问题的有序分解及中转站网络

胡振华　万发贯

(华中理工大学电子与信息工程系，武汉 430074)

THE ORDERED DECOMPOSITION OF PROBLEMS AND THE TRANSFER-STATION NETWORK

Hu Zhenhua and Wan Faguan

(Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

ABSTRACT

The ordered decomposition of problems is defined formally. And the conductive rate and the conductive branching factor are proposed to measure the interaction between subgoals, which provide a quantitative criterion for setting subgoals in practice. Furthermore, it is shown how to construct the transfer-station network, which is a kind of ordered decomposition in the structure of networks, and has more potentialities in application to problem solving to improve the system efficiency. Finally, an algorithm using this network, called T_w, is presented.

摘　要

本文形式地定义了问题的有序分解，并采用导通率和导通分支系数衡量子目标之间的交互作用，为实际中如何选定子目标提供了一种定量的标准．进一步，本文还论述了如何建立中转站网络．它是一种网络结构的有序分解，且更具有应用潜力．最后本文还给出了一个利用这种网络的搜索算法 T_w．

§1. 引　言

问题分解是提高问题求解效率的有效手段． AO^* 算法中，问题被分解成相互无关的子问题 [1]．规划技术则主要处理次序未定的相关子目标 [2]．然而实际中的许多问题的

1990 年 3 月 16 日收到， 1990 年 7 月 17 日定稿． **胡振华**， 1990 年在华中理工大学获博士学位，现任该校讲师．主要从事人工智能和模式识别方面的研究工作． **万发贯** 系华中理工大学教授，博士生导师，主要从事图像处理与识别、通信与电子系统、人工智能方面的研究工作．

求解还可利用另一类分解．如在符号积分问题求解中，无理函数的积分先转换成三角函数的积分，再转换成有理函数的积分等等．这种分解在起始状态和目标状态之间加入了几个起中转作用的子目标．本文称这种分解为有序分解．

§ 2. 问题的有序分解

为了适应问题分解中起始状态集和目标状态集经常变化的情况，本文将采用一种简洁方式表达一个问题．为此，这里沿用文献 [3] (p. 193) 中关于问题图的定义．问题图 G 为一个二元组 $\langle\Omega, L\rangle$, 其中 Ω 为问题状态集合，或称状态空间； L 为一组合法规则．图 G 中的可达关系将用 $\stackrel{*}{\Longrightarrow}$ 表示．而 $\Longrightarrow$ 表示一步可达关系．

我们采用有序对 $\langle X, Y\rangle$ 来表示已知问题图 $G=\langle\Omega, L\rangle$ 中的一个问题，其中 $X \subseteq \Omega$ 为起始状态集合， $Y \subseteq \Omega$ 为目标状态集合，且该问题中的转换规则即为 G 中的规则．此外，对于 $x \in X$, $\langle x, Y\rangle$ 表示 $\langle X, Y\rangle$ 中的一个问题实例， $\langle x, Y\rangle \in \langle X, Y\rangle$.

定义 1：有序多元组 $\langle Y_0, Y_1, \cdots, Y_n\rangle$ 表示依次求解问题序列 $\langle Y_0, Y_1\rangle$, $\langle Y_1, Y_2\rangle$, $\cdots$, $\langle Y_{n-1}, Y_n\rangle$. 当求解第 k 个问题 $\langle Y_{k-1}, Y_k\rangle$ 时， $1 \leq k \leq n$, 一旦发现转换后的状态 $s \in Y_j$, $k \leq j < n$, 就可转入求解 $\langle s, Y_{j+1}\rangle$; 若 $s \in Y_n$, 则序列求解完毕．

对于 $y_0 \in Y_0$, $\langle Y_0, Y_1, \cdots, Y_n\rangle$ 求解完前 k 个子问题后的情况记为 $\langle y_0, y_1, \cdots, y_k \downarrow Y_{k+1}, \cdots, Y_n\rangle$, 其中 $y_0 \stackrel{*}{\Longrightarrow} y_1 \stackrel{*}{\Longrightarrow} \cdots \stackrel{*}{\Longrightarrow} y_k$. 且在任意 $y_{i-1} \stackrel{*}{\Longrightarrow} y_i$ 的具体过程 $y_{i-1} \Longrightarrow z_1 \Longrightarrow z_2 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow z_m \Longrightarrow y_i$ 中，有 $y_i \in Y_i$, 且 $z_l \notin Y_i$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq m$. 即 y_i 是刚刚进入 Y_i 的结点．

定义 2：问题 $\langle X, Y\rangle$ 的一个有序分解记为 $\langle X, Y\rangle \propto \langle X, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\rangle$, 如果 $\forall x \in X$, $\langle x, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\rangle$ 的解也为 $\langle x, Y\rangle$ 的解．

应当注意，有序分解的子目标之间可能会有交互作用 (interaction). 下面将采用导通率和导通分支系数定量地对其加以描述．

§ 3. 导通率和导通分支系数

定义 3：对于 $\langle X, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\rangle$, $x \in X$, 若有 $\langle x, y_1, y_2, \cdots, y_k \downarrow Y_{k+1}, \cdots, Y_n\rangle$, 则称 y_i 是 x 在 Y_i 上的到达点， $1 \leq i \leq k$, $1 \leq k \leq n$. 若这些到达点能导致 $\langle x, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\rangle$ 得解，即当且仅当存在 $\langle x, y_1, y_2, \cdots, y_n \downarrow\rangle$, 则称 y_j 为 x 在 Y_j 上的导通点， $1 \leq j \leq n$.

定义 4：对于 $\langle X, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\rangle$, Y_i 的导通率 $R_c(Y_i)=\sum_{x \in X} f(x) \frac{N_i(x)}{M_i(x)}$, 其中 M_i 为 x 在 Y_i 上的到达点个数， N_i 为 x 在 Y_i 上的导通点个数， $f(x)$ 为 x 的概率密度．

定义 5：在实际求解完 $\langle Y_0, Y_1, \cdots, Y_n\rangle$ 时的搜索显图中， Y_i 中一个到达点 y_i 可达后继子目标中的到达点个数称为 y_i 的导通分支系数， $0 \leq i < n$.

导通率只与问题序列本身有关，而导通分支系数与问题序列及求解算法都有关．显然 $0 \leq R_c \leq 1$, 而导通分支系数大于等于 1. 它们之间存在着一种反比关系．如果某个子目标的 $R_c=1$, 则它的每个到达点必为导通点，从可解的角度出发，在子目标级上就不需回溯，因而该子目上每个到达点的导通分支系数都为 1. 反之若 $R_c<1$, 则该子目标中

存在非导通的到达点，在子目标级别上就可能需要回溯，以从到达点中去寻找导通点，因此该子目标中到达点的导通分支系数就可能大于 1. 这些情形有如图 2.

定理 1: 设求解 $\langle Y_0,Y_1,\cdots,Y_n\rangle$ 时的最大导通分支系数为 B_c; 各子问题 $\langle Y_0,Y_1\rangle,\langle Y_1,Y_2\rangle,\cdots,\langle Y_{n-1},Y_n\rangle$ 中的最大分支系数为 B_s, 各子问题最大的最佳解路径长为 d, 则求解 $\langle Y_0,Y_1,\cdots,Y_n\rangle$ 时最坏情况下生成的结点总数

$$V=\begin{cases}O(B_c^nB_s^d), & \text{当 } B_c>1 \text{ 时};\\ O(nB_s^d), & \text{当 } B_c=1 \text{ 时}.\end{cases}$$

证明： 称求解各子问题所生成的显图为搜索子树. B_c 相当于子目标之间以搜索子树为单元的分支过程的最大分支系数. 因此求解 $\langle Y_0,Y_1,\cdots,Y_n\rangle$ 生成的搜索子树的个数，在最坏情况下，当 $B_c>1$ 时为 $O(B_c^n)$; $B_c=1$ 时为 $O(n)$. 又因最坏情况下一个子树中的结点数为 $O(B_s^d)$, 所以当 $B_c>1$ 时， $V=O(B_c^nB_s^d)$; 当 $B_c=1$ 时， $V=O(nB_s^d)$. 证毕.

该定理说明，虽然一般分解后子问题的解路长较小，求解效率可以提高，但若 $B_c>1$, 分解后一部分复杂性仍会从状态级转入子目标级.

下面采用导通率和导通分支系数分析求解 8 数码难题时的情况. 给定有序分解 $\langle S_0,W\rangle\propto\langle S_0,S_1,\cdots,S_7,W\rangle$. 其中 S_0 为起始状态， W 为目标状态. S_i 为将牌 $(1,2,\cdots,i)$ 到位，而至少将牌 $(i+1)$ 不到位， $1\le i\le 7$.

1) 求解时不允许破坏已达到的子目标.

由 8 数码难题的性质可知 [4], 这时 S_1,S_3,S_5,S_6,S_7 的导通率都为 1. 而当达到 S_2 时，只有如图 1 (a) 所示的将牌分布可达 W. 如果将牌 (3) 在其它位置，则只要不动将牌 (2)(即破坏已达到的 S_2), 将牌 (3) 就不可能到位，亦即不能达到 W. 因此可计算出 S_2 的导通率为 $5!/(7!-6!-\cdots-2!)=0.029$. 同理，达到 S_4 时只有如图 1 (b) 的将牌分布可达 W, 故 S_4 的导通率为 0.068.

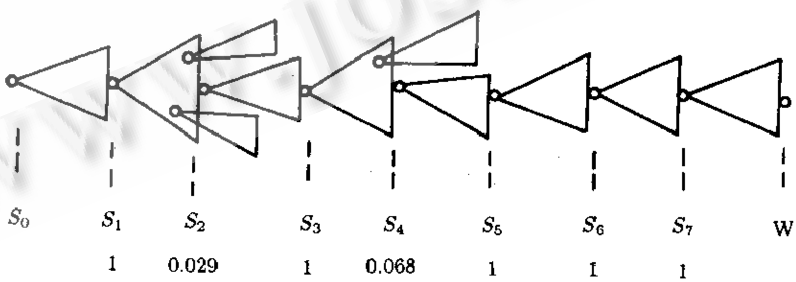
1	2	
X	X	3
X	X	X

(a)

1	2	3
X	X	4
X	5	

(b)

图 1



小圆圈为到达点，三角形为搜索子树

图 2

图 2 显示了求解 $\langle S_0,S_1,\cdots,S_7,W\rangle$ 时可能出现的情况. 可以看出 $R_c(S_2)=0.029<1$, 使得 S_1 中一个到达点引起的搜索子树在由 S_2 到 S_3 时，分支成若干个子树. 同样

的情况也发生在 S_4 处．而由于 S_1, S_3, S_5, S_6, S_7 的导通率等于 1, 通过这些子目标时就可不回溯地往下搜索．

2) 允许破坏已达到的子目标．

这时规则的使用就不受任何额外的限制．

定理 2:若 $\langle X, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n \rangle$ 中的规则任何情况下都是可逆的，则其子目标的导通率都为 1.

证明：设 $x \in X$, 存在 $\langle x, y_1, y_2, \cdots, y_n \downarrow \rangle$, 对于 $\langle x, y_1', y_2', \cdots, y_i' \downarrow Y_{i+1}, \cdots, Y_n \rangle$, $1 \le i \le n$, 因为规则是可逆的，所以 $y_i' \stackrel{*}{\Longrightarrow} y_{i-1}' \stackrel{*}{\Longrightarrow} \cdots \stackrel{*}{\Longrightarrow} y_1' \stackrel{*}{\Longrightarrow} x \stackrel{*}{\Longrightarrow} y_1 \stackrel{*}{\Longrightarrow} y_2 \stackrel{*}{\Longrightarrow} \cdots \stackrel{*}{\Longrightarrow} y_n$, 即 Y_i 中的到达点都是导通点，故 $Rc(Y_i) = 1$. 证毕．

但应指出，若允许破坏已达到的子目标的限制放得太开，求解效率就会随之而降低．

3) 去掉导通率过于小的子目标．

若将 $\langle S_0, S_1, \cdots, S_7, W \rangle$ 中的 S_2 和 S_4 去掉，使得分解后的问题序列为 $\langle S_0, S_1, S_3, S_5, S_6, S_7, W \rangle$, 则其子目标的导通率就都等于 1. 因而求解效率可望提高．

§ 4. 中转站网络

前面论述的有序分解都是链结构的．如果一个问题图中所有的分解适当的少，就可以将这些分解组合在一起，形成一个子目标网络．

定义 6:对于某个问题图 $G = \langle \Omega, L \rangle$ 和固定的目标状态集 $W, W \subseteq \Omega$, 中转站 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 为各具特征的问题状态集合， $W \cup (\bigcup_{i=1}^{n} S_i) = \Omega$, 使得任意 $Y_0 \in \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$, 如果存在 $\langle Y_0, W \rangle \propto \langle Y_0, Y_1, Y_2, \cdots, Y_m, W \rangle$, 则必有 $Y_i \in \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$, $1 \le i \le m$. W 作为一个特殊的中转站，被称为目标站．

令 $\Psi = \{W, S_1, S_2, \cdots, S_n\}$. 我们将可达关系扩展到中转站上．对于 $X, Y \in \Psi, X \ne Y$, 若 $\exists x \in X$, $\exists y \in Y$, $x \stackrel{*}{\Longrightarrow} y$, 则说 $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} Y$. 进一步考虑 X 和 Y 在相应有序分解中的位置和它们到 W 的平均距离，可判断 X 和 Y 的难易．由该难易关系修正可达关系，而形成可达难于关系 Θ. 若 $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} Y$, 且 X 难于 Y, 或它们难度相等，则 $X \Theta Y$; 反之若 $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} Y$, 但 X 易于 Y, 则 $Y \Theta X$. 即 Θ 关系以 $\stackrel{*}{\Longrightarrow}$ 关系为基础，以难于关系为方向．中转站的可达难于关系图 $\langle \Psi, \Theta \rangle$ 即为形式化了的中转站网络．

定理 3: 任意可达难于关系图 $\langle \Psi, \Theta \rangle$ 有一个到实数域 R 上的同态映射 $\alpha : \psi \to R$, 使得 $X, Y \in \Psi$, $X \Theta Y$ 时， $\alpha(X) \ge \alpha(Y)$. α 称为站难度．

证明： 可达难于关系图中可能存在回路．由 Θ 的传递性可知，回路上的中转站形成了一个等价类，即回路上的中转站的难易相等或不分上下．用一个结点来取代整个回路，原来指入或指出该回路的有向边 Θ 分别指入或指出该结点．重复此过程，直至图中没有回路．称这时的图为 $\langle \Psi', \Theta \rangle$. 它为一个偏序集．

由集合论可知，可画出 $\langle \Psi', \Theta \rangle$ 的 Hasse 图．其过程如下， $X, Y \in \Psi'$, $X \ne Y$:

1) 用小圆圈代表 Ψ' 中元素．

2) 如果 $X \Theta Y$, 则 X 画于 Y 之上．

3) 如果 $X \Theta Y$, 且无 $Z \in \Psi'$, 使得 $X \Theta Z$, $Z \Theta Y$, 则 X 与 Y 之间用一直线连接．

一个偏序集的 Hasse 图是唯一的. 从上到下对每一个小圆圈标以从大到小的不同实数，即得所要求的同态映射 α. 这时若 $X\Theta Y$, $X \neq Y$, 则 X 必在 Y 之上，即有 $\alpha(X) \geq \alpha(Y)$.

如果某个小圆圈代表原来的一个回路，则令该回路上中转站的 α 值为该小圆圈的 α 值. 证毕.

下面给出我们所设计的符号积分系统中的中转站网络. 这里 $\Psi = \{A, B_1, B_2, B_3, C, D_1, D_2, D_3, E, W\}$, 其中 A 为多项式和有理函数，B_1 为三角有理函数，B_2 为双曲有理函数，B_3 为指数有理函数，C 为无理函数，D_1 为三角无理函数，D_2 为双曲无理函数，D_3 为指数无理函数，E 为其它怪异函数，W 为目标站，即被积函数的积分. 其结果如图 4.

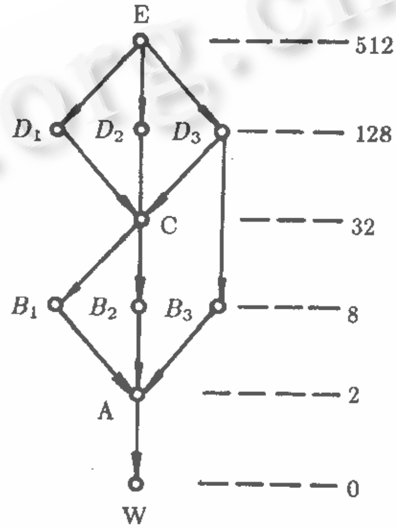


图 4 Hasse 图和 α 值

最后我们给出一个在中转站网络上搜索的算法 T_w. T_w 重点区分了站内状态级的搜索和站间中转站级的搜索. 在前者的搜索子树中，可以利用一些局部启发函数，使得搜索指向较易站. 而在后都的站间搜索中，T_w 利用了一个优先函数 $F(t)$, 以便确定开发哪个子树. $F(t)$ 与子树 t 所在站的难度和 t 的深度等特性有关.

该算法需要两个过程：

1. 生成一个新子树 t: 设定 t 的顶点，找到 t 所在的站和规则.

2. 开发一个子树 t: 根据局部启发函数扩展 t 的叶结点. 若不能扩展 t, 则开发失败.

T_w 算法：

1. 以起始结点 s 为顶点生成一个新子树，并将它放入 TREE 表中.

2. 若 TREE 为空，则失败退出. 否则，开发 TREE 中 F 值最小的子树，并称其为 t.

3. 若开发 t 失败，则将 t 从 TREE 中删除. 否则，对每个 t 中刚生成的且为其它站到达点的结点 x, DO:

1) 若 x 属于目标站，则有解并成功退出.

2) 若 x 所在站的难度大于 t 的顶点所在站的难度，则删除 x.

3) 否则以 x 为顶点生成一个新子树，并将该新子树放入 TREE 中.

4. GOTO 第 2 步.

T_w 的思想在于利用了问题的有序分解，宏观搜索引导了微观搜索. 因为一般分解后子问题的解路长和分支系数都要小于原问题，所以只要子目标之间的交互作用不大(即 B_c 较小), T_w 的求解效率就能提高. 在 T_w 的基础上，我们进一步发展出了中转站问题求解系统(将另文讨论). 该系统除了利用中转站网络，还将产生式规则区分为强规则和

弱规则．在 8 数码难题和符号积分上的实验显示了该系统的高效率和实用性．

结语：本文形式地定义了问题的有序分解．并采用导通率和导通分支系数从不同的角度定量地描述了子目标之间的相关性，为实际中选定子目标提供了一种定量的标准．

本文提出的中转站网络是一种网络结构的有序分解．我们还给出了中转站网络到实数域上的保序同态映射方法，使得在算法中利用中转站网络更为方便．随后，我们给出了一个利用中转站网络的算法 T_w．并说明了利用中转站网络可以设计出高效率的实用问题求解系统．

参考文献

[1] 尼尔逊， N. J. 著，石纯一等译，人工智能原理，科学出版社， 1984.

[2] Cohen, P.R. and Feigenbaum, E.A., The Handbook of Artificial Intelligence III, London Pitman, 1982.

[3] Banerji, R. B., Artificial Intelligence, New York, North Holland, 1980.

[4] Korf, R.E., Learning to Solve Problems by Searching for Macrooperators, London, Pitman, 1985.

'91 全国计算机体系结构教学与理论研讨会会议纪要

1991 年全国计算机体系结构教学与理论研讨会于 10 月 29 日 ~11 月 1 日在上海复旦大学举行，参加研讨会的有来自全国有关高等学校、研究所、公司及新闻、出版界等 43 个单位的 51 名代表．

鉴于体系结构的重要性以及我国计算机体系结构教育的现状，这次会议旨在促进体系结构研究与教学的发展，以适应我国计算机事业发展的需要．

在三天的会议中，代表们就计算机体系结构学科的重要性，体系结构发展的许多前沿技术，以及计算机体系结构课程、教学和教材方面的经验、体会等进行了热烈的讨论和交流，取得了许多共识．

在肯定成绩的同时，代表们也焦虑地指出，目前在计算机体系结构的教学工作中，也存在许多亟待解决的问题，其中不少问题应该引起有关领导部门的重视并提到具体议事日程上来加以解决．

与会代表认为，这次研讨会组织得很及时，很必要，它对改进我国高等学校计算机体系结构课程的教学工作，提高教学水平，都很有帮助，这是学会工作面向教学第一线，发挥桥梁、纽带作用的一个新尝试．

中国计算机学会体系结构专委会

中国计算机学会教育与培训专委会

中国电子学会计算机工程与应用学会