自然地形环境下移动机器人的一种路径规划方法*

王 宏 王学福 张 钹 孙家广

(清华大学计算机科学与技术系，北京 100084)

摘要 本文给出了一种规划移动机器人在自然地形中运动的新方法，该方法利用 NURBS 曲面模拟自然地形地貌，以 Trimmed NURBS 曲面描述带有障碍物或不可逾越区域的地形，在综合考虑机器人动力学、地形及障碍描述和曲面特性等各方面因素的情形下，运用测地线的概念和计算方法以及 A* 搜索算法，获得了在自然地形环境下任意两点间的距离最短路径和时间最优路径，所有的路径均由 NURBS 曲线表示，实验结果表明，该方法在性能与效率上均十分令人满意.

关键词 机器人，路径规划*，人工智能，样条函数.

有关移动机器人的运动规划，已有许多文章发表，但是大多数的运动规划考虑的是平面上的运动，运动路径由若干直线段和圆弧等基本的几何元素构成[1,2]，或者设定某些函数以定义一常曲率路径[3,4]，在自然地形的模拟中，常采用 $2\frac{1}{2}$D 的情形[5,6]. Shiller[7]将自主式车辆的动力学模型和自然地形的模拟结合在一起，利用均匀 B 样条曲面模拟自然地形，该方法侧重于车体模型的分析，优化方法的效率不高，在 SGI 工作站上搜索一条最优路径需要以小时为单位的时间.

非均匀有理 B 样条(NURBS)曲线、曲面是近年来发展起来的表示自由曲线、自由曲面的行之有效的方法，具有很好的形状可控性[8]. 利用 NURBS 曲面描述地形可以直观地反映出地形中各种高低起伏的情形，而利用 NURBS 曲线描述路径则可以十分容易地得到在不同地形上变化各异的路径. Trimmed NURBS(裁剪 NURBS)曲面是指中间带有某些空洞的 NURBS 曲面，利用这种曲面模拟带有不可逾越区域(如沟壑、湖泊、丛林等)的地形十分吻合. 本文利用了 Trimmed NURBS 曲面作为自然地形(带障碍区域)的模拟，并在此基础上进行室外移动机器人的路径规划. 文中导出一个车体模型的动力学方程. 在计算曲面上任意两点间的测地线时，本文采用了一种新的计算方法. 在时间最优路径搜索中采用了 A* 算

* 本文 1993－03－05 收到，1993－05－27 定稿

作者王宏，1955 年生，副教授，主要研究领域为人工智能，移动机器人，路径规划. 王学福，1969 年生，博士研究生，主要研究领域为计算机图形学与几何造型. 张钹，1936 年生，教授，博士导师，主要研究领域为计算机应用与人工智能. 孙家广，1948 年生，教授，博士导师，主要研究领域为计算机图形学和计算机辅助设计与制造的研究与开发.

本文通讯联系人：王宏，北京 100084，清华大学计算机科学与技术系

法，并在 SUN 工作站上进行了模拟实验.

1 自主式车辆的动力学模型

本节将导出一个简单的车体模型的动力学方程，并据此建立车体运动与行走时间之间的关系，该模型既考虑到车体速度随自然地形运动在小范围区间内的变化，同时又重点突出了动力学的主要因素，从而得出了与已有的分析方法不同的模型结果.

引入下述定义与表示法：设 $F(t)$ 为由车体电机产生的驱动力，m 为车体质量，g 为重力加速度，θ 为坡路的倾斜角，$S(t)$ 为车体运动产生的位移，$V(t)$ 为车体速度，K_f 为滚动阻力系数，P_{rat} 为车体电机的额定功率. 设车体电机按额定功率工作，这与现有的电机驱动的车体情形相吻合，由此可建立下列关系：

$$P_{rat}=F(t)\cdot V(t) \tag{1}$$

$$F(t)=m\cdot\frac{d^2S}{dt^2}+mg\sin\theta+K_f mg\cos\theta \tag{2}$$

从而可得：
$$\frac{d^2S}{dt^2}=\frac{F(t)}{m}-g\sin\theta-K_f g\cos\theta \tag{3}$$

将(1)式代入(3)式中，记：
$$a_1=P_{rat}/m,\qquad a_2=-g\sin\theta-K_f g\cos\theta \tag{4}$$

且由 $\frac{ds}{dt}=v(t)$ 可得：
$$\frac{d^2S}{dt^2}=a_1\frac{dt}{dS}+a_2 \tag{5}$$

其初值条件为 $\frac{dS}{dt}\big|_{t=0}=V_0, S\big|_{t=0}=0$

所以该问题已归结为二阶非线性常微分方程的初值问题，使用分离变量法，可得到：

$$\frac{dS}{dt}-(a_1/a_2)\ln\left|a_1+a_2\cdot\frac{dS}{dt}\right|=a_2t+a_2c_1 \tag{6}$$

(5)式利用其它途径求解，可得：
$$\frac{1}{2}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2=a_1t+a_2S+c_2 \tag{7}$$

故
$$\frac{dS}{dt}=\sqrt{2(a_1t+a_2S+c_2)} \tag{8}$$

将(8)式代入(6)式中可得到：

$$\sqrt{2(a_1t+a_2S+c_2)}-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\cdot\ln\left|a_1+a_2\sqrt{2(a_1t+a_2S+c_2)}\right|=a_2t+a_2c_1 \tag{9}$$

其中 c_1,c_2 可由(6)式、(8)式以及给定的初值条件确定. 这样，(9)式给出了 t 与 S 的隐函数关系. 将(8)式右端设为参数 u，对(9)式右端做简单变换，可得到以 u 为参数的 S,t 的参数方程形式，再由 a_1、a_2、c_1、c_2 与 V_0 等参数的组合情况，可得到以 S 为自变量的三次多项式. 以上分析建立了某个路段中车体位移、速度与时间的关系式.

2 Trimmed NURBS 曲面和带有障碍物的自然地形模拟

本节将对具有障碍物的自然地形提供一个合理的描述模型.

给定控制点阵 $\{P_{ij}\}(i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n)$ 以及相应的权值 $W_{ij}(i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n)$，$u$ 向纽结点 $\{u_i\}(i=0,1,\cdots,m+k+2)$，$v$ 向纽结点 $\{v_j\}(j=0,1,\cdots,n+l+2)$，则 $k*l$ 次 NURBS 曲面定义为：

$$P(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}B_{i,k}(u)\cdot B_{j,l}(v)\cdot W_{ij}}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}W_{ij}B_{i,k}(u)\cdot B_{j,l}(v)}$$

定义域为 $u_k\leqslant u\leqslant u_{m+1}, v_l\leqslant v\leqslant v_{n+1}$，可见参数域是一矩形域，公式中的 $B_{i,k}(t)$ 是 k 次 B 样条函数，其定义可见文献[10].

Trimmed NURBS 曲面系指曲面的参数域不再是矩形域，而是由带有若干内环的区域构成，内环在曲面映像上的表示是一洞，内环与外环之间的区域则是曲面的合理参数域. 利用 Trimmed NURBS 曲面描述带有不可逾越区域的自然地形十分合适，内环可以表示不可逾越区域(如湖泊、丛林等)，而内环与外环之间的区域则是可以通过的区域.

3　距离最短路径的计算

曲面上两点之间最短的路径即为测地线. 关于测地线更为深入的讨论，可见文献[9]，设 A、B 是一参数曲面上任意两点，A、B 之间的测地线记为(参数表示) $u=u(t), v=v(t), A=(u_A,v_A), B=(u_B,v_B)$，不妨设 t 为测地线的弧长参数，则：

$$ds^2=g_{11}\cdot du^2+2g_{12}\cdot du\cdot dv+g_{22}\cdot dv^2 \tag{10}$$

其中 g_{11}, g_{12}, g_{22} 为参数曲面的第一类基本量，测地线的长度为：

$$l=\int_{t_A}^{t_B}(g_{11}\cdot u'^2+2g_{12}\cdot u'\cdot v'+g_{22}\cdot v'^2)^{1/2}dt \tag{11}$$

测地线及其长度的计算一般是利用变分法进行的[9]，但利用变分法求解从效率上讲并不十分令人满意. 本文中将使用一个新的计算方法：

考虑 $u(t), v(t)$，二者满足 Euler 等式：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial u'}=\frac{\partial F}{\partial u} \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial v'}=\frac{\partial F}{\partial v} \tag{13}$$

其中函数 $F(u,v,u',v')$ 即为(11)式中的积分式，如前所述，t 取为测地线的弧长参数，将 F 代入(12)，(13)中可得：

$$\frac{d^2u}{ds^2}+d_{11}\cdot\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2d_{12}\cdot\left(\frac{du}{ds}\right)\cdot\left(\frac{dv}{ds}\right)+d_{22}\cdot\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0$$

$$\frac{d^2v}{ds^2}+d'_{11}\cdot\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2d'_{12}\cdot\left(\frac{du}{ds}\right)\cdot\left(\frac{dv}{ds}\right)+d'_{22}\cdot\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0$$

其中

$$d_{11}=\frac{\vec{n}\cdot(r_{uu}\times r_v)}{|r_u\times r_v|}, d_{12}=\frac{\vec{n}\cdot(r_{uv}\times r_v)}{|r_u\times r_v|}, d_{22}=\frac{\vec{n}\cdot(r_{vv}\times r_v)}{|r_u\times r_v|}$$

$$d_{11}'=\frac{\vec{n}\cdot(r_{uu}\times r_u)}{|r_u\times r_v|}, d_{12}'=\frac{\vec{n}\cdot(r_{uv}\times r_u)}{|r_u\times r_v|}, d_{22}'=\frac{\vec{n}\cdot(r_{vv}\times r_u)}{|r_u\times r_v|}$$

其中 $\vec{n}$ 是单位法向量.

这样可以得到微分等式(4 个一阶微分等式)

$$\frac{du}{ds} = u_1, \qquad \frac{dv}{ds} = v_1$$

$$\frac{du_1}{ds} = -d_{11}u_1^2 - 2d_{12}\cdot u_1\cdot v_1 - d_{22}\cdot v_1^2$$

$$\frac{dv_1}{ds} = -e_{11}u_1^2 - 2e_{12}\cdot u_1\cdot v_1 - e_{22}\cdot v_1^2$$

给定 u,v,u_1,v_1 的初值，利用变步长变阶的 Adams 算法可以十分方便地计算出测地线，实验结果表明使用该方法比变分法求测地线更为有效. 利用上述方法可以求出测地线上的若干离散点，然后利用这些离散点拟合成表示路径的 NURBS 曲线.

4 NURBS 曲面的自适应划分与定界搜索

一般处理参数曲面的传统方法是将其均匀离散成若干子曲面片，然后利用平面片逼近这些曲面片，这种处理方法的优点在于处理简单且统一. 但是在利用 NURBS 曲面模拟自然地形时，由于曲面上各点的曲率差别较大，此时若采用均匀分割均匀逼近的方法则效果并不理想. 为了适应自然地形的处理，本文采用了自适应的划分方法，依据曲面上各点的曲率大小决定曲面分割密度. 通过平坦性测试进行 NURBS 曲面的自适应划分. 使得曲面片的 4 个角点以及中心点处的切矢(u 向切矢，v 向切矢)和法矢满足：

$$1 - T_i\cdot T_j < \varepsilon_1, \qquad 1 - N_i\cdot N_j < \varepsilon_2$$

其中 $T_i(i=0,1,\cdots,4)$，$N_i(i=0,1,\cdots,4)$分别是 i 点处的切矢及法矢，而 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 则分别为切矢容差与法矢容差，通过控制 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 的大小可控制平面片与子曲面片之间的逼近程度.

对曲面片进行自适应划分后，曲面的处理则转化为对其逼近的平面片的处理. 时间最优路径的规划算法则是基于该曲面的逼近平面片上进行的.

时间最优路径的规划利用 A* 算法，该算法在每个结点处的费用函数 T_{fi} 记为

$$T_{fi} = T_{gi} + T_{hi}$$

其中 T_{gi} 为从路径起始点到当前结点所使用的时间，T_{hi} 则为从当前结点到目标结点所需时间的估计. 记 V_0 为车体在路径起始点的初速度，$V_0^{(i)}$ 为第 i 个路径段的初速度，$V_f^{(i)}$ 是第 i 个路径段的末速度，则 $V_f^{(i)}$ 与 $V_0^{(i+1)}$ 满足下述关系：

$$\begin{cases} V_0^{(1)} = V_0 \\ V_0^{(i+1)} = V_f^{(i)} \qquad (i = 0,1,\cdots,n-1) \end{cases}$$

利用第 1 节中的车体运动方程，即可计算出车体在每一结点上的估价时间. 从中间某一结点开始所搜索的下一结点为“有助”于到达目标的结点，即下一结点与目标结点之间的连线与目标方向的夹角不超过 90°. 在带有障碍物的地形上进行路径规划时，若下一结点位于不可逾越的区域，则其估价函数值升为∞，从而保证了规划的路径不通过这些区域，其中结点是否位于内环的判别算法采用射线判别法，在此不再多加分析.

5 路径的 NURBS 表示

在求得的距离最短路径和时间最优路径中均是由若干首尾相连的直线段拼接而成. 首先在曲面的参数域上将求得的离散点拟合成一个二维曲线，然后将该二维曲线映射至实际

三维空间中，就可得到曲面上的一条 NURBS 表示的路径.

设一个最优路径上的若干离散点为 $P[i](i=0,1,\cdots,n)$，这里采用 3 次 NURBS 曲线来拟合所求得的路径：

首先利用向心模型计算结点矢量 $t[j](j=0,1,\cdots,n+3)$，其中：

$$t_0=t_1=t_2=t_3=0.0$$

$$t_n=t_{n+1}=t_{n+2}=t_{n+3}=1.0$$

$$t_j=\frac{\sum_{i=3}^{j}|P_{i+1}-P_i|}{\sum_{i=3}^{n-1}|P_{i+1}-P_i|}$$

计算出结点矢量以后，设型值点所对应的 t 值为 ξ_j，ξ_j 的计算公式为：

$$\xi_j=\frac{1}{3}(t_{j+1}+t_{j+2}+t_{j+3})$$

这样由 NURBS 的计算公式(设控制点权值为 1.0)，可得：

$$P(t)=\sum_{j=0}^{n}Q_j\cdot B_{j,3}(t)$$

由型值点及其所对应的参数值可以反算出该路径的控制点，从而完成了该最优路径的 NURBS 表示.

6　实验结果与结论

本文给出的方法已在 Sun 工作站(Sparc 1+)上用 C 语言编程实现，实验结果十分令人满意，在进行距离最短路径规划和时间最优路径规划时，所用时间仅为 10 秒左右. 因篇幅关系，例图省略.

本文利用 Trimmed NURBS 曲面模拟具有障碍物的自然地形，并使用了测地线计算的一种新方法，在综合考虑车体动力学、地形拓扑与曲面特性等多种因素的情形下，利用启发式搜索算法在自适应划分的曲面网格上进行距离最优与时间最优路径规划，该方法与利用平面子剖分，加权区域表示以及常规优化等方法比较，具有地形表示准确，路径最优性易于获得，而且搜索精度可自行调整，搜索速度快等优点，根据曲面的特性，如采用 A_ϵ^* 等搜索算法，在适当放宽最优性的前提下，还可进一步提高搜索速度，在一定程度上可满足局部规划或实时重规划的要求[11]，同时配以诸如消除网格畸偏以及采用空间曲线光滑等措施，可得到比其它方法在性能上更为优越的最优路径.

参考文献

1　Jacobs P, Canny J. Planning smooth paths for mobile robots. In: Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1989. 2—7.

2　Kanayama Y, Yuta S I. Vehicle path specification by a sequence of straight lines. IEEE J. on Robotics and Automation, 1988, 4(3): 265—276.

3　Kanayama Y, Hartman B I. Smooth local path planning for autonomous vehicle. In: Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1989. 1265—1270.

4　Nelson W. Continuous curvature paths for autonomous vehicles. In: Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1989. 1260—1264.

5 Gaw D, Meystel A. Minimum—time navigation of an unmanned mobile robot in a $2\frac{1}{2}$D world with obstacles. In: Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1986. 1670—1677.

6 Carrioli L, Diani M. A $2\frac{1}{2}$D algorithm for the shortest path search running on 2—D hardware. In: Proc. IEEE Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems, 1990.

7 Shiller Z, Gwo Y R. Dynamic motion planning of autonomous vehicles. IEEE Trans. on Robotics and Automation, 1991, **7**(2): 241—249.

8 Piegl L. On NURBS: a survey. IEEE Trans. on Computer Graphics and Applications, 1991, **11**(1): 55—71.

9 陈维桓. 微分几何初步. 北京:北京大学出版社, 1990.

10 DeBoor C. Practical guide to splines. Springer—Verlag, New York, 1978.

11 Wang Hong, Zhang Bo. Spatial information processing and hierarchical path planning for an intelligent mobile robot. Proc. Int. Conf. on Intelligent Information Processing and Systems (ICIIP'92), International Academic Publishers, Beijing, 1992. 295—298.

A METHOD FOR PLANNING THE PATH OF MOBILE ROBOT MOVING ON GENERAL TERRAIN

Wang Hong Wang Xuefu Zhang Bo Sun Jiaguang

(*Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing* 100084)

Abstract In this paper, a new method is presented for planning the motion of a mobile robot moving on general terrains. The terrains are represented by NURBS surfaces and the terrains with obstacles or collisional regions are represented by Trimmed NURBS surfaces. The concept of a geodesic and its computation method, as well as A^* search algorithm are used to obtain the path of shortest distance and time optimal path between given any two given points on general terrains. It considers robot vehicle dynamics, terrain topography and surface features. The paths are represented by NURBS curves. The adaptability and efficiency of this method are shown by experimental results.

Key words Robot, path planning*, artificial intelligence, spline function.