第3卷第4期
1992年11月

软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol. 3, No. 4
Nov., 1992

半正则重写系统及其合流性

林 凯　　孙永强

(上海交通大学计算机系，上海 200030)

SEMIREGULAR TERM REWRITING SYSTEM AND ITS CONFLUENCE

Lin Kai and Sun Yongqiang

(*Department of Computer Science, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai* 200030)

Abstract In this paper, the symbolic measure is introduced, and semiregularity is defined, and the confluence of semiregular term rewriting system is proved.

摘要 本文着重研究重写系统的合流性. 通过引入符号测度的概念，本文定义了半正则重写系统，并证明了半正则重写系统的合流性.

§1. 引　言

重写系统是计算机科学理论研究的重要方向之一. 重写系统理论在许多领域有着极为广泛的应用.

合流性是有关重写系统的一个重要性质，作为计算系统的重写系统往往必须具备合流性. 然而，在一般情况下重写系统的合流性是不可判定的，正是由于这一原因，诸如方程式语言之类的实际系统只能限于正则重写系统[1]. 但是，在具体问题的研究中，非正则的重写系统是经常出现的，因此，许多研究者讨论了能给出系统合流性的充分条件. Huet 在文[2]中对重写系统的合流性进行了一般性的讨论，并给出了一些有用的结果. Toyama[3]证明了不同符号集上的重写系统的和具有合流性，当且仅当，它们分别具有合流性. Klop[4]在正则重写系统基础上引入了对非左线性重写规则作了很强限制的 O″型重写系统，并证明了 O″型重写系统的合流性. 这些结果在实际应用中有很大的局限性. Huet 等研究者已经注意到了非左线性的重写系统在重写结构上与左线性重写系统有着重要的区别，保证左线性重写系统具有合流性的规则不重叠性，却不足以给出非左线性重写系统的合流性.

例 1.1：给定重写规则不重叠的重写系统 R 如下：

$$R: f(x,x) \to a$$
$$f(y,g(y)) \to b$$

本文1990年5月12日收到，1990年10月24定稿. 林凯，讲师，1987年硕士毕业于上海交通大学，主要研究领域为定理证明，重写技术及理论. 孙永强，教授，博士导师，从事新型语言，计算理论方面的研究工作.

$c \to g(c)$

显然，R 不是合流的.

一般重写系统的合流性判别是一个相当困难的问题. 本文引入了符号测度概念作为研究非左线性重写系统合流性的工具. 在符号测度概念下，我们定义了半正则重写系统，并且证明了半正则重写系统具有合流性.

Klop 在[4]中定义的 O″型重写系统是半正则重写系统，但反之不真.

§2. 基本概念和定义

设 Nat 是正整数全体构成的集合，$\overline{Nat}$是 Nat 上全体字的集合，设空字为$\wedge$. 在 $\overline{Nat}$ 上定义偏序关系$\leqslant$：$w_1 \leqslant w_2$，当且仅当，存在 $w \in \overline{Nat}$，使得 $w_1 \cdot w = w_2$，这时记 $w = w_2/w_1$. 令 $w_1 \wedge w_2$ 表示 $w_1 \leqslant w_2$ 或 $w_2 \leqslant w_1$，令 $w_1 \perp w_2$ 表示 $w_1 \wedge w_2$ 不成立.

设 V 是变元的无穷集合，F 是算子符号集且 $F \cap V = \varnothing$. F_n 表示 F 中 n 元算子的集合，这里 $n \in Nat \cup \{0\}$. 设$\square$是一个特殊的常元且$\square \notin F_0$. $T(F)$表示全体 F 和 V 生成的项的集合. 集合 $T(F \cup \{\square\})$中的元素 M 称为填式，常记为 $M \equiv C[\square, \cdots, \square]$，这里不同的$\square$代表 M 中不同位置出现的符号$\square$. $V(M)$表示项M中出现的所有变元的集合. F上的代换θ是V到$T(F)$的映射，$\theta(M)$表示代换 θ 作用于项 M 的结果.

定义函数 $\psi: T(F) \times \overline{Nat} \to P(\overline{Nat})$为：(1)如果 $M \in V \cup F_0$，则 $\psi(M, w) = \{w\}$；(2)否则，$\psi(f(M_1, \cdots, M_n), w) = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \psi(M_i, w \cdot i) \cup \{w\}$. 令 $O(M) = \psi(M, \wedge)$，则 $O(M)$中的元素也称为 M 的出现.

对于任意项 M, N 和 $w \in O(M)$，定义 $root(M)$为：(1)若 $M \in V \cup F_0$，则 $root(M) = M$；(2)否则，$root(f(M_1, \cdots, M_n)) = f$. 定义 M/w 为：(1)$M/\wedge = M$；(2)否则 $M = f(M_1, \cdots, M_n)$且 $w = i \cdot w_1$，则 $M/w = M_i/w_1$. 定义函数 $\alpha(M): O(M) \to F \cup V$ 为 $\alpha(M)(w) = root(M/w)$.

设 M 是 $T(F)$中的任意项，令 $VO(M) = \{w \in O(M) \mid \alpha(M)(w) \in V\}$，$M^{\square}[\square, \cdots, \square\} = \theta^{\square}(M)$，这里 $\theta^{\square}$是代换且满足：对任意 $x \in V$，$\theta^{\square}(x) = \square$.

对于 $t \in F \cup V$，令 $occ(M, t) = \{w \in O(M) \mid \alpha(M)(w) = t\}$.

对于项 M, N 和 $w \in O(M)$，$M[w \leftarrow N]$定义为：(1)$M[\wedge \leftarrow N] = N$；(2)$f(M_1, \cdots, M_n)[i \cdot w_1 \leftarrow N] = f(M_1, \cdots, M_{i-1}, M_i[w_1 \leftarrow N], M_{i+1}, \cdots, M_n)$.

定义 2.1：对项 M 的 F 上的强代换 θ 是从 $VO(M)$到 $T(F)$的映射，如果 $VO(M) = \{w_1, \cdots, w_n\}$，则强代换 θ 作用于 M 的结果 $\theta(M)$定义为 $M[w_1 \leftarrow \theta(w_1)] \cdots [w_n \leftarrow \theta(w_n)]$.

显然，定义 2.1 是合式的.

F 上的重写规则是 $T(F)$中的一对序偶$\langle l, r \rangle$，且 $l \notin V$，$V(r) \subseteq V(l)$. 重写规则常常也记为 $l \to r$. 对于 $F \subseteq F'$，当然 F 上的重写规则也可看作 F' 上的重写规则.

重写规则 $l \to r$ 称为左线性的，如果对于任意 $x \in V(l)$，有$|occ(l, x)| = 1$，否则称为非左线性的.

F 上的重写系统 R 是 F 上的重写规则的有限集合. 为讨论方便，我们假定不同重写规则中无相同变元. 重写系统称为左线性的，如果其中每一条重写规则都是左线性的，否则，称为非左线性的.

重写系统R生成的$T(F)$上的重写关系$\underset{R}{\to}$定义为：$M \underset{R}{\to} N$，当且仅当，存在$l \to r \in R$，

$C[\Box]\in T(F\cup\{\Box\})$和代换$\theta$,使得$M\equiv C[\theta(l)]$,$N\equiv C[\theta(r)]$.如果令$w\in occ(C[\Box],\Box)$,则上面的$M\underset{R}{\rightarrow}N$也记为$M\overset{w}{\underset{<l,r>}{\rightarrow}}N$,$M/w$称为$R$归约式.

设$\overset{*}{\rightarrow}$表示两元关系$\rightarrow$的自反传递闭包.令$CR_{\underset{R}{\rightarrow}}(M)$是一个谓词,表示如果$M\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}P$且$M\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}Q$,则存在$N$,使得$P\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}N$且$Q\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}N$.重写系统$R$称为合流的或具有合流性,记为$CR(R)$,当且仅当,对于任意项$M$,$CR_{\underset{R}{\rightarrow}}(M)$.

令$M\underset{R}{\downarrow}N$表示存在$P$,使得$M\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}P$且$N\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}P$.

定义2.2:给定F_1上的重写系统R_1和F_2上的重写系统R_2,R_1与R_2的和R_1+R_2定义为$F_1\cup F_2$上的重写系统$R_1\cup R_2$.

显然,对于给定的重写系统R,令R^l是由R中所有左线性重写规则构成的集合,R^n是由R中所有非左线性重写规则构成的集合,则$R=R^l+R^n$.

定义2.3:重写规则$l_1\rightarrow r_1$与$l_2\rightarrow r_2$强不重叠,当且仅当,如果存在$w\in O(la)$,$a\in\{1,2\}$,以及对la/w的强代换θ_a,对l_b的强代换θ_b,这里$\{a,b\}=\{1,2\}$,使得$\theta_a(la/w)=\theta_b(l_b)$,则$la/w\in V$,或者存在代换$\theta$,满足对任意$x\in V$,$\theta(x)\in V$且$x\neq y$蕴含$\theta(x)\neq\theta(y)$,使得$\theta(l_1)=l_2$且$\theta(r_1)=r_2$.

对于左线性重写规则,强不重叠性就是通常的不重叠性.特别地,例1.1中的重写规则$f(x,x)\rightarrow a$与$f(g(y),y)\rightarrow b$不是强不重叠的.这是因为,如果令对$f(x,x)$的强代换θ_1为$\{1\mapsto g(y),2\mapsto y\}$,令对$f(g(y),y)$的强代换$\theta_2$为$\{1\mapsto y,2\mapsto y\}$,则$\theta_1(f(x,x))=\theta_2(f(g(y),y))$.

定义2.4:(1)对于任意$M\underset{R}{\rightarrow}N$,$w\in O(M)$和$A\subseteq O(M)$,如果$M\underset{R}{\rightarrow}N$为$M\overset{w_1}{\underset{<l,r>}{\rightarrow}}N$,则分别定义$re(M\underset{R}{\rightarrow}N,w)\subseteq O(N)$和$Re(M\underset{R}{\rightarrow}N,A)\subseteq O(N)$如下:

(a)如果$w\perp w_1$或$w<w_1$,则$re(M\underset{R}{\rightarrow}N,w)=\{w\}$;

(b)如果存在$t\in V\cup F_0$,$w_2\in occ(l,t)$,使得$w_1\leqslant w<w_2$,则$re(M\underset{R}{\rightarrow}N,w)=\varnothing$;

(c)否则,存在$x\in V$,$w_2\in occ(l,x)$,使得$w_2\leqslant w$,令$w_3=w/w_2$,则$re(M\underset{R}{\rightarrow}N,w)=\{w_1\cdot w_4\cdot w_3\mid w_4\in occ(r,x)\}$.

(d)令$Re(M\underset{R}{\rightarrow}N,A)=\bigcup\limits_{w\in A}re(M\underset{R}{\rightarrow}N,w)$.

(2)对于任意$M\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}N$和$w\in O(M)$,$A\subseteq O(M)$,递归定义$re(M\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}N,w)\subseteq O(N)$和$Re(M\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}N,A)\subseteq O(N)$如下:

如果$M\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}N$关系链长度为0,则$re(M\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}N,w)=\{w\}$,并且$Re(M\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}N,A)=A$,否则,设$M\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}N$为$M\underset{R}{\rightarrow}N_1\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}N$,则令

$$re(M\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}N,\ w)=Re(N_1\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}N,\ re(M\underset{R}{\rightarrow}N_1,w))$$

$$Re(M\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}N,\ A)=Re(N_1\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}N,\ Re(M\underset{R}{\rightarrow}N_1,A))$$

§3. 符号测度函数与半正则重写系统

定义 3.1:(1)设 F 是给定的算子符号集,$X\subseteq F$. 函数$\bar{h}:T(F)\to Nat\cup\{0\}$称为 X 下的符号测度函数,当且仅当,$\bar{h}$ 满足:(a)如果 $f\in X\cap F_n, n\in Nat$,则$\bar{h}(f(M_1,\cdots,M_n))>max\{\bar{h}(M_i)\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$;(b)如果 $f\in F_n, n\in Nat$, 则$\bar{h}(f(M_1,\cdots,M_n))\geqslant\bar{h}(M_i), 1\leqslant i\leqslant n$.

(2)设 R 是 F 上的重写系统,$X\subseteq F$. X 下的符号测度函数 $\bar{h}$ 称为 R 的 X 下的符号测度函数,当且仅当,对于任意 $M\underset{R}{\to}N, \bar{h}(M)\geqslant\bar{h}(N)$.

为讨论方便,我们令上面定义中的 X 下的符号测度函数全体构成的集合为 $SM(X,F)$,R 的 X 下的符号测度函数全体构成的集合为 $SM(R,X,F)$.

定义 3.2:F 上的重写系统 R 称为半正则的,如果 R 满足下列条件:

(1)对于任意 $l_1\to r_1\in R$ 和 $l_2\to r_2\in R$,$l_1\to r_1$ 与 $l_2\to r_2$ 强不重叠;

(2)存在 $X\subseteq F$,使得

(a)$SM(R,X,F)\neq\varnothing$;

(b)对任意 $l\to r\in R''$ 和任意 $w\in occ(l,w)$,这里 $x\in V$, $|occ(l,x)|>1$,存在 $w'<w$,满足 $a(l)(w')\in X$.

记满足(2)的 X 所构成的集合为 $X(R)$.

显然,如果R是正则重写系统,则R必为半正则重写系统. 因为这里可令$X=\varnothing$,令$\bar{h}$: $T(F)\to Nat\cup\{0\}$为:对任意项 M,$\bar{h}(M)=0$. 显然$\bar{h}\in SM(R,X,F)$,并且容易检查定义 3.2 中的(1),(2)是满足的.

如果 R 是半正则的非左线性的重写系统,则对于任意 $X\in X(R)$,$X\neq\varnothing$.

Klop[4]中定义的 O''型重写系统显然也是半正则重写系统.

例 1.1 中定义的重写系统不是半正则的,因为 $f(x,x)\to a$ 与 $f(y,g(y))\to b$ 不是强不重叠的. 下面的实例也不是半正则重写系统.

例 3.3:给定重写系统 R 如下:

$$
\begin{aligned}
R: & f(x,x)\to a\\
& g(y)\to f(y,g(y))\\
& c\to g(c)
\end{aligned}
$$

R 不是半正则的. 这是因为,如果存在 X,使得定义 3.2 中的(2)成立,则必有 $f\in X$. 设 $\bar{h}\in SM(R,X,F)$,则 $\bar{h}(f(y,g(y)))>\bar{h}(g(y))$,这是因为 $\bar{h}$ 是符号测度函数. 又因为 $g(y)\underset{R}{\to}f(y,g(y))$,故 $\bar{h}(g(y))>\bar{h}(f(y,g(y)))$,矛盾.

在本节余下的篇幅中,我们将证明半正则重写系统具有合流性.

定义 3.4:设 $\vec{M},\vec{N}$ 分别是 $T(F)$中项的序列$\langle M_1,\cdots,M_n\rangle$和$\langle N_1,\cdots,N_n\rangle$. 设~是$\{1,\cdots,n\}$上的等价关系. $\vec{M}\overset{*}{\underset{R}{\to}}\vec{N}$ 表示 $M_i\overset{*}{\underset{R}{\to}}N_i, 1\leqslant i\leqslant n$.

(1)~称为 $\vec{M}$ 上的约束关系,如果 $i\sim j$ 蕴含 $M_i\equiv M_j$.

(2)$\vec{M}$ 和 $\vec{N}$ 称为在等价关系~下相似,并记为 $\vec{M}\equiv\vec{N}(mod\sim)$,如果~同时是 $\vec{M}$ 和 $\vec{N}$ 上的约束关系.

从该定义不难证得下面的结果.

引理 3.5：设 $\vec{M}\equiv\langle M_1,\cdots,M_n\rangle$ 是 $T(F)$ 中项的序列，$\sim$ 是 $\vec{M}$ 上的约束关系，$\vec{M}\xrightarrow[R]{*}\vec{N}$，且对于 $\sim$ 任意的等价类 $[k]_\sim$，满足如果 $|[k]_\sim|>1$，则对任意 $i\in[k]_\sim$，$CR_{\xrightarrow[R]{}}(M_i)$，那么存在 $\vec{P}$，使得 $\vec{N}\xrightarrow[R]{*}\vec{P}$ 且 $\vec{M}\equiv\vec{P}(mod\sim)$.

对于任意 F 上的重写规则：$l\to r$，设 $l\equiv l^\square[x_1,\cdots,x_n]$，这里 $V(l)=\{x_1,\cdots,x_n\}$. 定义 $\{1,\cdots,n\}$ 上的等价关系 $\sim_l$ 如下：$i\sim_l j$，当且仅当，$x_i\equiv x_j$. 显然，$\sim_l$ 是 $\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ 上的约束关系，我们记 $\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ 为 $\vec{l}$. 对于任意项 $M\in T(F)$，如果满足 $M\equiv C[l^\square[M_1,\cdots,M_n]]$ 且 $\vec{l}\equiv\langle M_1,\cdots,M_n\rangle(mod\sim_l)$，则 $M\xrightarrow[\langle l,r\rangle]{w}N\equiv C[r^\square[M_{i1},\cdots,M_{ik}]]$，这里 $w\in occ(C[\square],\square)$，$\vec{r}\equiv\langle x_{i1},\cdots,x_{ik}\rangle$，$\{i_1,\cdots,i_k\}\subseteq\{1,\cdots,n\}$.

引理 3.6：设 $M\equiv C[N]\in T(F)$，$X\subseteq F$ 并且 $\bar{h}\in SM(X,F)$. 如果对于 $w\in occ(C[\square],\square)$，存在 $w'<w$，使得 $a(M)(w')\in X$，则 $\bar{h}(M)>\bar{h}(N)$.

证明：归纳于 $C[\square]$ 的结构.

因为存在 $w'<w$，则 $C[\square]\not\equiv\square$. 令 $C[\square]\equiv f(M_1,\cdots,M_{k-1},C'[\square],M_k,\cdots,M_n)$，这里 $f\in F_n$，$n>0$，$k\geqslant 0$.

如果 $f\in X$，则 $\bar{h}(C[N])>\bar{h}(C'[N])$，由符号测度的定义不难发现 $\bar{h}(C'[N])\geqslant\bar{h}(N)$，因而 $\bar{h}(M)>\bar{h}(N)$.

如果 $f\notin X$，则 $\bar{h}(C[N])\geqslant\bar{h}(C'[N])$，对 $C'[N]$ 使用归纳假设有 $\bar{h}(C'[N])>\bar{h}(N)$，于是 $\bar{h}(M)>\bar{h}(N)$. 证毕.

在本节余下的篇幅中，我们约定 R 是 F 上的半正则重写系统，$X\subseteq X(R)$，$\bar{h}\in SM(R,X,F)$.

由于 R 中重写规则是强不重叠的，因此，对于归约 $M\xrightarrow[\langle l,r\rangle]{w}N$，$l\to r\in R$ 可简记为 $M\xrightarrow{w}N$.

设 $M\in T(F)$，$u\subseteq O(M)$ 且满足：对于任意 $w_1,w_2\in u$，$w_1=w_2$ 或者 $w_1\perp w_2$. 如果 $u=\{w_1,\cdots,w_n\}$，$M/w_i\equiv M_i\to N_i$，这里 $\to$ 是 $T(F)$ 上的两元关系，$1\leqslant i\leqslant n$，则记为 $M\overset{u}{\Rightarrow}M[w_1\leftarrow N_1]\cdots[w_n\leftarrow N_n]$.

令 $k_0=\min\{\bar{h}(l)\,|\,l\to r\in R\}$. 显然，如果 $M\xrightarrow[R]{}N$，则 $\bar{h}(M)\geqslant k_0$. 如果 $\bar{h}(M)<k_0$，则 M 是 R 范式.

引理 3.7：设 $M\in T(F)$ 且 $\bar{h}(M)=k_0$.

如果 $M\overset{u_1}{\Rightarrow}Q_1$，$M\overset{u_2}{\Rightarrow}Q_2$，则存在 u_3,u_4 和 N，使得 $Q_1\overset{u_3}{\Rightarrow}N$ 并且 $Q_2\overset{u_4}{\Rightarrow}N$.

证明：设 $w_1\in u_a$，$a\in\{1,2\}$，如果存在 $w_2\in u_b$，$\{a,b\}=\{1,2\}$，使得 $w_2<w_1$，令 $M/w_2\equiv l^\square[M_1,\cdots,M_n]$，这里 $l\to r\in R$. 由强不重叠性，存在 $W\leqslant w_1/w_2$ 且 $l/w\in VO(l)$. 我们断言：$|occ(l,l/w)|=1$. 否则，由半正则重写系统的定义和引理 3.6，有 $\bar{h}(M)>\bar{h}(M/w_1)$. 又因为 M/w_1 是 R 归约式，故 $\bar{h}(M/w_1)\geqslant k_0$，因此，$\bar{h}(M)>k_0$，矛盾.

由上面的论证可知：设 $w\in u_a$，$a\in\{1,2\}$，$M/w\equiv l^\square[M_1,\cdots,M_n]$，$l\to r\in R$，则对于任意 $w'\in re(M\overset{u_b}{\Rightarrow}Q_b,w)$，这里 $\{a,b\}=\{1,2\}$，设 $Q_b/w'\equiv l^\square[M'_1,\cdots,M'_n]$，则必有 $\langle M_1,\cdots,M_n\rangle\equiv\langle M'_1,\cdots,M'_n\rangle\equiv\vec{l}(mod\sim_l)$.

因此，令 $u_3=Re(M\overset{u_1}{\Rightarrow}Q_1,u_2)$，$u_4=Re(M\overset{u_1}{\Rightarrow}Q_2,u_1)$，则显然 $Q_1\overset{u_3}{\Rightarrow}N$ 且 $Q_2\overset{u_4}{\Rightarrow}N$.

推论 3.8：设 $M\in T(F)$. 如果 $\bar{h}(M)=k_0$，则 $CR_{\underset{R}{\rightarrow}}(M)$.

下面我们证明本文的主要结果.

定理 3.9：如果 R 是 F 上的半正则重写系统，则 $CR(R)$.

证明：设 $X\subseteq X(R)$，$\bar{h}\in SM(R,X,F)$. 归纳于 $\bar{h}(M)$.

(1) 设 $k_0=\min\{\bar{h}(l)\mid l\rightarrow r\in R\}$.

如果 $\bar{h}(M)<k_0$，则 M 为 R 范式，故 $CR_{\underset{R}{\rightarrow}}(M)$.

如果 $\bar{h}(M)=k_0$，则由推论 3.8，$CR_{\underset{R}{\rightarrow}}(M)$.

(2) 如果 $\bar{h}(M)=k>k_0$，设对任意 $M'\in T(F)$，$\bar{h}(M')<k$ 蕴含 $CR_{\underset{R}{\rightarrow}}(M')$.

设 $P\in T(F)$ 并且 $\bar{h}(P)\leqslant k$. 如果 $P\equiv C[P_1,\cdots,P_n]$，$Q\equiv C[Q_1,\cdots,Q_n]$ 并且 $\bar{h}(P_i)<k$，$P_i\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}Q_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，则记为 $P\overset{i}{\rightarrow}Q$. 如果 $P\equiv C[P_1,\cdots,P_n]$，$Q\equiv C[Q_1,\cdots,Q_n]$，并且 $\bar{h}(P_i)<k$ 蕴含 $P_i\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}Q_i$，$\bar{h}(P_i)=k$ 蕴含 $P_i\overset{\wedge}{\rightarrow}Q_i$，则记 $P\overset{m}{\underset{u}{\Rightarrow}}Q$，这里 $u=occ(C[\square,\cdots,\square],\square)$.

首先我们证明下面的断言(a)：

(a) 设 $P\in T(F)$ 且 $\bar{h}(P)\leqslant k$. 如果 $P\overset{i}{\rightarrow}Q_1$ 且 $P\overset{i}{\rightarrow}Q_2$，则存在 N，使得 $Q_1\overset{i}{\rightarrow}N$ 且 $Q_2\overset{i}{\rightarrow}N$.

(a) 的证明：根据 $\overset{i}{\rightarrow}$ 的定义，有 $P\equiv C_j[P_1^j,\cdots,P_{n_j}^j]$，$Q_j\equiv C_j[Q_1^j,\cdots,Q_{n_j}^j]$，并且 $\bar{h}(P_i^j)<k$，$P_i^j\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}Q_i^j$，$1\leqslant i\leqslant n_j$，$j\in\{1,2\}$，令 $A_j=occ(C_j[\square,\cdots,\square],\square)$，$j\in\{1,2\}$. 令 $A=\{w\in A_1\cup A_2\mid$ 不存在 $u\in A_1\cup A_2$ 使得 $u<w\}$. 显然，$A\subseteq O(P)$，并且满足对任意 $w_1,w_2\in A$，$w_1\neq w_2$ 蕴含 $w_1\perp w_2$. 因此，令 $P\equiv C[P'_1,\cdots,P'_n]$，这里 $A=occ(C[\square,\cdots,\square],\square)$，且有 $Q_j\equiv C[\bar{Q}_1^j,\cdots,\bar{Q}_n^j]$，$\bar{h}(P'_i)<k$，$P'_i\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}\bar{Q}_i^j$，$j\in\{1,2\}$，$i\in\{1,\cdots,n\}$. 由归纳假设 $CR_{\underset{R}{\rightarrow}}(P'_i)$，可知存在 N_i，使得 $\bar{Q}_i^j\overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}}N_i$，$j\in\{1,2\}$，$i\in\{1,\cdots,n\}$. 由于 $\bar{h}(\bar{Q}_i^j)\leqslant\bar{h}(P'_i)<k$，令 $N\equiv C[N_1,\cdots,N_n]$，即有 $Q_1\overset{i}{\rightarrow}N$ 并且 $Q_2\overset{i}{\rightarrow}N$.

由断言(a)可直接推出下面断言(b).

(b) 设 $P\in T(F)$ 且 $\bar{h}(P)\leqslant k$. 如果 $P\overset{i}{\underset{*}{\rightarrow}}Q_1$ 且 $P\overset{i}{\underset{*}{\rightarrow}}Q_2$，则存在 N，使得 $Q_1\overset{i}{\underset{*}{\rightarrow}}N$ 且 $Q_2\overset{i}{\underset{*}{\rightarrow}}N$.

其次，我们证明断言(c).

(c) 设 $P\in T(F)$ 且 $\bar{h}(P)\leqslant k$. 如果 $P\overset{i}{\rightarrow}Q_1$ 且 $P\overset{m}{\underset{u}{\Rightarrow}}Q_2$，则存在 Q_3，N 和 u'，使得 $Q_1\overset{i}{\rightarrow}Q_3\overset{m}{\underset{u'}{\Rightarrow}}N$ 且 $Q_2\overset{i}{\rightarrow}N$，$u'\subseteq Re(P\overset{i}{\underset{*}{\rightarrow}}Q_3,u)$.

(c) 的证明：令 $A_1=\{w\in u\mid\bar{h}(P/w)=k\}$，$A_2=A/A_1$，则显然，$P\overset{m}{\underset{u}{\Rightarrow}}Q_2$ 可分解为 $P\overset{m}{\underset{A_2}{\Rightarrow}}Q'_2\overset{m}{\underset{A_1}{\Rightarrow}}Q_2$，这里 $P\overset{m}{\underset{A_2}{\Rightarrow}}Q'_2$ 也可记为 $P\overset{i}{\rightarrow}Q'_2$.

根据断言(a)，存在 Q'_3，使得 $Q'_2\overset{i}{\rightarrow}Q'_3$ 且 $Q_1\overset{i}{\rightarrow}Q'_3$. 现在不妨令 $P\equiv C[P_1,\cdots,P_m]$，这里 $A_1=occ(C[\square,\cdots,\square],\square)$，则根据 $\overset{i}{\rightarrow}$ 和 $\overset{m}{\underset{A_1}{\Rightarrow}}$ 的定义有：$Q_1\equiv D_1[Q_1^1,\cdots,Q_m^1]$，$Q'_2\equiv D'_2[Q_1^2,\cdots,$

$Q_m^2]$, $Q'_3\equiv D'_3[Q_1^3,\cdots,Q_m^3]$，并满足：$P_i\xrightarrow{i}Q_i^j$, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant 2$, $C[\square,\cdots,\square]\xrightarrow{i}D_1[\square,\cdots,\square]$, $C[\square,\cdots,\square]\xrightarrow{i}D'_2[\square,\cdots,\square]$, $Q_i^j\xrightarrow{i}Q_i^3$, $1\leqslant i\leqslant m$, $D_1[\square,\cdots,\square]\xrightarrow{i}D'_3[\square,\cdots,\square]$, $D_2[\square,\cdots,\square]\xrightarrow{i}D'_3[\square,\cdots,\square]$，同时还满足：如果 $w\in occ(C[P_1,\cdots,P_{i-1},\square,P_{i+1},\cdots,P_m],\square)$，则 $w\in occ(D_1[Q_1^1,\cdots,Q_{i-1}^1,\square,Q_{i+1}^1,\cdots,Q_m^1],\square)$, $w\in occ(D'_j[Q_1^j,\cdots,Q_{i-1}^j,\square,Q_{i+1}^j,\cdots,Q_m^j],\square)$, $j\in\{2,3\}$，并且，如果$w'\leqslant w$，则$re(P\xrightarrow{i}Q_1\xrightarrow{i}Q'_3,w')=\{w'\}$, $re(P\xrightarrow{i}Q'_2\xrightarrow{i}Q'_3,w')=\{w'\}$.

当然，Q_i^3 必形如 $l_i^{\square}[\overline{Q}_1^i,\cdots,\overline{Q}_{ni}^i]$，这里 $l_i\to r_i\in R$, $i\in\{1,\cdots,n\}$, $\bar{h}(\overline{Q}_j^i)\leqslant k$, $j\in\{1,\cdots,n\}$. 特别地，如果 $|[i']_{\sim li}|>1$，则 $\bar{h}(\overline{Q}_{i'}^i)<k$. 由断言(a)可知，存在 $\overline{\overline{Q}}_j^i$, $i\in\{1,\cdots,m\}$, $j\in\{1,\cdots,n_i\}$，使得$<\overline{Q}_1^i,\cdots,\overline{Q}_{ni}^i>\xrightarrow{i}<\overline{\overline{Q}}_1^i,\cdots,\overline{\overline{Q}}_{ni}^i>$并且$<\overline{\overline{Q}}_1^i,\cdots,\overline{\overline{Q}}_{ni}^i>\equiv\vec{l}_i(mod\sim_{li})$.

令 $Q_3\equiv D'_3[l_1^{\square}[\overline{\overline{Q}}_1^1,\cdots,\overline{\overline{Q}}_{n1}^1],\cdots,l_m^{\square}[\overline{\overline{Q}}_1^m,\cdots,\overline{\overline{Q}}_{nm}^m]]$, $N\equiv D'_3[r_1^{\square}[\overline{\overline{Q}}_{m_1^1}^1,\cdots,\overline{\overline{Q}}_{m_{k1}^1}^1],\cdots,r_m^{\square}[\overline{\overline{Q}}_{m_1^m}^m,\cdots,\overline{\overline{Q}}_{m_{km}^m}^m]]$，这里$\{m_1^i,\cdots,m_{ki}^i\}\subseteq\{1,\cdots,n_i\}$, $i\in\{1,\cdots,m\}$.

不难发现，$Q_1\xrightarrow{i}Q_3$，并且 $Q_3\overset{m}{\underset{A_1}{\Rightarrow}}N$, $Q_2\xrightarrow{i}N$.

(d)设 $P\in T(F)$且 $\bar{h}(P)\leqslant k$. 如果 $P\xrightarrow{i}Q_1$，且 $P\xrightarrow[R]{*}Q_2$，则存在 N，使得 $Q_1\xrightarrow[R]{*}N$ 并且 $Q_2\xrightarrow{i}N$.

(d)的证明：归纳于 $P\xrightarrow[R]{*}Q_2$ 的长度.

如果 $P\xrightarrow[R]{*}Q_2$ 的长度为零，则令 $N\equiv Q_1$ 即可.

如果 $P\xrightarrow[R]{*}Q_2$ 形如 $P\xrightarrow[R]{}Q'_2\xrightarrow[R]{*}Q_2$，则可分为两种情况：(i)如果 $P\xrightarrow[R]{}Q'_2$ 为 $P\xrightarrow{i}Q'_2$，则存在 Q'_1，使得 $Q_1\xrightarrow{i}Q'_1$, $Q'_2\xrightarrow{i}Q'_1$，再由归纳假设，可知存在 N，使得 $Q_2\xrightarrow{i}N$ 且 $Q'_1\xrightarrow[R]{*}N$. (ii)如果 $P\xrightarrow[R]{}Q'_2$ 为 $P\overset{m}{\Rightarrow}Q'_2$，则由断言(c)，存在 Q'_1，使得 $Q'_2\xrightarrow{i}Q'_1$, $Q_1\xrightarrow[R]{*}Q'_1$，再归纳假设，存在 N，使得 $Q_2\xrightarrow{i}N$ 且 $Q'_1\xrightarrow[R]{*}N$.

由此，断言(d)得证. 证明如图 1 所示.

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed, "i"'] & P_1 \arrow[r, "m"] \arrow[d, dashed, "i"'] & P_2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed, "i"'] & P_3 \arrow[r, "m"] \arrow[d, dashed, "i"'] & P_4 \arrow[d, dashed, "i"'] \\
Q \arrow[r, dashed, "i"] & Q_1 \arrow[r, dashed, "i\quad m"] & Q_2 \arrow[r, dashed, "i"] & Q_3 \arrow[r, dashed, "i\quad m"] & Q_4
\end{tikzcd}
$$

图 1

设 $P\in T(F)$, $\bar{h}(P)\leqslant k$ 且 $P\xrightarrow{*}Q$ 为 $P\equiv P_0\xrightarrow[*]{i}P_1\overset{m}{\underset{A_1}{\Rightarrow}}P_2\xrightarrow[*]{i}P_3\overset{m}{\underset{A_2}{\Rightarrow}}P_4\to\cdots\to P_n\equiv Q$，并且对任意 A_i, $1\leqslant i\leqslant[n/2]$，存在 $w\in A_i$，使得满足 $\bar{h}(P_{2i-1}/w)=k$. 令 $mlen(P\xrightarrow[R]{*}Q)=[n/2]$. 对断言(d)，不难发现 $mlen(P\xrightarrow[R]{*}Q_2)\geqslant mlen(Q_1\xrightarrow[R]{*}N)$.

(e)设 $P\in T(F)$, $\bar{h}(P)\leqslant k$. 如果 $P\xrightarrow[*]{i}Q_1$ 且 $P\xrightarrow[R]{*}Q_2$，则存在 N，使得 $Q_1\xrightarrow[R]{*}N$ 且 $Q_2\xrightarrow[*]{i}N$，同

时,$mlen(P\xrightarrow[R]{*}Q_2)\geqslant mlen(Q_1\xrightarrow[R]{*}N)$.

(e)可归纳于 $P\xrightarrow[*]{i}Q_1$ 并由(d)证得.

(f)设 $P\in T(F)$,$\bar{h}(P)\leqslant k$. 如果 $P\xrightarrow[*]{i}Q_1$ 且 $P\overset{m}{\underset{u}{\Rightarrow}}Q_2$,则存在 Q_3,N 和 u',使得 $Q_1\xrightarrow[*]{i}Q_3\overset{m}{\underset{u'}{\Rightarrow}}N$ 且 $Q_2\xrightarrow{i}N$,这里 $u'\subseteq Re(Q_1\xrightarrow[*]{i}Q_3,u)$.

(f)可由(c)并归纳于 $P\xrightarrow[*]{i}Q_1$,得到.

(g)设 $P\in T(F)$,$\bar{h}(P)\leqslant k$. 如果 $P\overset{m}{\underset{A_1}{\Rightarrow}}Q$ 且 $P\xrightarrow[*]{i}P_1\overset{m}{\underset{A_2}{\Rightarrow}}P_2$,则存在 Q_1,Q_2 和 N,使得 $Q\xrightarrow[*]{i}Q_1\overset{m}{\underset{B_1}{\Rightarrow}}N$ 且 $P_2\xrightarrow[*]{i}Q_2\overset{m}{\underset{B_2}{\Rightarrow}}N$. 如图 2 所示.

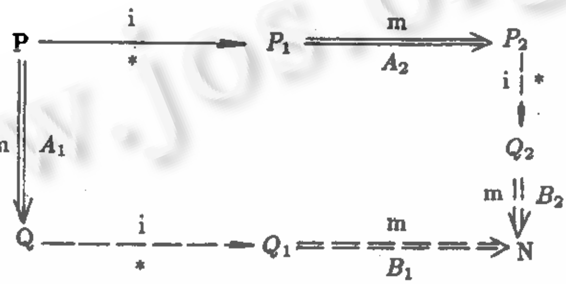

图 2

(g)的证明:不妨假设对于任意 $w_1\in A_1$,$w_2\in A_2$,$\bar{h}(P/w_1)=k$,$\bar{h}(P/w_2)=k$.

否则,我们可把 $P\overset{m}{\underset{A_1}{\Rightarrow}}Q$ 分解为 $P\xrightarrow{i}Q'\overset{m}{\underset{A}{\Rightarrow}}Q$,这里 $A=\{w\in A_1\mid\bar{h}(P/w)=k\}$,由断言(a)和(c),存在 Q'_1,Q'_2 和 Q'_3,使得 $Q'\xrightarrow[*]{i}Q'_1\xrightarrow{i}Q'_2\overset{m}{\underset{B}{\Rightarrow}}Q'_3$,$P_1\xrightarrow{i}Q'_1$ 且 $P_2\xrightarrow{i}Q_3$,如图 3 所示. 现在再把 $Q'_2\overset{m}{\underset{B}{\Rightarrow}}Q'_3$ 分解成 $Q'_2\xrightarrow{i}Q''_2\overset{m}{\underset{B_1}{\Rightarrow}}Q'_3$,这里 $B_1=\{w\in B\mid\bar{h}(Q'_2/w)=k\}$. 即得到断言所假设的情况.

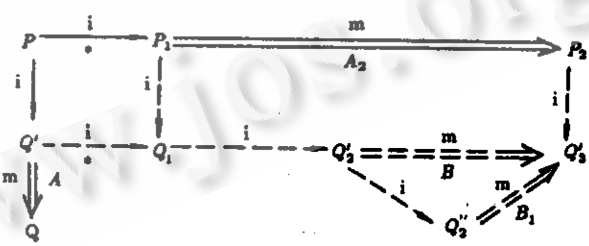

图 3

由 $\overset{m}{\Rightarrow}$ 的定义不难发现如下性质:(i)$A_2\subseteq O(P)$ 且 $Re(P\xrightarrow[*]{i}P_1,A_2)=A_2$;(ii)对于任意 $w\in A_1$,设 $P/w\equiv\theta(l)$,$l\to r\in R$,如果存在 $u\in A_2$,使得 $w<u$,则必存在 $w_1\in VO(l)$,使得 $|occ(l,l/w_1)|=1$ 且 $w_1\leqslant u/w$.

设 $X=\{w\in O(P)\mid re(P\overset{m}{\underset{A_1}{\Rightarrow}}Q,w)=\varnothing$,或者,$re(P\xrightarrow[*]{i}P_1,w)=\varnothing\}$,令 $\bar{X}=\{w\in X\mid$不存在 $u\in X$,使得 $u<w\}$,$\overline{Y_1}=\{w\in\bar{X}\mid$存在 $u\in A_2$,使得 $w<u\}$,显然,如果 $w\in\overline{Y_1}$,则 $w\in A_1$. 令 $Y_2=\bar{X}/Y_1$,$\overline{Y}_2=\{w\in Y_2\mid$存在 $u\in A_2$,使得 $u<w\}$,$\overline{Y}_2=Y_2/\overline{Y}_2$,$\bar{A}_2=\{w\in A_2\mid$存在 $u\in A_1$,使得 $w<$

$u\}$.

对于 $O(M')$ 的正交子集 A 和 $w\in O(M')$,令 $A/w=\{u/w\mid u\in A$ 且 $w\leqslant u\}$.

对于任意 $w\in\overline{Y}_2$,由断言(f)可知存在 P_w,N_w 和 $A_w\subseteq O(P_w)$,使得 $P/w\xrightarrow[*]{i}P_1/w\xrightarrow[*]{i}P_w\overset{m}{\underset{A_w}{\Rightarrow}}$,$P/w\overset{m}{\underset{A_1/w}{\Rightarrow}}Q/w\xrightarrow[*]{i}N_w$,$A_w\subseteq Re(P/w\xrightarrow[*]{i}P_w,A_1/w)$,并且对任意 $u\in A_w$,$\overline{h}(P_w/u)=k$. 这里 A_w 可能为空. 由 $\overline{Y}_2$ 的定义可知:如果 $P/w\xrightarrow[*]{i}P_w$ 形如 $P/w\xrightarrow[*]{i}P'\xrightarrow{w}P^2\xrightarrow[*]{i}P_w$,则对于任意 $u\in A_2$,$u=w\cdot w_1$ 或 $u\perp ww_1$.

对于任意 $w\in\overline{A}_2$,由断言(f)可知,存在 P',N' 和 A',使得 $P/w\xrightarrow[*]{i}P_1/w\xrightarrow[*]{i}P'\overset{m}{\underset{A'}{\Rightarrow}}N'$,$P/w\overset{m}{\underset{A_1/w}{\Rightarrow}}Q/w\xrightarrow[*]{i}N'$ 并且 $A'\subseteq Re(P/w\xrightarrow[*]{i}P',A_1/w)$,对任意 $w_1\in A'$,$\overline{h}(P'/w)=k$. 注意到 $\overline{h}(P_1/w)=k$,设 $P_1/w\equiv l^{\Box}[M_1,\cdots,M_n]$,$l\to r\in R$,并且 $P_1/w\cdot w_i\equiv M_i$,$1\leqslant i\leqslant n$. 由 $P'\equiv l^{\Box}[\overline{M}_1,\cdots,\overline{M}_n]$ $N'\equiv l^{\Box}[\overline{\overline{M}}_1,\cdots,\overline{\overline{M}}_n]$,并且 $M_i\xrightarrow[*]{i}\overline{M}_i\overset{m}{\underset{u_i}{\Rightarrow}}\overline{\overline{M}}_i$,$\{w_i\cdot u\mid u\in u_i\}\subseteq Re(P/w\xrightarrow[*]{i}P',A_1/w)$. 如果 $|[i]_{\sim l}|>1$,则 $\overline{h}(M_i)<k$,从而 $u_i=\varnothing$. 于是,存在 M_i^3,$1\leqslant i\leqslant n$,使得满足:如果 $|[i]_{\sim l}|=1$ 则 $M_i^3=\overline{\overline{M}}_i$,如果 $|[i]_{\sim l}|>1$ 则 $\overline{\overline{M}}_i\xrightarrow[*]{i}M_i^3$,同时有 $<M_1,\cdots,M_n>=<M_1^3,\cdots,M_n^3>(mod\sim_l)$. 令 $P_w\equiv P'[w_1\leftarrow M_1^4]\cdots[w_n\leftarrow M_n^4]$,这里若 $|[i]_{\sim l}|=1$,则 $M_i^4=\overline{M}_i$,否则 $M_i^4=M_i^3$. 令 $N_w\equiv N'[w_1\leftarrow M_1^5]\cdots[w_n\leftarrow M_n^5]$,这里若 $|[i]_{\sim l}|=1$,则 $M_i^5=\overline{\overline{M}}_i$,否则 $M_i^5=M_i^3$. 显然,$P/w\xrightarrow[*]{i}P_1/w\xrightarrow[*]{i}P_w\overset{m}{\underset{A'}{\Rightarrow}}N_w$,且 $P/w\overset{m}{\underset{A_1/w}{\Rightarrow}}Q/w\xrightarrow[*]{i}N_w$,并且 $\vec{l}\equiv<M_1,\cdots,M_n>\equiv<M_1^5,\cdots,M_n^5>(mod\sim_l)$.

对于任意 $w\in Y_1$,则不妨设 $P/w\equiv l^{\Box}[M_1^0,\cdots,M_{n_0}^0,N^1,M_1^1,\cdots,M_{n_1}^1,N^2,M_1^2,\cdots,M_{n_2}^2,\cdots,M_{n_{m-1}}^{m-1},N^m,M_1^m,\cdots,M_{n_m}^m]$,$l\to r\in R$,$A_2/w=occ(l^{\Box}[M_1^0,\cdots,M_{n_0}^0,\Box,M_1^1,M_{n_1}^1,\Box,M_1^2,\cdots,M_{n_2}^2,\cdots,M_{n_{m-1}}^{m-1},\Box,M_1^m,\cdots,M_{n_m}^m],\Box)$,$P/ww_i\equiv N^i$,$1\leqslant i\leqslant m$. 由断言(f),存在 P'_1,N',使得 $P/w\xrightarrow[*]{i}P_1/w\xrightarrow[*]{i}P'_1\xrightarrow[m]{\wedge}N'$,$P/w\xrightarrow[m]{\wedge}Q/w\xrightarrow[*]{i}N'$. 不妨设 $P_1/w\equiv l^{\Box}[\overline{M}_1^0,\cdots,\overline{M}_{n_0}^0,\overline{N}^1,\overline{M}_1^1,\cdots,\overline{M}_{n_1}^1,\overline{N}^2,\overline{M}_1^2,\cdots,\overline{M}_{n_{m-1}}^{m-1},\overline{N}^m,\overline{M}_1^m,\cdots,\overline{M}_{n_m}^m]$,并且 $P'\equiv l^{\Box}[\overline{\overline{M}}_1^0,\cdots,\overline{\overline{M}}_{n_0}^0,\overline{\overline{N}}^1,\overline{\overline{M}}_1^1,\cdots,\overline{\overline{M}}_{n_1}^1,\overline{\overline{N}}^2,\overline{\overline{M}}_1^2,\cdots,\overline{\overline{M}}_{n_{m-1}}^{m-1},\overline{\overline{N}}^m,\overline{\overline{M}}_1^m,\cdots,\overline{\overline{M}}_{n_m}^m]$,这里 $M_j^i\xrightarrow[*]{i}\overline{M}_j^i\xrightarrow[*]{i}\overline{\overline{M}}_j^i$,$0\leqslant i\leqslant m$,$1\leqslant j\leqslant n_i$. 对于 $\overline{\overline{N}}^i$,$1\leqslant i\leqslant m$,因为 $\overline{\overline{N}}^i\equiv l_1^{\Box}[M^1,\cdots M^n]l_1\to r_1\in R$,故 $\overline{\overline{N}}^i\equiv l_1^{\Box}[\overline{M}^1,\cdots,\overline{M}^n]$,$M^j\xrightarrow[*]{i}\overline{M}^j$,$1\leqslant j\leqslant n$. 于是存在 $\overline{\overline{M}}^i$,$1\leqslant i\leqslant n$,使得 $\overline{M}^j\xrightarrow[*]{i}\overline{\overline{M}}^j$,$\vec{l}_1\equiv<M^1,\cdots,M^n>\equiv<\overline{\overline{M}}^1,\cdots,\overline{\overline{M}}^n>(mod\sim_{l_1})$. 设 $\tilde{N}^i\equiv l_1^{\Box}[\overline{\overline{M}}^1,\cdots,\overline{\overline{M}}^n]$,$1\leqslant i\leqslant m$,显然,$\overline{\overline{N}}^i\xrightarrow[*]{i}\tilde{N}^i$. 注意,对于任意 $i\in\{(\sum_{j=1}^{k}n_j)+1\mid 0\leqslant k<m\}$,$|[i]_{\sim l}|=1$. 令 $P_w\equiv P'[w_1\leftarrow\tilde{N}^1]\cdots[w_m\leftarrow\tilde{N}^m]$,$N_w$ 满足 $P_w\xrightarrow{\wedge}N_w$,该归约是可行的,因为 $<\overline{\overline{M}}_1^0,\cdots,\overline{\overline{M}}_{n_0}^0,\tilde{N}^1,\overline{\overline{M}}_1^1,\cdots,\overline{\overline{M}}_{n_1}^1,\tilde{N}^2,\overline{\overline{M}}_1^2,\cdots,\overline{\overline{M}}_{n_2}^2,\cdots,\overline{\overline{M}}_{n_{m-1}}^{m-1},\tilde{N}^m,\overline{\overline{M}}_1^m,\cdots,\overline{\overline{M}}_{n_m}^m>\equiv<\overline{\overline{M}}_1^0,\cdots,\overline{\overline{M}}_n^0,\overline{\overline{N}}^1,\overline{\overline{M}}_1^1,\cdots,\overline{\overline{M}}_{n_1}^1,\overline{\overline{N}}^2,\overline{\overline{M}}_1^2,\cdots,\overline{\overline{M}}_{n_{m-1}}^{m-1},\overline{\overline{N}}^m,\overline{\overline{M}}_1^m,\cdots,\overline{\overline{M}}_{n_m}^m>\equiv\vec{l}(mod\sim_l)$.

设 $\overline{Y}_2\cup\overline{A}_2\cup\overline{Y}_1=\{w_1,\cdots,w_k\}$,则令 $P_3\equiv P_1[w_1\leftarrow P_{w1}]\cdots[w_k\leftarrow P_{wk}]$,$P_4\equiv P_1[w_1\leftarrow N_{w1}]\cdots$

$[w_k\leftarrow N_{wk}]$，故有 $P\xrightarrow[*]{i}P_1\xrightarrow[*]{i}P_3\overset{m}{\underset{A_3}{\Rightarrow}}P_4$，$P\overset{m}{\underset{A_1}{\Rightarrow}}Q\xrightarrow[*]{i}P_4$，这里 $A_3\subseteq Re(P\xrightarrow[*]{i}P_3,A_1)$，并且满足：(i) 如果 $P_1\xrightarrow[*]{i}P_3$ 形如 $P_1\xrightarrow[*]{i}P^1\xrightarrow{w'}P^2\xrightarrow[*]{i}P_3$，则对于任意 $u\in Re(P_1\xrightarrow[*]{i}P',A_2)$，$u\leqslant w$ 或者 $u\perp w$；(ii)对于任意 $w'\in A_2$，任意 $w''\in re(P_1\xrightarrow[*]{i}P',w')$，设 $P_1/w'\equiv l^{\square}[M_1,\cdots,M_n]$，$P_3/w''\equiv l^{\square}[M'_1,\cdots,M'_n]$，则 $\vec{l}\equiv\langle M_1,\cdots,M_n\rangle\equiv\langle M'_1,\cdots,M'_n\rangle$，这里 $l\to r\in R$. (iii)任意 $w'\in A_3$，有 $\bar{h}(P_3/w')=k$.

根据(i)和(ii)可知，存在 P_4，使得 $P_2\xrightarrow[*]{i}P_5$ 且 $P_3\overset{m}{\underset{A_4}{\Rightarrow}}P_5$，这里 $A_4=Re(P_1\xrightarrow[*]{i}P_3,A_2)$.

最后，对于任意 $w^1\in A_3$，$w^2\in A_4$，如果 $w^a<w^b$，$\{a,b\}=\{1,2\}$ $P_3/w^a\equiv\theta(l)$，$l\to r\in R$，θ 是一个代换，由 $P_1\xrightarrow[*]{i}P_3$ 的构造可知，存在 $w\in VO(l)$，$|occ(l,l/w)|=1$，$w\leqslant w^b/w^a$. 因此，令 P_6 满足 $P_4\overset{m}{\underset{A'_4}{\Rightarrow}}P_6$，$A'_4=Re(P_3\overset{m}{\underset{A_3}{\Rightarrow}}P_4,A_4)$，当然 $P_5\overset{m}{\underset{A'_3}{\Rightarrow}}P_6$，$A'_3=Re(P_3\overset{m}{\underset{A_4}{\Rightarrow}}P_5,A_3)$.

令 $Q_1\equiv P_4$，$N\equiv P_6$ 即可.

(g)的证明如图4所示.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "i", "*"'] \arrow[d, Rightarrow, "m"', "A_1"] & P_1 \arrow[r, Rightarrow, "m", "A_2"'] \arrow[d, dashed, "i"', "*"] & P_2 \arrow[d, dashed, "i"', "*"] \\
 & P_3 \arrow[r, Rightarrow, dashed, "m", "A_4"'] \arrow[d, Rightarrow, "m"', "A_3"] & P_5 \arrow[d, Rightarrow, dashed, "m"', "A'_3"] \\
Q \arrow[r, dashed, "i", "*"'] & P_4 \arrow[r, Rightarrow, dashed, "m", "A'_4"'] & P_6
\end{tikzcd}$$

图 4

(g)可推出下面的断言(h).

(h)设 $P\in T(F)$，$\bar{h}(P)\leqslant k$. 如果 $P\overset{m}{\underset{A}{\Rightarrow}}Q_1$ 且 $P\xrightarrow[R]{*}Q_2$，则存在 N，使得 $Q_1\xrightarrow[R]{*}N$ 且 $Q_2\xrightarrow[R]{*}N$.

(h)的证明：归纳于 $mlen(P\xrightarrow[R]{*}Q_2)$.

如果 $mlen(P\xrightarrow[R]{*}Q_2)=0$，则由(f)可知 N 存在.

如果 $mlen(P\xrightarrow[R]{*}Q_2)=1$，则由(g)可知 N 存在.

如果 $mlen(P\xrightarrow[R]{*}Q_2)>1$，则不妨设 $P\xrightarrow[R]{*}Q_2$ 为 $P\xrightarrow[*]{i}P_1\overset{m}{\Rightarrow}P_2\xrightarrow[R]{*}Q_2$，则由(g)，存在 P_3，P_4，使得 $Q_1\xrightarrow[R]{*}P_4$ 且 $P_2\xrightarrow[*]{i}P_3\overset{m}{\Rightarrow}P_4$. 又由(e)，存在 P_5 使得 $Q_2\xrightarrow[*]{i}P_5$ 且 $P_3\xrightarrow[R]{*}P_5$，$mlen(P_3\xrightarrow[R]{*}P_5)\leqslant mlen(P_2\xrightarrow[R]{*}Q_2)$，从而由归纳假设，存在 N 使得 $P_4\xrightarrow[R]{*}N$ 且 $P_5\xrightarrow[R]{*}N$.

现在我们来证明：

如果 $\bar{h}(M)=k>k_0$，则 $M\xrightarrow[R]{*}M_1$ 且 $M\xrightarrow[R]{*}M_2$ 蕴含存在 N，使得 $M_1\xrightarrow[R]{*}N$ 且 $M_2\xrightarrow[R]{*}N$.

归纳于 $mlen(M\xrightarrow[R]{*}M_1)$.

如果 $mlen(M\xrightarrow[R]{*}M_1)=0$,则由(e)可知 N 存在.

如果 $mlen(M\xrightarrow[R]{*}M_1)>0$,则设 $M\xrightarrow[R]{*}M_1$ 为 $M\xrightarrow[*]{i}P_1\overset{m}{\Rightarrow}P_2\xrightarrow[R]{*}M_1$,由(e),存在 Q_1,使得 $P_1\xrightarrow[R]{*}Q_1$,$M_2\xrightarrow[*]{i}Q_1$. 又由(h),存在 Q_2 使得 $Q_1\xrightarrow[R]{*}Q_2$ 且 $P_2\xrightarrow[R]{*}Q_2$. 最后由归纳假设,存在 N,使得 $M_1\xrightarrow[R]{*}N$,$Q_2\xrightarrow[R]{*}N$.

如图 5 所示. 至此,定理 3.9 得证.

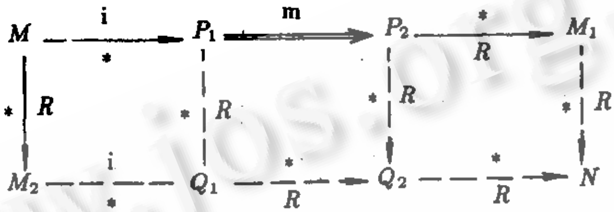

图 5

例 3.10:给定重写系统 R 如下:

R: $f_1(x,x)\rightarrow g(x)$

$g(f_2(x))\rightarrow f_1(x,h(x))$

$c\rightarrow h(c)$

设 $F=\{f_1,f_2,g,h,c\}$,$X=\{f_1,f_2\}$. 定义 $\bar{h}:T(F)\rightarrow Nat\cup\{0\}$ 如下:(1)如果 $M\in V\cup\{c\}$,则 $\bar{h}(M)=0$;(2)如果 $M\equiv f(M_1,\cdots,M_n)$,这里 $f\in\{f_1,f_2\}$,则 $\bar{h}(M)=1+max\{\bar{h}(M_i)\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$;(3)如果 $M\equiv f(M_1)$ 且 $f\in\{g,h\}$,则 $\bar{h}(M)=max\{\bar{h}(M_i)\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$.

显然,$\bar{h}\in SM(R,X,F)$. 容易验证 R 是半正则重写系统,因此,R 是合流的.

参考文献

[1]M. J. O'Donnell, Equational Logic as a Programming Language, MIT Press, 1985.

[2]G. Huet, Confluence Reductions: Abstract Properties and Application to Term Rewriting Systems, JACM 27:4, 797-821, 1980.

[3]Y. Toyama, On the Church-Rosser Property for the Direct Sum of Term Rewriting Systems, JACM 35:2, 1987.

[4]J. Klop, Combinatory Reduction Systems, Ph. D. Thesis, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1980.

[5]G. Huet and D. Oppen, Equations and Rewriting Rules: a Survey, Formal language: Perspectives and Open Problems, R. Book, eds, Academic Press, 1980.

[6]林凯,孙永强,"左线性重写系统的合流性",上海交通大学学报,1992,1.