第5卷第4期
1994年4月

软件学报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol. 5, No. 4
Apr. 1994

PCF的信息系统模型*

王美清

(福州大学数学系,福州 350002)

摘要 带类型的λ—演算是一个逻辑系统,它可以作为程序语言的基础. Plotkin所引进的PCF就是这样一类程序语言. Plotkin构造了PCF的一个模型,然后讨论与这个模型相关的指称语义和操作语义之间的配合问题——简单配合和完全配合. 本文利用Scott引进的信息系统概念构造PCF的另一种模型,并证明与这个模型对应的指称语义与操作语义是完全配合的.

关键词 操作等价,指称等价,完全配合,信息系统.

λ—演算由Church在三十年代引入,是一个不带类型的逻辑系统. 它不仅是作为研究程序语言语义的工具,而且它本身就作为程序语言的基础. 实际上大部分程序语言都是带类型的,如PASCAL语言等. 因此也研究带类型的λ—演算[1~3].

对于一个程序语言,需要考虑它的操作语义和指称语义,以及这两种语义之间的关系. 一般来说,这两种语义是简单配合的,即:一个程序的操作语义和指称语义是一致的. 但是往往要求有更进一步的配合,我们称它完全配合. 这个概念是Milner[4]引进来的,它的含意如下:对于语言L的任意两个项t_1,t_2,不一定是程序,如果t_1和t_2的指称语义一样,就说t_1和t_2指称等价;如果在任意含t_1的程序中,把t_1换成t_2后,其操作语义并不改变,同样在任何含t_2的程序中,把t_2换成t_1后,程序的操作语义也不改变,就称t_1和t_2操作等价两种语义完全配合就是要求这两种等价性是一致的,即:t_1、t_2指称等价 *iff* t_1、t_2操作等价. 能够与操作语义完全配合的指称语义模型称为是完全抽象的(fully abstract). 完全抽象模型完全按照可以观察的I/O形为来区分项的等价与否,避免了过细的语义划分,这在程序转换(program transformation)和严格性分析(strictness analysis)中都有重要的应用[5,6],因此是很有意义的.

Plotkin[7]引进了程序语言PCF,并研究了它的语义. 他给出PCF的一个模型,这个模型所对应的指称语义与操作语义是简单配合的,但不是完全配合的,也就是说模型不是完全抽象的. 但Plotkin证明,如果在PCF中加入一些新的常量,即有某种平行性质的常量,那么两种语义就是完全配合的,模型成为完全抽象的模型.

本文利用信息系统构造PCF的另一模型,这个模型是完全抽象的,也就是说它所对应的指称语义与操作语义是完全配合的. 模型的语义域不是平台(flat),因此和Plotkin所给

* 本文1991年8月30日收到,1991年12月30日定稿
作者王美清,27岁,助教,主要研究领域为计算机理论科学.
本文通讯联系人:王美清,福州 350002,福州大学数学系

的模型是不同构的.信息系统是Scott[8]在1982年引进来的.Thatte[9]曾利用它来构造方程逻辑的模型.

1 PCF的操作语义

PCF(Programming Language of Computable Functions)是可计算函数的程序语言,此语言是一种带类型的λ—演算,是Plotkin(1977)引进的[7],其特点是具有两个基本类型bool及nat,每个类型都带有常量.

象通常那样定义闭项和上下文.程序即为具有基本类型的闭项.

R表示PCF的推导规则,它满足Church—Rosser性质.$\underset{R}{\rightarrow}$是由这些推导规则给出的两个项之间的关系,$\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}$是$\underset{R}{\rightarrow}$的传递自反闭包.

定义1.1. 设P是程序,d是基本类型常量,若$P\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}d$,就说$P$的操作语义等于$d$,记为$Eval_R(P)=d$.

定义1.2. 两个项t_1,t_2若满足:对任何使$C[t_1]$和$C[t_2]$为程序的上下文$C[\ ]$,有

$$Eval_R(C[t_1])=Eval_R(C[t_2])$$

则称t_1和t_2操作等价.

下面用$\langle t\rangle$表示t的所有上下文,讨论操作等价与上下文之间的关系.先给出一个预备定理.

预备定理1.1. 令t_σ,t'_σ是类型为σ的项,若$t_\sigma\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}t'_\sigma$,则对任何适合$\sigma$的上下文$C[\ ]$,都有$C[t_\sigma]\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}C[t'_\sigma]$.

证明只需对$C[\ ]$的结构进行归纳即可.

定义1.3. 设T为所有项的集合,$t\in T$,$B\subseteq T$,a为基本类型常量,定义

$\langle t\rangle_a=\{t$的上下文$C[\ ]\,|\,C[t]\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}a\}$

$\langle t\rangle=\{\langle t\rangle_a\,|\,a$是基本类型常量$\}$

$\langle B\rangle_a=\bigcup_{t\in B}\langle t\rangle_a$.

$\langle B\rangle=\{\langle B\rangle_a\,|\,a$为基本类型常量$\}$.

定义1.4. 设$B_1,B_2\in T$,若对任何基本类型常量a,都有

$$\langle B_1\rangle_a\subseteq\langle B_2\rangle_a$$

则说$\langle B_1\rangle\leqslant\langle B_2\rangle$.

由上述定义可知,若$t_1,t_2\in T$,则$\langle t_1\rangle=\langle t_2\rangle$ *iff* 对任何的基本类型常量a,有$\langle t_1\rangle_a=\langle t_2\rangle_a$.

定理1.2. 若$t_\sigma\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}t'_\sigma$,则$\langle t_\sigma\rangle=\langle t'_\sigma\rangle$.

证明:设$C[\ ]$是适合类型σ的上下文,d是基本类型常量,且$C[t_\sigma]\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}d$,也就是说$C[\ ]$

$\in \langle t_\sigma \rangle_d$.

根据预备定理 1.1，有 $$C[t_\sigma] \xrightarrow[R]{*} C[t'_\sigma]$$

由 Church—Rosser 性质，可知

$$C[t'_\sigma] \xrightarrow[R]{*} d,$$

也就是 $$C[\ ] \in \langle t'_\sigma \rangle_d,$$

所以 $\langle t_\sigma \rangle_d \subseteq \langle t'_\sigma \rangle_d$ 从而 $\langle t_\sigma \rangle \leqslant \langle t'_\sigma \rangle$ (1)

另一方面，若存在适合类型 σ 的上下文 $D[\ ]$ 和基本类型常量 d，使得

$$D[t'_\sigma] \xrightarrow[R]{*} d,$$

则 $$D[t_\sigma] \xrightarrow[R]{*} D[t'_\sigma] \xrightarrow[R]{*} d,$$

所以 $D[\ ] \in \langle t_\sigma \rangle_d$，也就是 $\langle t'_\sigma \rangle_d \subseteq \langle t_\sigma \rangle_d$，从而

$$\langle t'_\sigma \rangle \leqslant \langle t_\sigma \rangle \tag{2}$$

由(1)和(2)，得 $$\langle t_\sigma \rangle = \langle t'_\sigma \rangle$$ □

定理 1.3. 令 t_1, t_2 是类型为 σ 的项，对任何使得 $C[t_1]$ 和 $C[t_2]$ 为程序的上下文 $C[\ ]$.

$$Eval_R(C[t_1]) = Eval_R(C[t_2]) \ iff \ \langle t_1 \rangle = \langle t_2 \rangle$$

证明：(1)*if* 假定 $\langle t_1 \rangle = \langle t_2 \rangle$，$C[\ ]$ 是使得 $C[t_1]$ 和 $C[t_2]$ 为程序的上下文.

i)若存在基本类型常量 d，使得 $C[t_1] \xrightarrow[R]{*} d$，则 $C[\ ] \in \langle t_1 \rangle_d$，由于 $\langle t_1 \rangle = \langle t_2 \rangle$，因此有 $C[\ ] \in \langle t_2 \rangle_d$. 所以 $C[t_2] \xrightarrow[R]{*} d$，那么

$$Eval_R(C[t_2]) = d = Eval_R(C[t_1])$$

同理，若 $Eval_R(C[t_2]) = d$，则 $Eval_R(C[t_1]) = d$.

ii)若不存在基本类型常量 d，使 $C[t_1] \xrightarrow[R]{*} d$，则 $C[t_2]$ 也没有操作语义值. 否则，设 $Eval_R(C[t_2]) = d'$，则由 *i*)，$Eval_R(C[t_1]) = d'$，这是矛盾的.

(2)*only if* 假定对于任何使得 $C[t_1]$，$C[t_2]$ 为程序的上下文 $C[\ ]$，或者 $Eval_R(C[t_1])$ 和 $Eval_R(C[t_2])$ 都不存在，或者

$$Eval_R(C[t_1]) = Eval_R(C[t_2]).$$

设 $D[\ ] \in \langle t_1 \rangle_d$，即 $D[t_1] \xrightarrow[R]{*} d$，$d$ 为基本类型常量. 则由假定，$D[t_2] \xrightarrow[R]{*} d$，即 $D[\ ] \in \langle t_2 \rangle_d$. 所以 $\langle t_1 \rangle_d \subseteq \langle t_2 \rangle_d$，从而 $\langle t_1 \rangle \leqslant \langle t_2 \rangle$；同理 $\langle t_2 \rangle \leqslant \langle t_2 \rangle$. 因此 $\langle t_1 \rangle = \langle t_2 \rangle$.

2 信息系统

信息系统(information system)这个概念是由 D. Scott[8]在建立指称语义域的理论时提出的. 后来 S. Thatte[9]用信息系统构造方程程序语言(Equational Programming Language)的模型.

2.1 信息系统

一个信息系统是一个三元组 $\&=(D,con,\vdash)$,其中 D 是一个集合,其元素称为命题,每一个命题都给出由信息系统所定义的数据元素的有限信息. Con 是 D 的有限子集的集合,这些子集包含互相相容的命题. $\vdash$ 是 D 和 Con 之间的关系,如果一个命题 Q 所表达的信息完全包含在一个相容命题集合所表达的整体信息中,则此集合推出命题 Q. 精确定义如下:

定义 2.1. 满足下列条件的三元组 $\&=(D,Con,\vdash)$是一个信息系统:

(1)若 $B\subseteq H\in Con$,则 $B\in Con$

(2)若 $d\in D$,则$\{d\}\in Con$.

(3)若 $B\in Con,d\in D,B\vdash d$ 则 $B\cup\{d\}\in Con$

(4)若 $B\in Con$ 且 $b\in B$,则 $B\vdash b$

(5)若 $B,E\in Con,B\vdash E,E\vdash d$ 则 $B\vdash d$.

其中 $B\vdash E$ iff $\forall a\in E,B\vdash a$.

由信息系统 $\&$ 所定义的数据元素定义如下:

定义 2.2. 若 $E\subseteq D$ 满足

(1)若 $B\subseteq E$ 且 B 有限,则 $B\in Con$.

(2)若 $B\subseteq E$ 且 $B\vdash a$ 则 $a\in E$.

就说 E 是 $\&$ 的一个数据元素. $\&$ 的所有数据元素的集合记为$|\&|$.

[说明]满足条件(1)的命题集合 E 称为相容的,也就是说相容集合的有限子集都属于 Con. 条件(2)是说 E 对于 $\vdash$ 是封闭的.

考虑$<|\&|,\subseteq>$,其中$\subseteq$是集中的包含关系,可以证明它是一个相容的代数的 CPO,所以可以作为语义域.

对集合 $B\subseteq D$ 可以定义它的推导闭包 $\overline{B}$.

定义 2.3. 令 $B\subseteq D,B$ 的推导闭包 $\overline{B}=\{a\mid H\subseteq B$ 且 $H\vdash a\}$.

直观地说,$\overline{B}$ 是 B 中相容集合的推论集.

预备定理 2.1. $B\subseteq D$,则 $\overline{B}\in|\&|$ iff B 是相容的.

证明可由定义直接得到. □

2.2 逼近映射(approximable map)及信息系统的直积

定义 2.4. 令 $\&_1=(D_1,Con_1,\vdash_1)$,$\&_2=(D_2,Con_2,\vdash_2)$是两个信息系统,逼近映射 $f:\&_1\rightarrow\&_2$是 Con_1 和 Con_2 之间的二元关系,满足

(1)$\phi f\phi$

(2)若 AfB_1,AfB_2,则 $Af(B_1\cup B_2)$

(3)若 $A'\vdash_1 A,AfB,B\vdash_2 B'$,则 $A'fB'$.

f 可以看成域 $|\&_1|$ 到 $|\&_2|$ 的连续映射. 对于 $E\in|\&_1|$, $f(E)=\{x\in D_2|\exists\ A\subseteq E$, 使得 $A\in Con_1$ 且 $Af\{x\}\}$.

定义 2.5. 令 $\&_i=(D_i,Con_i,\vdash_i)$, $(i=1,\cdots,k)$ 是信息系统. 直积 $\&_1\times\&_2\times\cdots\times\&_k$ 是三元组 $\&=(D,Con,\vdash)$, 其中

(1) $D=D_1\times D_2\times\cdots\times D_k$.

(2) $Con=\{(A_1,\cdots,A_k)|A_i\in Con_i,1\leqslant i\leqslant k\}$

(3) $A=(A_1,\cdots,A_k)$, $d=(d_1,\cdots,d_k)$, $A\vdash d$ iff $A_i\vdash_i d_i$, $1\leqslant i\leqslant k$.

容易证明, & 也是一个信息系统.

3　PCF 的指称语义

3.1　PCF 的信息系统

对每一 $\sigma\in Typ$, 相应有一个信息系统 $\&_\sigma$.

定义 3.1. 令 $\sigma\in Typ$, 若 $\&\sigma=<T_\sigma,Con_\sigma,\vdash_\sigma>$, 其中

(i) T_σ 是所有类型为 σ 的项的集合;

(ii) $B\in Con_\sigma$ iff $B\subseteq T_\sigma$, B 是有限集且存在 $t_\sigma\in T_\sigma$, 使得 $<B>\leqslant<t_\sigma>$;

(iii) 对于任何 $B\in Con_\sigma$, 任何 $t\in T_\sigma$, $B\vdash_\sigma t$ iff $<t>\leqslant<B>$.

就说 $\&=\{\&_\sigma\}$ 是 PCF 的信息系统.

易证, $\&_\sigma$ 是一个信息系统.

定义 3.2. 设 $t_\sigma\in T_\sigma$, $t_\sigma\uparrow R=\{v|t_\sigma\xrightarrow[R]{*}v\}$.

显然有 $t_\sigma\uparrow R\subseteq T_\sigma$.

定理 3.1. $\overline{t_\sigma\uparrow R}\in|\&_\sigma|$.

证明: 由预备定理 2.1, 只需证明 $t_\sigma\uparrow R$ 是相容的, 即证明: 设 $A\subseteq t_\sigma\uparrow R$, A 有限则 $A\in Con_\sigma$.

设有限集 $A\subseteq t_\sigma\uparrow R$, 由定义 3.2 可知, 对任一 $a\in A$, 有 $t_\sigma\xrightarrow[R]{*}a$. 由定理 1.2, 得 $<t_\sigma>=<a>$. 因此 $<A>=<t_\sigma>$. 由定义 3.1 可知 $A\in Con_\sigma$. □

3.2　逼近映射 f 和 g

定义 3.3. f 定义为一个关系族 $\{f_{\sigma\tau}|\sigma,\tau\in Typ\}$, 其中 $f_{\sigma\tau}$ 是 Con_τ 和 $Con_{\sigma\to\tau}$ 之间的二元关系, 由下列条件给出:

$(f0)$ $\phi f_{\sigma\tau}\phi$

$(f1)$ 若 $\lambda x_\sigma m_\tau\xrightarrow[R]{*}t_{\sigma\to\tau}$, 则 $\{m_\tau\}f_{\sigma\tau}t_{\sigma\to\tau}$.

$(f2)$ 若对任何 $b\in B$, $Af_{\sigma\tau}b$ 则 $Af_{\sigma\tau}B$.

$(f3)$ 若 $A'\vdash A$, $B\vdash B'$ 且 $Af_{\sigma\tau}B$ 则 $A'f_{\sigma\tau}B'$.

定义 3.4. g 定义为一个关系族 $\{g_{\sigma\tau}|\sigma,\tau\in Typ\}$, 其中 $g_{\sigma\tau}$ 是 $Con_{\sigma\to\tau}\times Con_\sigma$ 和 Con_τ 之间的二元关系, 由下列条件给出:

$(g0)$ $\phi g_{\sigma\tau}\phi$

(g1)若 $m_{\sigma\to\tau}n_\sigma \xrightarrow[R]{*} t_\tau$,则$\{(m_{\sigma\to\tau},n_\sigma)\}g_{\sigma\tau}t_\tau$.

(g2)若对任何 $b\in B$,$Ag_{\sigma\tau}b$ 则 $Ag_{\sigma\tau}B$.

(g3)若 $A'\vdash A$,$B\vdash B'$ 且 $Ag_{\sigma\tau}B$ 则 $A'g_{\sigma\tau}B'$.

定理 3.2. 对任何 $\sigma,\tau\in Typ$,$f_{\sigma\tau}$和 $g_{\sigma\tau}$都是逼近映射.

证明:只需证明 $f_{\sigma\tau}$,$g_{\sigma\tau}$满足逼近映射定义(定义 3.4)的条件(2),即若 $Ah_{\sigma\tau}B_1$,$Ah_{\sigma\tau}B_2$,则 $Ah_{\sigma\tau}(B_1\cup B_2)$,其中 $h_{\sigma\tau}$为 $f_{\sigma\tau}$或 $g_{\sigma\tau}$.

(Ⅰ)由条件(f2),(g2),只需证明 $B_1\cup B_2\in Con$ 即可.

而由定义 3.1,只需证明存在 t,使得$\langle B_i\rangle\leqslant\langle t\rangle$,$i=1,2$,就有 $B_1\cup B_2\in Con$.

由 $h_{\sigma\tau}$定义可知,存在 Y_1,Y_2,W_1,W_2,使得 $A\vdash Y_1$,$A\vdash Y_2$,$Y_1h_{\sigma\tau}W_1$,$Y_2h_{\sigma\tau}W_2$,$W_1\vdash B_1$,$W_2\vdash B_2$,且其中 $Y_i,W_i(i=1,2)$满足:$\forall\ w_i\in W_i$,$\exists\ y_i\in Y_i$,使得 $y_ih_{\sigma\tau}w_i$,$i=1,2$.

因此,只要证明存在 t,使得$\langle W_1\rangle\leqslant\langle t\rangle$,$\langle W_2\rangle\leqslant\langle t\rangle$,由此就可得出$\langle B_i\rangle\leqslant\langle W_i\rangle\leqslant\langle t\rangle$,$i=1,2$.

(Ⅱ)若 $h_{\sigma\tau}=f_{\sigma\tau}$,那么 $h_{\sigma\tau}$是 Con_τ 与 $Con_{\sigma\to\tau}$之间的二元关系,所以 $A\in Con_\tau$.

由 Con_τ 的定义,存在 $t_\tau\in T_\tau$,使得$\langle A\rangle\leqslant\langle t_\tau\rangle$,由于 $A\vdash Y_1$,因此有

$$\langle Y_1\rangle\leqslant\langle A\rangle\leqslant\langle t_\tau\rangle$$

从(Ⅰ)可知,对任意 $w_{\sigma\to\tau}\in W_1$,存在 $y_\tau\in Y_1$,$\langle y_\tau\rangle\leqslant\langle Y_1\rangle\leqslant\langle t_\tau\rangle$,使得 $y_\tau f_{\sigma\tau}w_{\sigma\to\tau}$,即 $\lambda x_\sigma y_\tau \xrightarrow[R]{*} w_{\sigma\to\tau}$,因此有(据定理 1.2).

$$\langle w_{\sigma\to\tau}\rangle=\langle\lambda x_\sigma\, y_\tau\rangle \qquad (*)$$

另一方面,由$\langle y_\tau\rangle\leqslant\langle t_\tau\rangle$可得$\langle\lambda x_\sigma y_\tau\rangle\leqslant\langle\lambda x_\sigma t_\tau\rangle$,这可证明如下:

对任何适合类型 $\sigma\to\tau$ 的上下文 $C[\ ]$和基本类型常量 d,若满足 $C[\lambda x_\sigma y_\tau]\xrightarrow[R]{*}d$,则 $C[\lambda x_\sigma[\ ]]\in\langle y_\tau\rangle_d$. 因为$\langle y_\tau\rangle\leqslant\langle t_\tau\rangle$,所以 $C[\lambda x_\sigma[\ ]]\in\langle t_\tau\rangle_d$,即 $C[\lambda x_\sigma,t_\tau]\xrightarrow[R]{*}d$,因此

$$\langle\lambda x_\sigma y_\tau\rangle\leqslant\langle\lambda x_\sigma t_\tau\rangle \qquad (**)$$

由(*)和(**)式可得,对任意 $w_{\sigma\to\tau}\in W_1$,有

$$\langle w_{\sigma\to\tau}\rangle\leqslant\langle\lambda x_\sigma t_\tau\rangle$$

因此

$$\langle W_1\rangle\leqslant\langle\lambda x_\sigma t_\tau\rangle$$

同理有

$$\langle W_2\rangle\leqslant\langle\lambda x_\sigma t_\tau\rangle$$

(Ⅲ)若 $h_{\sigma\tau}=g_{\sigma\tau}$,同(Ⅱ) □

3.3 PCF 的指称语义

$\langle\{|\&_\sigma|\},\varepsilon_R\rangle$是 PCF 的一个解释,其中语义函数 ε_R 定义如下:

$\varepsilon_R[|d|]=\overline{d\uparrow R}$,$d$ 为常量.

$\varepsilon_R[|x|]=\overline{x\uparrow R}$，$x$ 为常量.

$\varepsilon_R[|\lambda x_\sigma m_\tau|]=f_{\sigma\tau}(\varepsilon_R[|m_\tau|])$

$\varepsilon_R[|m_{\sigma\to\tau}n_\sigma|]=g_{\sigma\tau}(\varepsilon_R[|m_{\sigma\to\tau}|],\varepsilon_R[|n_\sigma|])$.

显然，$<\{|\&\sigma|\},\varepsilon_R>$是 PCF 的一个模型.我们称它为 PCF 的信息系统模型.

定义 3.5. 两个项 t_1,t_2 若满足 $\varepsilon_R[|t_1|]=\varepsilon_R[|t_2|]$，则称 t_1 和 t_2 是指称等价的.项 t 的指称语义和它的导出集 $t\uparrow R$ 之间有下列关系.

定理 3.3. $\varepsilon_R[|t|]=\overline{t\uparrow R}$.

证明：对 t 的结构进行归纳：

(1)对常量 d，由定义 $\varepsilon_R[|d|]=\overline{d\uparrow R}$.

(2)对变量 x，由定义 $\varepsilon_R[|x|]=\overline{x\uparrow R}$.

(3)对于 $t=t_1t_2$，其中 $t_1:\sigma\to\tau,t_2:\sigma$. 假定 $\varepsilon_R[|t_1|]=\overline{t_1\uparrow R},\varepsilon_R[|t_2|]=\overline{t_2\uparrow R}$，要证 $\varepsilon_k[|t_1t_2|]=\overline{t_1t_2\uparrow R}$.

由定义，$\varepsilon_R[|t_1t_2|]=g_{\sigma\tau}(\overline{t_1\uparrow R},\overline{t_2\uparrow R})$，因此只需要证 $g_{\sigma\tau}(\overline{t_1\uparrow R},\overline{t_2\uparrow R})=\overline{t_1t_2\uparrow R}$.

i)先证 $g_{\sigma\tau}(\overline{t_1\uparrow R},\overline{t_2\uparrow R})\subseteq\overline{t_1t_2\uparrow R}$，即求证：若 $A=(A_1,A_2)\subseteq(\overline{t_1\uparrow R},\overline{t_2\uparrow R})$，$A\in Con_{\sigma\to\tau}\times Con_\sigma$，且 $Ag_{\sigma\tau}B$，则 $B\subseteq\overline{t_1t_2\uparrow R}$.

从 $(A_1,A_2)\subseteq(\overline{t_1\uparrow R},\overline{t_2\uparrow R})$ 可得：$A_i\subseteq\overline{t_i\uparrow R}$，$i=1,2$，所以对 $\forall\ a_i\in A_i$，$\exists\ V_i\subseteq t_i\uparrow R$，使得 $V_i\vdash a_i$，$i=1,2$，因此由定理 1.2，可得 $<a_i>\leqslant<V_i>=<t_i>$，从而 $<A_i>\leqslant<t_i>$，$i=1,2$，所以有

$$<(A_1,A_2)>\leqslant<(t_1,t_2)> \qquad (*)$$

另一方面，从 $Ag_{\sigma\tau}B$，根据 $g_{\sigma\tau}$的定义可得，存在 Y,W，使得 $A\vdash Y,W\vdash B$ 且 $\forall\ w\in W$，$\exists\ y\in Y$ 使得 $yg_{\sigma\tau}w$.

由$(*)$和定义 3.1，得 $\{(t_1,t_2)\}\mid(A_1,A_2)=A\vdash Y\vdash\{y\}$.

由 $g_{\sigma\tau}$的定义得 $(t_1,t_2)g_{\sigma\tau}w$，即 $t=t_1t_2\xrightarrow[R]{*}w$. 所以 $w\in t_1t_2\uparrow R$，从而 $W\subseteq t_1t_2\uparrow R$. 由于 $W\vdash B$，因此有

$$B\subseteq\overline{t_1t_2\uparrow R}$$

ii)证明 $\overline{t_1t_2\uparrow R}\subseteq g_{\sigma\tau}(\overline{t_1\uparrow R},\overline{t_2\uparrow R})$，为此，只需证明

$$t_1t_2\uparrow R\subseteq g_{\sigma\tau}(\overline{t_1\uparrow R},\overline{t_2\uparrow R}).$$

设 $v\in t_1t_2\uparrow R$，即 $t_1t_2\xrightarrow[R]{*}v$，所以有 $(t_1,t_2)g_{\sigma\tau}v$. 因为 $t_i\in\overline{t_i\uparrow R}$，$i=1,2$，由定义 2.1 可得

$$(\overline{t_1\uparrow R},\overline{t_2\uparrow R})\vdash(t_1,t_2)$$

由 $g_{\sigma\tau}$定义，有

$$(\overline{t_1\uparrow R},\overline{t_2\uparrow R})g_{\sigma\tau}v$$

所以有 $v\in g_{\sigma\tau}(\overline{t_1\uparrow R},\overline{t_2\uparrow R})$.

(4)对于 $m=\lambda x_\sigma t_\tau$，设 $\varepsilon_R[|t_\tau|]=\overline{t_\tau\uparrow R}$，要证 $\varepsilon_R[|m|]=\overline{\lambda x_\sigma t_\tau\uparrow R}$.

证明类似于(3). □

4 两种语义的配合问题

定理 4.1. 操作语义 $Eval_R$ 和指称语义 ε_R 是完全配合的，即 t_1,t_2 操作等价 iff t_1、t_2 指称等价.

证明：由定理 1.3，只需证明：对于任意项 t_1,t_2，有

$$\langle t_1\rangle=\langle t_2\rangle \ iff \ \varepsilon_R[|t_1|]=\varepsilon_R[|t_2|]$$

设 $\varepsilon_R[|t_1|]=\varepsilon_R[|t_2|]$，即$\overline{t_1\uparrow R}=\overline{t_2\uparrow R}$，则 $t_1\in\overline{t_2\uparrow R}$，因此有$\langle t_1\rangle\leqslant\langle t_2\rangle$；同理$\langle t_2\rangle\leqslant\langle t_1\rangle$，所以

$$\langle t_1\rangle=\langle t_2\rangle$$

若$\langle t_1\rangle=\langle t_2\rangle$，则根据闭包定义和 $\vdash$ 定义，有

$$t_1\in\overline{t_2\uparrow R},\ t_2\in\overline{t_1\uparrow R},$$

因此，

$$\overline{t_1\uparrow R}\subseteq\overline{t_2\uparrow R},\overline{t_2\uparrow R}\subseteq\overline{t_1\uparrow R}$$

所以

$$\overline{t_1\uparrow R}=\overline{t_2\uparrow R}$$

即

$$\varepsilon_R[|t_1|]=\varepsilon_R[|t_2|]$$

致谢 本文是在清华大学应用数学系张鸣华教授的指导下完成的，在此表示深深的谢意.

参考文献

1 Barendregt H. The lambda calculus: its syntax and semantics. North—holland, Amsterdam, 1984.

2 Gordon M, Milner A, Wadsworth C. Edinburgh LCF. LNCS 78, 1979.

3 Meyer A. What is a model of the lambda calculus? Information and Control, 1982;**52**:87—122.

4 Milner R. Fully abstract models of typed lambda calculi. Theoretical Computer Science, 1977;**4**:1—22.

5 Abramsky S. Strictness analysis and polymorphic invariance. In: Programs as Data Objects, LNCS 217, 1985:1—23.

6 Mycroft A. The theory and practice of transforming call—by—need into call—by—value. In: B. Robinet ed. International Symposium on Programming, LNCS 83, Berlin, Springer, 1980:269—281.

7 Plotkin G. LCF considered as a programming language. Theoretical Computer Science, 1977;**5**:223—255.

8 Scott D. Domains for denotational semantics. In: Automata, Languages and Programming, LNCS 140, 1982:577—613.

9 Thatte S. Towards a semantic theory for equational programming language. In: 1986 ACM Conference on LISP and Functional Programming, 1986:332—342.

THE INFORMATION SYSTEM MODEL OF PCF

Wang Meiqing

(*Department of Mathematics, Fuzhou University, Fuzhou* 350002)

Abstract Typed lambda—calculus is a logic system, which can be used as a programming language, such as Plotkin's PCF. Plotkin contructed a model for PCF, then he considered the matching problems between the related denotational semanitics and the operational semantics—simple match and complete match. In the present paper the authors construct another model for PCF using the concept of information system which was introduced by Scott in 1982. The authors prove that the denotational semantics are related to the model and the operational semantics are completely matched.

Key words Operational equivalence, denotational equivalence, complete match, information system.