但它由于

使得一些经典推理无效而显得太弱；限制作为一个非单调逻辑，通过极小化模型来形式化不完全推理，但它是平凡的不能处理含矛盾推理问题，我们通过应用限制到弗协调逻辑定义一个弗协调限制 *LPC*，*LPC* 是非单调与弗协调的，它有两方面的优点：非单调逻辑在包含矛盾时是非平凡的；弗协调逻辑在矛盾没有影响时等价于经典逻辑. 这样，我们就获得了一个在不完全与非协调知识情形下推理的形式化，它能解决非单调逻辑与弗协调逻辑中存在的困难，这也是一种更一般的常识推理的逻辑基础.

我们指出，本文的结果可以直接推广到一阶逻辑情形，基于本文的技术，我们一方面可以把非单调逻辑推广到弗协调逻辑形式，另一方面可以把弗协调逻辑推广到非单调逻辑形式，*LPC* 的技术是足够一般的，它可被看作一种定义非单调与弗协调逻辑的一般途径.

致谢　作者感谢唐稚松老师和李未老师的帮助与鼓励.

参考文献

1 Lin Z. Reasoning with incomplete and inconsistent information. In: Proceedings of the International Conference on Intelligent Information Processing & System, Beijing, 1992, International Academic Press, 1992. 382—388.

2 Ginsberg M Ed. Readings in nonmonotonic reasoning. Morgan Kaufmann, 1987.

3 Priest G, Routley R, Norman J. Paraconsistent logic: essays in the inconsistency. Philosophic Verlag, 1989.

4 Priest G. Logic of paradox. J. of Philosophical Logic, 1979, **8**(1): 219—241.

5 Priest G. Reasoning about truth. Artificial Intelligence, 1989, **39**(2): 231—244.

6 McCarthy J. Circumscription—a form of non—monotonic reasoning. Artificial Intelligence, 1980, (**13**): 27—39.

7 Shoham Y. Nonmonotonic reasoning: meaning and utility. In: Proceedings of the 10th International Joint Conference on Artificial Intelligence, Milan, 1987, Morgan Kaufmann, 1987. 388—393.

8 林作铨. 参态系统：单调与非单调逻辑的统一基础. 模式识别与人工智能，1991，**4**(1)：20—27.

9 Reiter R. On closed world data base. In: Gallaire H and Minker J eds., Logic and Data Base, Plenum Press, 1978.

10 Lin Z. A generalization of circumscription. Journal of Computer Science and Technology, 1992, **7**(2): 97—104.

11 Lin Z. A note on proof theories of logics of paradox. STU—AI—TR—41, Computer Science Department, Shantou University, 1993.

CIRCUMSCRIPTION IN A PARACONSISTENT LOGIC

Lin Zuoquan

(*Department of Computer Science, Shantou University, Shantou* 515063)
(*National Research Center for Intelligent Computing Systems, Beijing* 100080)

Abstract　This paper describes the paraconsistent circumscription by application of circumscription in a paraconsistent logic. It turns out that the paraconsistent circumscription can be characterized by the minimal semantics which is nonmonotonic and paraconsistent. It brings them advantages in two respects: nonmonotonic logic would be nontrivial while there was a contradiction, and paraconsistent logic would be equivalent to classical logic while there was no effect of a contradiction.

Key words　Paraconsistent logic, nonmonotonic logic, circumscription, minimal model.