加权T图的活性分析

许安国　　吴哲辉*

(山东矿业学院应用数学与软件工程系，泰安 271019)

ANALYSIS OF LIVENESS FOR WEIGHTED T—GRAPHS

Xu Anguo and Wu Zhehui

(*Shandong Institute of Mining and Technology*, *Taian* 271019)

Abstract　A set of necessary and sufficient conditions for the liveness of weighted T—graphs is given in this paper. This set of conditions involves the condition given in[1] for the liveness of marked graphs, i. e. the conclusion of [1] for the liveness of marked graphs is a special case of the conclusion given this paper for the liveness of weighted T—graphs.

摘要　本文给出加权T—图为活网的一组充分必要条件.这组条件包含了文献[1]对标识图(即T—图)活性分析的结果，即当每条弧的权都等于1时，本文的结果就化为文[1]给出的条件.

§0.引　言

当我们用Petri网来描述一个系统时，Petri网的活性反映了系统的无死琐性.因此，Petri网理论的早期研究者花费了很大的精力来研究Petri网的活性问题，并得到了T—图(标识图)、自由选择网等Petri网子类的活性充分必要条件[1-3].然而，判断一般Petri网为活网的充要条件(或算法)却一直未得到解答.后来，有人证明了对一般Petri网的活性判断可以归约为Petri网的可达性问题，[4]人们又希望通过对可达性的判断来解答活性问题.但对Petri网的可达性的判断问题，至今也还未解决.

本文对加权网的一个子类——加权T—图进行活性分析.所谓加权T—图，是这样一类Petri网：每个位置有唯一的一条输入弧和唯一的一条输出弧，但弧的权可以是任意正整数.显然，这是T—图的一种拓展.同T—图一样，对加权T—图的活性分析，关键是弄清变迁节引发时每个有向回路内标识的变化规律.因此，我们的分析工作从加权单回路网开始，先研究加权单回路网为活的充分必要条件，最后讨论一般加权T—图的活性问题.

---

* 本文1991年4月18日收到，1991年7月20日定稿.本文是国家自然科学基金资助课题.**许安国**，副教授，主要研究领域为Petri网理论及应用.**吴哲辉**，教授，主要研究领域为Petri网理论及应用，算法设计与分析.

本文的结果包含了文[1]中关于 T—图的活性的结论,即[1]的结果是本文的一个特殊情形.

§1. 加权单回路网的活性分析

定义 1:网 $N=(S,T;F,W)$ 称为加权单回路网当且仅当

$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$,$T=\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}$

$F=\{\bigcup_{i=1}^{n}(s_i,t_i)\}\cup(\bigcup_{i=1}^{n}(t_i,s_{i\oplus 1}))$

其中 $i\oplus 1=i(\mathrm{mod}\,n)+1$.

显然,加权单回路网是 n 元线性型网的一种拓展,对于后者,我们在[6]中已进行过讨论.本节中我们进一步对前者进行活性分析.记

$W(s_i,t_i)=a_i \qquad i=1,2,\cdots,n$

$W(t_i,s_{i\oplus 1})=b_i \qquad i=1,2,\cdots,n$

那么,加权单回路网可记为 $N(a_i,b_i)_n$.图 1 给出加权单回路网的一个示意图.

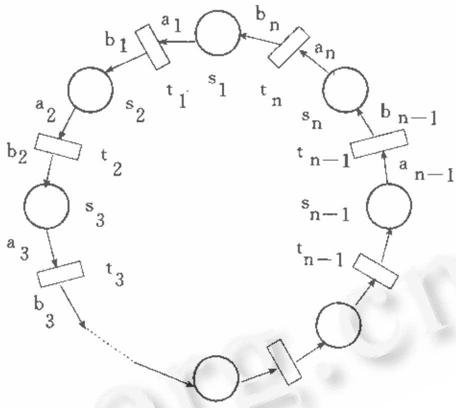

图1 加权单回路网

引理 1:$N(a_i,b_i)_n$ 是可重复网的充分必要条件是

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} b_i \qquad (1)$$

证明:$N(a_i,b_i)_n$ 的关联矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} -a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

如果(1)式成立,那么存在 n 维正整数向量

$$X=\begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ b_1 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & a_4 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

使得 $A^TX\geqslant 0$,因此 $N(a_i,b_i)_n$ 是可重复网.

反之,如果 $N(a_i,b_i)_n$ 是可重复网,则存在 n 维正整数向量 X 使 $A^TX\geqslant 0$,令 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,则用(2)左端代 A,解不等式组可得

$$\frac{x_i}{x_{i\oplus 1}}\geqslant\frac{a_{i\oplus 1}}{b_i} \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (4)$$

把(4)的 n 个不等式相乘便得到(1).

类似于上面的证明,还可以得到:

引理 2:$N(a_i,b_i)_n$ 是结构有界网的充分必要条件是

$$\prod_{i=1}^{n} b_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad (5)$$

定义 2：设 $N=(S,T;F,W)$ 为一个网，$N=(S,T;F',W')$ 称为 N 的逆网当且仅当任意 $x,y\in S\cup T$：

1) $(x,y)\in F\Leftrightarrow(y,x)\in F'$；

2) $W(x,y)=W'(y,x)$

即一个网 N 的逆网是把 N 中的每条弧反向，而各弧的权保持不变得到的网 $\tilde{N}$.

引理 3：加权单回路网 $N(a_i,b_i)_n$ 的逆网 $\tilde{N}(a_i,b_i)_n$ 也是一个加权单回路网，而且

1) $N(a_i,b_i)_n$ 是可重复的当且仅当 $\tilde{N}(a_i,b_i)_n$ 是结构有界的.

2) $N(a_i,b_i)_n$ 是结构有界的当且仅当 $\tilde{N}(a_i,b_i)_n$ 是可重复的.

证明：由引理 1 和引理 2 直接可以得到.

定义 3：设 M 为 $N(a_i,b_i)_n$ 的一个标识，如果存在标识 M' 和变迁节序列 σ 使得 $M'(\sigma>M$，则称 M' 是从 M 反向可达的. 记从 M 反向可达的全体标识的集合为 $R^{-1}(M)$.

显然，如果在 $N(a_i,b_i)_n$ 中有 $M'\in R^{-1}(M)$，则在逆网 $\tilde{N}(a_i,b_i)_n$ 中有 $M'\in R(M)$.

引理 4：设 M_1,M_2 为 $N(a_i,b_i)_n$ 的两个标识，且 $M_1\leqslant M_2(M_1\not\geq M_2)$，则对任意 $M_1'\in R^{-1}(M_1)$，都存在 $M_2'\in R^{-1}(M_2)$ 使得

$$M_1'\leqslant M_2'(M_1'\not\geq M_2')$$

证明：由 $M_1'\in R^{-1}(M_1)$，即存在 $\sigma\in T^*$，使得 $M_1'(\sigma>M_1$. 设 σ 的引发数向量为 X，则有

$$M_1=M_1'+A^TX$$

令 $$M_2'=M_2-A^TX$$

则 $$M_2'\geqslant M_1-A^TX=M_1'$$

从而 $M_2'(\sigma>$. 又由 $M_2'+A^TX=M_2$ 知 $M_2'(\sigma>M_2$，即 $M_2'\in R^{-1}(M_2)$.

下面我们讨论带初始标识的加权单回路网 $(N(a_i,b_i)_n,M_0)$ 的活性问题. 首先，如果 $(N(a_i,b_i)_n,M_0)$ 是活的，那么就要求 $N(a_i,b_i)_n$ 为可重复网，由引理 1 知 $N(a_i,b_i)_n$ 中各弧的权必须满足(1)式. 其次，我们考察 $N(a_i,b_i)_n$ 中一个特殊的标识

$$M^*=[a_1-1,a_2-1,\cdots,a_n-1]^T \tag{6}$$

易知，对 $N(a_i,b_i)_n$ 的一个标识 M，若 $M\leqslant M^*$，那么在 $(N(a_i,b_i)_n,M)$ 中每一个变迁节都不能引发，反之，若 $M\not\leq M^*$，则 $(N(a_i,b_i)_n,M)$ 中至少有一个变迁节可以引发. 我们称那些使得每个变迁节都不能引发的标识为死标识(注意：不活的标识不一定是死标识). 那么 M^* 就是 $N(a_i,b_i)_n$ 中的最大死标识. 我们还可以引伸一步：对 $N(a_i,b_i)_n$ 给定的一个初始标识 M_0，如果存在 $M\in R(M_0)$，使得 $M\leqslant M^*$，这时就没有一个变迁节能继续引发；反之，如果任意 $M\in R(M_0)$，都有 $M\not\leq M^*$，那么这个标识网就可以一直运行下去.

根据上面的分析，可得到下面的引理和定理.

引理 5：设 $N(a_i,b_i)_n$ 满足(1)式，且其初始标识 M_0 满足条件：任意 $M_1\in R^{-1}(M^*)$，$M_0\not\leq M_1$，则在标识网 $(N(a_i,b_i)_n,M_0)$ 中，任意 $M\in R(M_0)$ 都存在 t_j，使 $M(t_j>$.

证明：(用反证法)

设存在 $M\in R(M_0)$ 使得 $\forall\ t_i\in T:\neg M(t_i>$，则 $M\leqslant M^*$. 由 $M\in R(M_0)$，即 $M_0\in R^{-1}(M)$，根据引理 4，存在 $M_1\in R^{-1}(M^*)$ 使得 $M_0\leqslant M_1$. 这同假设相矛盾.

引理 6：设 $N(a_i,b_i)_n$ 满足(1)式，如果 $M_1\in R^{-1}(M^*)$，则 M_1 不是可重复标识. 即标识网 $(N(a_i,b_i)_n,M_1)$ 中不存在无限序列 σ，使得 $M_1(\sigma>$.

证明：设 $M_1(\sigma_1>M^*$，下面对 σ_1 的长度 $|\sigma_1|$ 用数学归纳法证明本引理.

当 $|\sigma_1|=1$ 时，即存在 $t_j\in T$，使得 $M_1(t_j>M^*$，我们用反证法证明不存在无限序列 σ，使 $M_1(\sigma>$. 若不然，设无限序列 σ 的第一个元素为 t_{i1}，即 $\sigma=t_{i1}t_{i2}\cdots$，①如果 $t_{i1}=t_j$，则有 $M_1(t_{i1}>M^*$，这时 t_{i2} 不能再引发，同 σ 是无限序列矛盾；②如果 $t_{i1}\neq t_j$，也就是说 $M_1(t_j>$ 且 $M_1(t_{i1}>$，注意 $N(a_i,b_i)_n$ 中不存在冲突，即它是持续网，从 M_1 引发 t_j 后得到的新标识应能使 t_{i1} 使能，这也同 $M_1(t_j>M^*$ 矛盾.

设 $|\sigma_1|=k$ 时，不存在无限序列 σ，使 $M_1(\sigma>$，下面证明当 $|\sigma_1|=k+1$ 时上述结论仍成立.

记 $\sigma_1=t_{j1}t_{j2}\cdots t_{jk}t_{jk+1}$，如果存在无限序列 $\sigma=t_{i1}t_{i2}\cdots$ 使得 $M_1(\sigma>$. 我们分三种情况讨论.

情况 1：若 $t_{i1}=t_{j1}$，则记 $M_1(t_{i1}>M_2$，那么从 M_2 到 M^* 的引发序列的长度为 k，由归纳法假设，M_2 中不存在无限序列，由 $M_1(t_{i1}>M_2$ 知，M_1 中也不存在无限序列 σ，使 $M_1(\sigma>$.

情况 2：若 $t_{i1}\neq t_{j1}$，但 σ_1 中存在 t_{jr} 使得 $t_{i1}=t_{jr}$，则由 $N(a_i,b_i)_n$ 的持续性，易知对

$$\sigma_2=t_{jr}t_{j1}\cdots t_{jr-1}t_{jr+1}\cdots t_{jk}t_{jk+1}$$

也有 $M_1(\sigma_2>M^*$，这时 σ_2 和 σ 的第一个元素相同，化为第 1 种情况.

情况 3：在序列 σ_1 中不出现 t_{i1}，则由 $N(a_i,b_i)_n$ 的持续性，从 M_1 引发 σ_1 后得到的标识应使能 t_{i1}，这同 $M_1(\sigma>M^*$ 矛盾.

综合上面三种情况，说明若 $|\sigma_1|=k$ 时命题成立，则 $|\sigma_1|=k+1$ 时命题也成立. 从而证明了引理 6.

定理 1：$(N(a_i,b_i)_n,M_0)$ 为活网的充分必要条件是

1) $\prod_{i=1}^{n} a_i\leqslant \prod_{i=1}^{n} b_i$　　(1)

2) 不存在 $M_1\in R^{-1}(M^*)$ 使得 $M_0\leqslant M_1$，其中

$$M^*=[a_1-1,a_2-1,\cdots,a_n-1]^T \tag{6}$$

证明：(必要性)设 $(N(a_i,b_i)_n,M_0)$ 为活网，则根据[5]之命题 7，$N(a_i,b_i)_n$ 为可重复网，从而由引理 1 知条件 1)成立. 又因为 M_0 是 $N(a_i,b_i)_n$ 中的活标识，所以存在无限序列 σ，使 $M_0(\sigma>$. 如果 $M_0\leqslant M_1$，则也有 $M_1(\sigma>$. 由引理 6 知，不存在 $M_1\in R^{-1}(M_0)$：$M_0\leqslant M_1$.

(充分性)设条件 1)，2)成立，那么由引理 5，任意 $M\in R(M_0)$，都存在 $t_j\in T$，使 $M(t_j>$. 设 $M(t_j>M'$，则对 M'，又有 t_j' 使 $M'(t_j'>$，…. 这意味着 $\forall\ M\in R(M_0)$，都有无限序列 σ，使 $M(\sigma>$. 由 $N(a_i,b_i)_n$ 的结构可知，截去 σ 前面任何有限长的发射序列后所得到的序列都包含每一个 $t_i\in T$. 换句话说：$\forall\ M\in R(M_0)$，$\forall\ t_i\in T$，都存在 σ_1 和 M'：$M(\sigma_1>M'$，$M'(t_i>$. 从而 $(N(a_i,b_i)_n,M_0)$ 是活的.

定理 1 给出了带标识的加权单回路网为活网的一组充分必要条件. 其中条件 1)是对网的结构给出的. 条件 2)是对网的标识给出的. 检验这个条件，要先求出 M^* 的反向可达标识集 $R^{-1}(M^*)$. M^* 在 $N(a_i,b_i)_n$ 中的反向可达标识集，实际上就是它在逆网 $\tilde{N}(a_i,b_i)_n$ 中的可达标识集. 由于 $N(a_i,b_i)_n$ 是可重复网，$\tilde{N}(a_i,b_i)_n$ 是结构有界的. [5]指出，有界网的可达标

识集是一个有限集，而且给出了求可达标识集的一个算法. 因此 $R^{-1}(M^*)$是可以求解的，从而定理 1 的两个条件都可以检验.

§2. 一般加权 T—图的活性分析

定义 4：加权网 $N=(S,T;F,W)$称为一个加权 T—图当且仅当对$\forall s\in S$ 都有$|{}^{\cdot}s|=|s^{\cdot}|=1$.

定义 5：设 $N=(S,T;F,W)$是一个加权 T—图，C_i 是 N 的一个回路，C_i 包含的位置子集和变迁子集分别为

$$S_i=\{s_{i1},s_{i2},\cdots,s_{ik}\},T_i=\{t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{ik}\}$$

记　$F_i=F\cap((S_i\times T_i)\cup(T_i\times S_i)),W_i=W(F_i)$

则称 $N_{ci}=(S_i,T_i;F_i,W_i)$为加权 T—图的一个单回路子网.

显然，加权 T—图的一个单回路子网就是一个加权单回路网.

定义 6：设 $N=(S,T;F,W)$是一个加权 T—图，M 是 N 的一个标识，C_i 是 N 的一个回路. 称

$$M(C_i)=[M(s_{i1}),M(s_{i2}),\cdots,M(s_{ik})]^T,S_{ij}\in C_i$$

为标识 M 在回路 C_i 上的子标识.

显然加权 T—图 N 的标识 M 在回路 C_i 上的子标识也可以看作 N 的加权单回路网 N_{ci} 上的一个标识.

引理 7：设 $N=(S,T;F,W)$为一个加权 T—图，M_0 为 N 的初始标识，C_i 为 N 的一个回路，那么任意 $M\in R(M_0)$，在 N 的单回路子网 N_{ci}中都有 $M(c_i)\in R(M_0(c_i))$.

证明：显然，$M_0(c_i)\in R(M_0(c_i))$. 为证明引理 7 我们只需要证明这样一个事实：如果对某个 $M\in R(M_0)$，有 $M(c_i)\in R(M_0(c_i))$，则当 $M(t>M'$时，在 N_{ci} 中也有 $M'(c_i)\in R(M_0(c_i))$，下面分三种情况讨论.

情况 1：$t\notin\in c_i$(如图 2 中的 t_j)，那么就有${}^{\cdot}t\notin c_i$ 且 $t^{\cdot}\notin c_i$. 这说明 t 的引发不改变 c_i 中每一个位置的标志数，所以

$$M'(c_i)=M(c_i)\in R(M_0(c_i))$$

情况 2：$t\in c_i$ 但$|{}^{\cdot}t|=|t^{\cdot}|=1$(如图 2 中的 t_{i1})，这时${}^{\cdot}t$ 和 $t^{\cdot}$ 都在 c_i 上，因此 t 在 N 上的引发完全等同于 t 在 N_{ci}上的引发，从而

$$M'(c_i)\in R(M_0(c_i))$$

情况 3：$t\in c_i$ 且$|{}^{\cdot}t|>1$ 或$|t^{\cdot}|>1$(如图 2 中的 t_{i2}). 这时${}^{\cdot}t$ 和 $t^{\cdot}$ 各有一个位置在 C_i 中，其余却在 C_i 之外. t_{i2}的引发对 $M(c_i)$的影响为

$$M'(s_{i2})=M(s_{i2})-a_{i2}$$

$$M'(s_{i3})=M(s_{i3})+b_{i2}$$

c_i 中其余位置的标识没有改变. 这实际上等于在 N_{ci}中引发 t_{i2}引起的标识变化，所以 M′

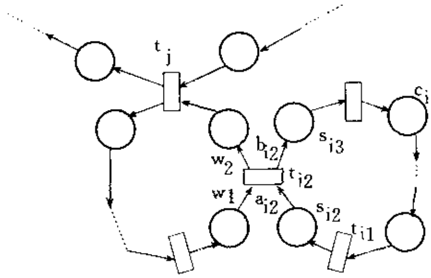

图2 一个加权T—图的示意图

$(c_i) \in R(M_0(c_i))$.

定理 2：设 $N=(S,T;F,W)$ 为一个加权 T－图，M_0 为 N 的初始标识，那么 (N,M_0) 为活网的充分必要条件是

1)N 的每个单回路子网 N_{ci} 满足(1)式；

2)在每个 N_{ci} 中，不存在 $M_1(c_i) \in R^{-1}(M^*(c_i))$ 使得 $M_0(c_i) \leqslant M_1(c_i)$，其中

$M^*(c_i)=[a_{i1}-1,a_{i2}-1,\cdots,a_{ik}-1]^T$

$a_{ij}=W(s_{ij},t_{ij}),s_{ij},t_{ij} \in c_i,j=1,2,\cdots,k$

证明：(必要性)设 (N,M_0) 为活网，则对 N 的每个回路 c_i，$(N_{ci},M_0(c_i))$ 也是活的. 从而由定理 1 知条件 1)，2)成立.

(充分性)设条件 1)，2)成立，我们要证明：对任意的 $M \in R(M_0)$，任意 $t \in T$，都有 $M' \in R(M)$ 使得 $M'(t>$.

为此，我们要证明在任意 $M \in R(M_0)$ 下，对任意 $t \in T$，都有一个变迁节序列 σ，使得 $M(\sigma>M'$，且对任意 $s \in {}^{\cdot}t$，都有 $M'(s) \geqslant W(s,t)$.

下面分三种情况进行讨论.

情况 1：存在某个回路 c_i，使 $s \in c_i$(如图 3 中的 s_1). 由于在 C_i 中条件 1)，2)成立，任意 $M \in R(M_0)$，由引理 7，$M(c_i) \in R(M_0(c_i))$，所以 N_{ci} 中总有一个 t_{ij} 是可以引发的. 因此，通过 N_{ci} 的一个变迁节序列 σ_1 的引发，可以到达一个标识 M_1：$M_1(s_1) \geqslant W(s_1,t)$.

情况 2：不存在回路 c_i 使 $s \in c_i$，但从 s 向后追踪，可到达一个 t_j：$t_j \in c_j$(如图 3 中的 s_2). 由于任意 $M \in R(M_0)$，$M(c_j) \in R(M_0(c_j))$. 因为 N_{cj} 中条件 1)，2)成立.

根据引理 5，N_{cj} 中总有一个变迁节可以引发. 所以可以通过 N_{cj} 的变迁节的反复引发，使 s_j 获得足够多的标志，然后通过从 s_j 到 s_2 上的有向路上的变迁节的引发，使得到达一个标识 M_2：$M_2(s_2) \geqslant W(s_2,t)$. 记上述各变迁节引发的序列为 σ_2.

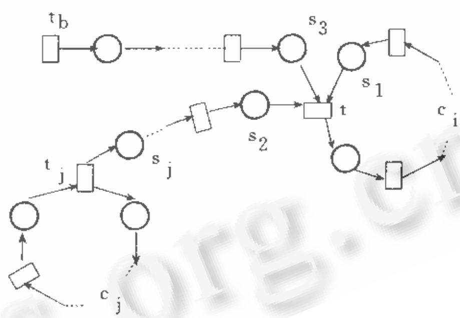

图3 一个加权T－图的示意图

情况 3：不存在 c_i，使 $s \in c_i$，且从 s 向后追踪，不能退到某个回路上(如图 3 中的 s_3). 这种情况下，必然退到某个变迁节 t_b：${}^{\cdot}t_b=\Phi$(因为 $\forall s \in S$：$|{}^{\cdot}s|=1$，所以不可能终止于某个位置). 这样 t_b 可以引发任意多次. 通过从 t_b 到 s_3 的有向路上的变迁节的一个序列 σ_3 的引发，可以到达某个标识 M_3：$M_3(s_3) \geqslant W(s_3,t)$.

综合上述三种情况，对任意 $M \in R(M_0)$，任意 $t \in T$，通过一个变迁节序列 $\sigma=\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ 的引发，可以到达这样一个标识 M'：$\forall s \in {}^{\cdot}t, M(s) \geqslant W(s,t)$. 从而证明了定理的充分性.

结束语：本文的工作可以归纳为两点：

1)给出和证明了加权单回路网为活网的充分必要条件(定理 1). 这个条件包含了对网结构和初始标识两方面的要求.

2)在定理 1 的基础上，进一步给出和证明了一般加权 T－图为活网的充分必要条件：

(下转 61 页)

定理 1的条件对加权 T－图的每个回路都成立(定理 2). 如果每条孤的权都等于 1,这组条件便简化为文献[1－3]中关于标识图(T－图)为活网的充分必要条件.

参考文献

1 F. Commoner, A. Holt, S. Even and A. Pnueli, Marked Directed Graphs, Journal of Computer and System Sciences, Vol. 5, No. 5, (October 1971), 511－523.

2 T. Murata, Modelling and Analysis of Concurrent Systems in Handbook of Software Engineering, Van Nostrand Reinhold, New York, (1984).

3 W. Reisig, Petri Net, An Introduction, Springer Verlay, Berlin, (1985).

4 J. L. Peterson, 吴哲辉译,《Petri 网理论与系统模拟》,中国矿业大学出版社,1989.

5 吴哲辉,有界 Petri 网的活性和公平性的分析和实现, 计算机学报, 1989. 4, 267－278.

6 许安国, 吴哲辉, 用 Petri 网研究一次不定方程,系统科学与数学, 1992 年第 2 期.