

旋转曲面CAD的有理B样条方法*

王国瑾

(浙江大学)

A NEW METHOD FOR REPRESENTING THE SURFACE OF REVOLUTION USING RATIONAL B-SPLINES IN CAD

Wang Guojin

(Zhejiang University)

ABSTRACT

In this paper, a new method for representing the surface of revolution using rational B-splines in CAD is described. If the profile curve has been denoted by a nonuniform rational quadratic B-spline curve, it is very convenient to represent the surface of revolution as a nonuniform rational biquadratic B-spline surface. Thus we can treat circular cylindrical surface, circular conic surface, torus, sphere, surface of revolution and free surfaces by one computer procedure. It is useful in CAD. Finally, we give some examples for representing surface of revolution and sphere as rational B-spline patches.

摘 要

本文给出了旋转曲面CAD的一种有理B样条新方法。只要轮廓曲线用非均匀有理二次B样条曲线来表示,就可相当方便地把旋转曲面表示成非均匀有理双二次B样条曲面。这样做,能把圆柱面、圆锥面、圆环面、球面乃至一

* 1989年9月25日收到, 1989年10月27日定稿, 国家自然科学基金资助课题。

般旋转曲面的程序软件和自由曲面的程序软件都用有理B样条的格式统一处理,对CAD工作是有益的。文中附有旋转曲面和球面的生成实例。

§1. 引言

自从R.F. Riesenfeld^[1]把B样条函数成功地引入CAD领域中以来,B样条方法在自由曲线和自由曲面设计的软件研制中得到了普遍应用。然而,外形设计中常用的圆锥曲线段和一些二次曲面,却无法用B样条来精确表示。为克服这一局限性,K.J. Versprille^[2]和W. Tiller^[3]等人又把有理B样条引入CAD领域。目前,有理B样条方法的研究日趋活跃。它的最显著的特点就在于使我们能用统一的程序软件来处理圆锥曲线和自由曲线,或者旋转曲面和自由曲面。事实上,当所有的权因子均相等时,有理B样条曲线曲面就转化为B样条曲线曲面。因而以往所有有关B样条方法的程序系统只不过是使用有理B样条方法所建立的程序系统的一个子系统,而后者当权因子不全相等时可以精确地描述圆锥曲线段和一些二次曲面,特别是旋转曲面。这对CAD和立体造型的软件研制者是很有吸引力的。近年来,已有R.T. Farouki^[4]、L. Piegl^[5,6]、G. Farin^[7]等给出了球面或旋转曲面的有理Bézier表示。但是,他们或者对旋转角作了特殊的限制,或者使用了无限型控制顶点,或者把曲面定义在三角域上。本文则给出了一条非均匀有理二次B样条曲线绕轴旋转生成有理双二次B样条曲面的充要条件。其基本方法是:根据轮廓曲线的控制顶点和权因子,根据旋转轴的位置和旋转角的大小,直接得出旋转曲面的控制顶点和相应的权因子。这里所有控制顶点都是有限点,所有权因子都是正的,而旋转角 2α 可取 $(0, \pi)$ 中的任意值。这就保证了计算的稳定性和通用性,同时方法本身极为简单,易被外形CAD的软件工作者所采用。本文给出了所有算法和原理,限于篇幅,省略了程序。为说明算法的实际应用,我们扼要地介绍了生成旋转面的一个实例和生成球面的二个实例。

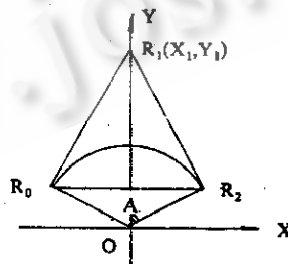


图1 圆弧曲线的有理二次Bézier表示

§2. 预备知识

命题1.^[6] 设有XY平面上的有理二次Bézier曲线

$$\mathbf{R}(T) = \sum_{j=0}^2 B_j^2(T) H_j \mathbf{R}_j / \sum_{j=0}^2 B_j^2(T) H_j \quad (0 \leq T \leq 1; H_j > 0, \mathbf{R}_j = (X_j, Y_j), j = 0, 1, 2) \quad (1)$$

若选取这样的笛卡尔平面直角坐标系, 使X轴正向与向量 $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_2$ 一致, Y轴过点 $(\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_2)/2$, $Y_1 > 0$, 则(1)构成以 $2A(0 < A < \frac{\pi}{2})$ 为圆心角, 以原点为圆心, 以 $L \cdot \csc A$ 为半径的圆弧段的充要条件是(见图1):

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) = (0, 2L \cdot \csc 2A) \\ H_1^2 = H_0 H_2 \cos^2 A \end{cases} \quad (2)$$

这里

$$\begin{aligned} B_j^2(T) & \text{ 是二次Bernstein基函数.} \\ L & = |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0|/2 \end{aligned} \quad (3)$$

命题2.^[9] 在笛卡尔空间直角坐标系OXYZ中, 以YZ平面上的有理二次Bézier曲线

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(S) = (X(S), Y(S), Z(S)) & = \sum_{i=0}^2 B_i^2(S) G_i \mathbf{R}_i / \sum_{i=0}^2 B_i^2(S) G_i \\ (0 \leq S \leq 1, G_i > 0, \mathbf{R}_i = (0, Y_i, Z_i), Y_i \geq 0, i = 0, 1, 2) \end{aligned} \quad (4)$$

作为轮廓线, 围绕Z轴依顺时针和逆时针方向各转动A角($0 < A < \frac{\pi}{2}$), 则生成的旋转曲面(见图2)可表为与XY平面等距的点均取同一参数值S的有理双二次Bézier曲面

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(S, T) & = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 B_i^2(S) B_j^2(T) G_i H_j \mathbf{R}_{ij} / \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 B_i^2(S) B_j^2(T) G_i H_j \\ (0 \leq S, T \leq 1; G_i, H_j > 0, \mathbf{R}_{ij} = (X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}), i, j = 0, 1, 2) \end{aligned} \quad (5)$$

的充要条件是

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{i0} = (-Y_i \sin A, Y_i \cos A, Z_i) \\ \mathbf{R}_{i1} = (0, Y_i \sec A, Z_i) \\ \mathbf{R}_{i2} = (Y_i \sin A, Y_i \cos A, Z_i) \\ H_1^2 = H_0 H_2 \cos^2 A \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (6)$$

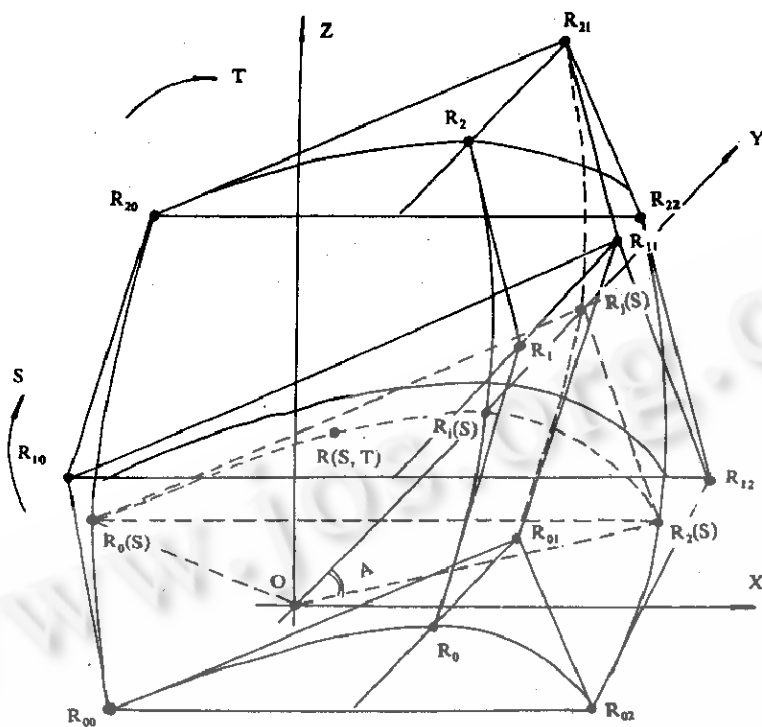


图 2 利用轮廓线把旋转曲面表为一张有理双二次 Bézier 曲面

§3. 曲线曲面有理二次的 Bézier 形式和 B 样条形式之间的互化

命题 3. 设 $\{N_j^2(t)\}$ 是定义在节点向量 $\{t_j\}_{j=n-2}^{n+2}$ 上的二次 B 样条基函数, $\{t_j\}$ 中节点重数不大于 2, 则如图 3 所示, 非均匀有理二次 B 样条曲线

$$r(t) = \frac{\sum_{j=n-2}^n N_j^2(t) h_j r_j}{\sum_{j=n-2}^n N_j^2(t) h_j} \quad (7)$$

$(t_n \leq t \leq t_{n+1}; h_j > 0, j = n-2, n-1, n)$

可以转化成有理二次 Bézier 曲线 (1), 这里

$$(H_0, H_1, H_2) = \left(\frac{c}{b+c} h_{n-2} + \frac{b}{b+c} h_{n-1}, h_{n-1}, \frac{d}{c+d} h_{n-1} + \frac{c}{c+d} h_n \right) \quad (8)$$

$$(R_0, R_1, R_2) = ((1-l_1)r_{n-2} + l_1 r_{n-1}, r_{n-1}, l_2 r_{n-1} + (1-l_2)r_n) \quad (9)$$

其中

$$T = \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n}$$

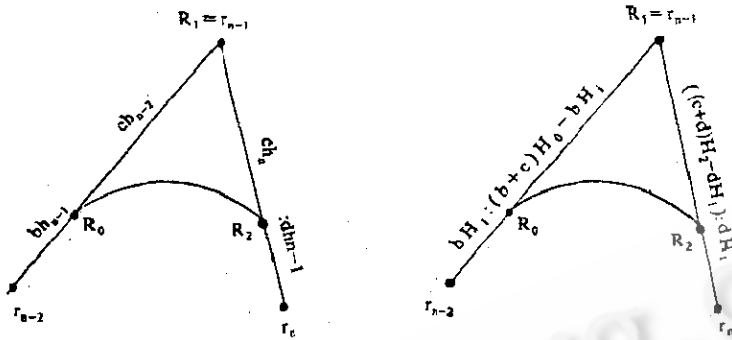


图3 非均匀有理二次B样条曲线可被转换成有理二次Bezier曲线, 反之亦然

$$(b, c, d) = (t_n - t_{n-1}, t_{n+1} - t_n, t_{n+2} - t_{n+1}) \quad (10)$$

$$(l_1, l_2) = \left(\frac{bh_{n-1}}{bh_{n-1} + ch_{n-2}}, \frac{dh_{n-1}}{ch_{n-1} + dh_{n-1}} \right) \quad (11)$$

反之, 在条件

$$c > \max\left(b \frac{H_1 - H_0}{H_0}, d \frac{H_1 - H_2}{H_2}\right) \quad (12)$$

之下, (1) 可以转化成 (7), 我们有

$$(h_{n-2}, h_{n-1}, h_n) = \left(\frac{bH_1}{ck_1}, H_1, \frac{dH_1}{ck_2} \right) \quad (b, d \neq 0) \quad (13)$$

$$(b = 0 \text{ 时}, h_{n-2} = H_0; d = 0 \text{ 时}, h_n = H_2)$$

$$(r_{n-2}, r_{n-1}, r_n) = (R_0 + k_1(R_0 - R_1), R_1, R_2 + k_2(R_2 - R_1)) \quad (14)$$

其中 $(k_1, k_2) = \left(\frac{bH_1}{(b+c)H_0 - bH_1}, \frac{dH_1}{(c+d)H_2 - dH_1} \right) \quad (15)$

证. 若 t_n 和 t_{n+1} 均是单重节点, 按 Boehm 算法^[10], 先在 t_n 处插入一个新节点, 则 (7) 变成有理二次B样条曲线

$$r_n(t) = \frac{\sum_{j=n-2}^n N_{n,j}^2(t) h_{n,j} r_{n,j}}{\sum_{j=n-2}^n N_{n,j}^2(t) h_{n,j}} \quad (t_n \leq t \leq t_{n+1}) \quad (16)$$

这里

$$(h_{n-2}, h_{n-1}, h_n) = \left(\frac{c}{b+c} h_{n-2} + \frac{b}{b+c} h_{n-1}, h_{n-1}, h_n \right)$$

$$(r_{n-2}, r_{n-1}, r_n) = ((1-l_1)r_{n-2} + l_1 r_{n-1}, r_{n-1}, r_n)$$

$$t_{n,j} = \begin{cases} t_j & (j \leq n) \\ t_{j-1} & (j > n) \end{cases}$$

且其中 $N_{n,j}^2(t)$ 是定义在节点向量 $\{t_j\}$ 上的二次 B 样条基函数。再在 t_{n+1} 处插入一个新节点, 则 (16) 就变成 (1), 且有 (8) 和 (9)。反之, 在条件 (12) 之下, 由 (8) 和 (9) 反解可得 (13), (14) 且 $h_j > 0$ ($j = n-2, n-1, n$)。

若 t_n 和 t_{n+1} 中有一个是单重节点, 另一个是二重节点, 则只要在单重节点处插入一个新节点即可实现转化。证毕。

应用命题 3, 我们不难得到

命题 4. 设 $\{N_i^2(s)\}, \{N_j^2(t)\}$ 分别是定义在节点向量 $\{s_i\}_{i=m-2}^{m+2}, \{t_j\}_{j=n-2}^{n+2}$ 上的二次 B 样条基函数, $\{s_i\}, \{t_j\}$ 中节点重数均不大于 2。则如图 4 所示, 非均匀有理双二次 B 样条曲面

$$r(s, t) = \frac{\sum_{i=m-2}^m \sum_{j=n-2}^n N_i^2(s) N_j^2(t) g_i h_j r_{ij}}{\sum_{i=m-2}^m \sum_{j=n-2}^n N_i^2(s) N_j^2(t) g_i h_j} \quad \left(\begin{array}{l} s_m \leq s \leq s_{m+1}, t_n \leq t \leq t_{n+1}; g_i, h_j > 0; \\ i = m-2, m-1, m; j = n-2, n-1, n \end{array} \right) \quad (17)$$

可以转化成有理双二次 Bézier 曲面 (5), 这里

$$(G_0, G_1, G_2) = \left(\frac{v}{u+v} g_{m-2} + \frac{u}{u+v} g_{m-1}, g_{m-1}, \frac{w}{v+w} g_{m-1} + \frac{v}{v+w} g_m \right) \quad (18)$$

$$(H_0, H_1, H_2) = \left(\frac{c}{b+c} h_{n-2} + \frac{b}{b+c} h_{n-1}, h_{n-1}, \frac{d}{c+d} h_{n-1} + \frac{c}{c+d} h_n \right) \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{00} = (1-l_1) \left[(1-p_1) r_{m-2, n-2} + p_1 r_{m-1, n-2} \right] + l_1 \left[(1-p_1) r_{m-2, n-1} + p_1 r_{m-1, n-1} \right] \\ R_{01} = (1-p_1) r_{m-2, n-1} + p_1 r_{m-1, n-1} \\ R_{02} = l_2 \left[(1-p_1) r_{m-2, n-1} + p_1 r_{m-1, n-1} \right] + (1-l_2) \left[(1-p_1) r_{m-2, n} + p_1 r_{m-1, n} \right] \\ R_{10} = (1-l_1) r_{m-1, n-2} + l_1 r_{m-1, n-1} \\ R_{11} = r_{m-1, n-1} \\ R_{12} = l_2 r_{m-1, n-1} + (1-l_2) r_{m-1, n} \\ R_{20} = (1-l_1) \left[p_2 r_{m-1, n-2} + (1-p_2) r_{m, n-2} \right] + l_1 \left[p_2 r_{m-1, n-1} + (1-p_2) r_{m, n-1} \right] \\ R_{21} = p_2 r_{m-1, n-1} + (1-p_2) r_{m, n-1} \\ R_{22} = l_2 \left[p_2 r_{m-1, n-1} + (1-p_2) r_{m, n-1} \right] + (1-l_2) \left[p_2 r_{m-1, n} + (1-p_2) r_{m, n} \right] \end{array} \right. \quad (20)$$

其中

$$S = \frac{s - s_m}{s_{m+1} - s_m}, T = \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \quad (21)$$

$$(u, v, w) = (s_m - s_{m-1}, s_{m+1} - s_m, s_{m+2} - s_{m+1}) \quad (22)$$

$$(b, c, d) = (t_n - t_{n-1}, t_{n+1} - t_n, t_{n+2} - t_{n+1}) \quad (23)$$

$$(p_1, p_2) = \left(\frac{u g_{m-1}}{u g_{m-1} + v g_{m-2}}, \frac{w g_{m-1}}{v g_m + w g_{m-1}} \right) \quad (24)$$

$$(l_1, l_2) = \left(\frac{b h_{n-1}}{b h_{n-1} + c h_{n-2}}, \frac{d h_{n-1}}{c h_n + d h_{n-1}} \right) \quad (25)$$

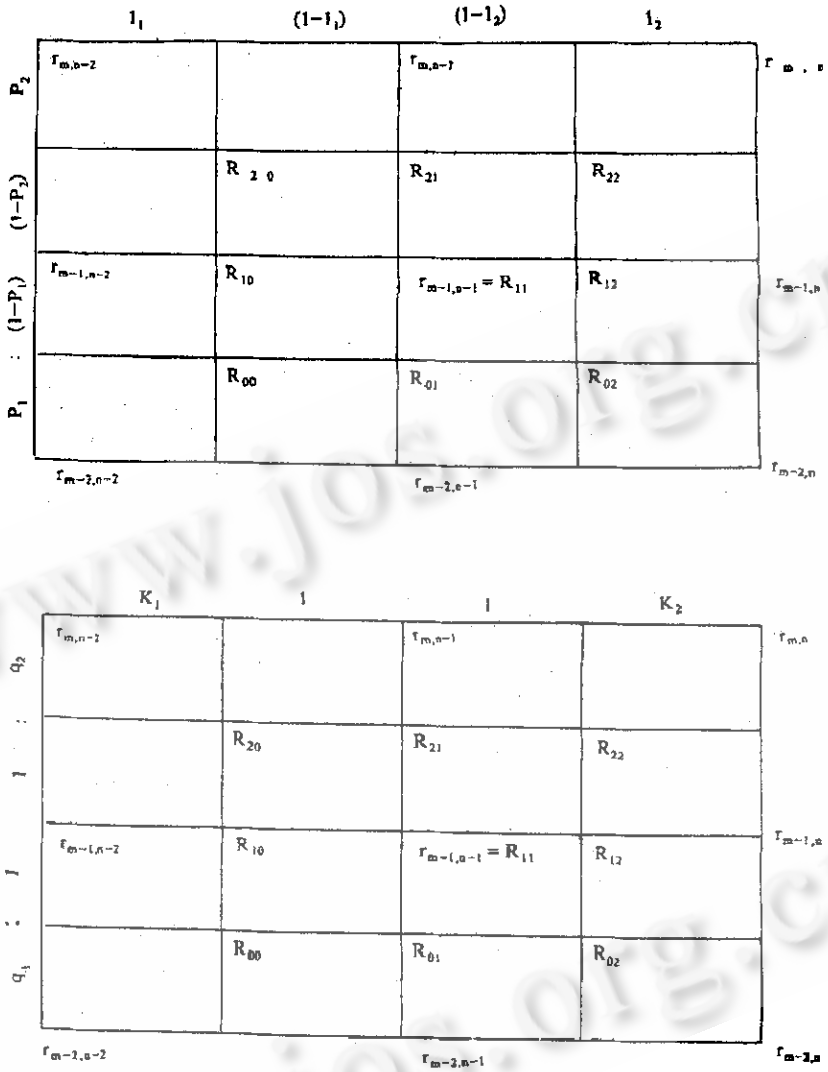


图4 非均匀有理双二次B样条曲面可被转换成有理二次Bézier曲面。反之亦然

反之, 在条件

$$v > \max(u \cdot \frac{G_1 - G_0}{G_0}, w \cdot \frac{G_1 - G_2}{G_2}) \tag{26}$$

$$c > \max(b \cdot \frac{H_1 - H_0}{H_0}, d \cdot \frac{H_1 - H_2}{H_2}) \tag{27}$$

之下, (5) 可以转化成(17), 我们有

$$(g_{m-2}, g_{m-1}, g_m) = \left(\frac{uG_1}{vq_1}, G_1, \frac{wG_1}{vq_2} \right) (u, w \neq 0) \tag{28}$$

$$(u = 0 \text{ 时}, g_{m-2} = G_0; w = 0 \text{ 时}, g_m = G_2)$$

$$(h_{n-2}, h_{n-1}, h_n) = \left(\frac{bH_1}{ck_1}, H_1, \frac{dH_1}{ck_2} \right) (b, d \neq 0) \quad (29)$$

$$(b=0 \text{ 时}, h_{n-2} = H_0; d=0 \text{ 时}, h_n = H_2)$$

$$\begin{cases} r_{m-2, n-2} = R_{00} + k_1(R_{00} - R_{01}) + q_1(R_{00} - R_{10}) + k_1q_1(R_{00} + R_{11} - R_{01} - R_{10}) \\ r_{m-2, n-1} = R_{01} + q_1(R_{01} - R_{11}) \\ r_{m-2, n} = R_{02} + k_2(R_{02} - R_{01}) + q_1(R_{02} - R_{12}) + k_2q_1(R_{02} + R_{11} - R_{01} - R_{12}) \\ r_{m-1, n-2} = R_{10} + k_1(R_{10} - R_{11}) \\ r_{m-1, n-1} = R_{11} \\ r_{m-1, n} = R_{12} + k_2(R_{12} - R_{11}) \\ r_{m, n-2} = R_{20} + k_1(R_{20} - R_{21}) + q_2(R_{20} - R_{10}) + k_1q_2(R_{20} + R_{11} - R_{21} - R_{10}) \\ r_{m, n-1} = R_{21} + q_2(R_{21} - R_{11}) \\ r_{m, n} = R_{22} + k_2(R_{22} - R_{21}) + q_2(R_{22} - R_{12}) + k_2q_2(R_{22} + R_{11} - R_{21} - R_{12}) \end{cases} \quad (30)$$

其中

$$(q_1, q_2) = \left(\frac{uG_1}{(u+v)G_0 - uG_1}, \frac{wG_1}{(v+w)G_2 - wG_1} \right) \quad (31)$$

$$(k_1, k_2) = \left(\frac{bH_1}{(b+c)H_0 - bH_1}, \frac{dH_1}{(c+d)H_2 - dH_1} \right) \quad (32)$$

§4. 圆弧曲线段的有理二次B样条表示

根据命题1和3, 我们可把圆心角为 $2A$ ($0 < A < \frac{\pi}{2}$), 半径为 $L \cdot \csc A$ 的圆弧曲线段表示成非均匀有理二次B样条曲线(7), 具体可设计以下三种不同算法。

算法1. 已知 (b, c, d) : 令 $H_0 = H_2$, 按命题1求得 $\{H_j\}_{j=0}^2, \{R_j\}_{j=0}^2$, 再按(13)、(14)求得 $\{h_j\}_{j=n-2}^n, \{r_j\}_{j=n-2}^n$.

算法2. 已知 $\frac{|r_{n-2} - R_0|}{|R_0 - R_1|} = k_1 \in [0, \frac{\cos A}{1 - \cos A}), \frac{|r_n - R_2|}{|R_2 - R_1|} = k_2 \in [0, \frac{\cos A}{1 - \cos A})$: 按命题1求得 $\{H_j\}_{j=0}^2, \{R_j\}_{j=0}^2$, 再按(15)求得

$$\begin{cases} \frac{b}{c} = \frac{H_0 k_1}{H_1(1+k_1) - H_0 k_1} \geq 0 \\ \frac{d}{c} = \frac{H_2 k_2}{H_1(1+k_2) - H_2 k_2} \geq 0 \end{cases} \quad (33)$$

最后按(13)、(14)求得 $\{h_j\}_{j=n-2}^n, \{r_j\}_{j=n-2}^n$.

算法3. 已知 (b, c, d) 和 $\frac{|r_n - r_{n-1}|}{|r_{n-2} - r_{n-1}|} = K > 0$: 按命题1必成立着

$$\begin{cases} \frac{(b+c)H_0 - bH_1}{(b+c)H_0} \cdot |r_{n-2} - r_{n-1}| = \frac{(c+d)H_2 - dH_1}{(c+d)H_2} \cdot |r_n - r_{n-1}| \\ H_1^2 = H_0 H_2 \cos^2 A \end{cases}$$

(i) 若 $b \neq 0, d \neq 0$, 按韦达定理可知 $x_1 = \frac{b}{b+c} \cdot \frac{H_1}{H_0}, x_2 = -\frac{dK}{c+d} \cdot \frac{H_1}{H_2}$ 是二次方程 $x^2 - (1-K)x - E = 0$ 之根, 这里 $E = \frac{bdK \cos^2 A}{(b+c)(c+d)}$ (34)

因而得到

$$\begin{cases} \frac{H_1}{H_0} = \frac{b+c}{2b} \left\{ (1-K) + \sqrt{(1-K)^2 + 4E} \right\} > 0 \\ \frac{H_1}{H_2} = \frac{c+d}{2dK} \left\{ (K-1) + \sqrt{(K-1)^2 + 4E} \right\} > 0 \end{cases} \quad (35)$$

(ii) 若 $b = 0, d \neq 0 (K > 1)$, 则有

$$\begin{cases} \frac{H_1}{H_2} = \left(1 + \frac{c}{d}\right) \left(1 - \frac{1}{K}\right) > 0 \\ \frac{H_1}{H_0} = \frac{H_2}{H_1} \cos^2 A > 0 \end{cases} \quad (36)$$

(iii) 若 $b \neq 0, d = 0 (K < 1)$, 则有

$$\begin{cases} \frac{H_1}{H_0} = \left(1 + \frac{c}{b}\right) (1-K) > 0 \\ \frac{H_1}{H_2} = \frac{H_0}{H_1} \cos^2 A > 0 \end{cases} \quad (37)$$

(iv) 若 $b = d = 0 (K = 1)$, 则可取

$$\begin{cases} H_0 = H_2 = 1 \\ H_1 = \cos A \end{cases} \quad (38)$$

计算出 $\{H_j\}_{j=0}^n$ 以后, 再按命题1求得 $\{R_j\}_{j=0}^n$, 最后由(13), (14)求得 $\{h_j\}_{j=n-2}^n, \{r_j\}_{j=n-2}^n$.

例1. 设计如图5的圆弧曲线段, 已知 $A = \frac{\pi}{4}, k_1 = k_2 = 1$. 则按算法2, 可取 $H_0 = H_2 = 2, H_1 = \sqrt{2}$, 计算得 $R_0 = (1, 0), R_1 = (1, 1), R_2 = (0, 1), \frac{b}{c} = \frac{d}{c} = \sqrt{2} + 1, \{h_j\}_{j=n-2}^n = \{2 + \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}, r_{n-2} = (1, -1), r_{n-1} = (1, 1), r_n = (-1, 1)$. 显然, 若选择 $k_1 = k_2 = 0$, 则我们有 $b = d = 0, \{h_j\}_{j=n-2}^n = \{2, \sqrt{2}, 2\}, \{r_j\}_{j=n-2}^n = \{R_0, R_1, R_2\}$.

例2. 设计如图6的单位圆弧曲线段, 已知 $A = \frac{\pi}{3}, K = 1$, 再设 $(b, c, d) = (3, 1, 3)$, 则按算法3, 有 $\frac{H_1}{H_0} = \frac{H_1}{H_2} = \frac{1}{2}$, 取 $H_0 = H_2 = 2, H_1 = 1$, 再求得 $R_0 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}), R_1 = (0, 2), R_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, 故 $\{h_j\}_{j=n-2}^n = \{5, 1, 5\}, r_{n-2} = (-\frac{4}{5}\sqrt{3}, -\frac{2}{5}), r_{n-1} = (0, 2), r_n = (\frac{4}{5}\sqrt{3}, -\frac{2}{5})$.

§5. 利用非均匀有理二次B样条曲线

所定义的轮廓曲线生成旋转曲面

应用命题2, 4和3, 我们不难证明

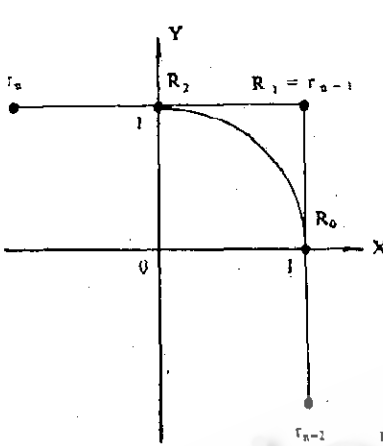


图5 算法2的例子

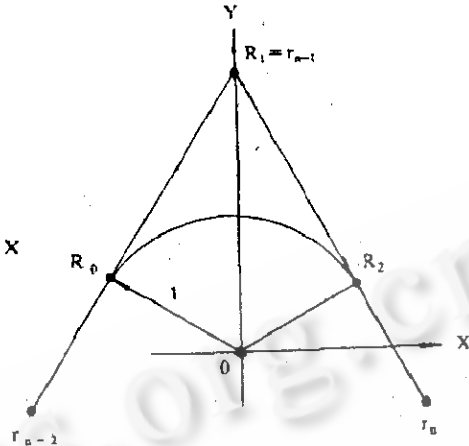


图6 算法3的例子

命题5. 设 $\{N_i^2(s)\}$ 是定义在节点向量 $\{s_i\}_{i=m-1}^{m+2}$ 上的二次 B 样条基函数, $\{s_i\}$ 中节点重数不大于 2. 在笛卡尔空间直角坐标系 $oxyz$ 中, 以 yz 平面上的非均匀有理二次 B 样条曲线

$$r(s) = (x(s), y(s), z(s)) = \frac{\sum_{i=m-2}^m N_i^2(s) g_i r_i}{\sum_{i=m-2}^m N_i^2(s) g_i} \quad (39)$$

$(s_m \leq s \leq s_{m+1}; g_i > 0, r_i = (0, y_i, z_i), y(s) \geq 0, i = m-2, m-1, m)$

作为轮廓线, 围绕 z 轴依顺时针和逆时针方向各转动 A 角 $(0 < A < \frac{\pi}{2})$, 则生成的旋转曲面可表为与 xy 平面等距的点均取同一参数值 s 的非均匀有理双二次 B 样条曲面 (17) 的充要条件是

$$\begin{cases} r_{i,n-2} = (-y_i(1+k_1)\sin A, y_i(1-k_1\lg^2 A)\cos A, z_i) \\ r_{i,n-1} = (0, y_i \sec A, z_i) \\ r_{i,n} = (y_i(1+k_2)\sin A, y_i(1-k_2\lg^2 A)\cos A, z_i) \\ (h_{n-2}, h_{n-1}, h_n) = \left(\frac{bH_1}{ck_1}, H_1, \frac{dH_1}{ck_2}\right) (b, d \neq 0) \\ (b=0 \text{ 时}, h_{n-2} = H_0; d=0 \text{ 时}, h_n = H_2) \end{cases} \quad (40)$$

这里

$$\begin{aligned} (k_1, k_2) &= \left(\frac{bH_1}{(b+c)H_0 - bH_1}, \frac{dH_1}{(c+d)H_2 - dH_1} \right) \\ (b, c, d) &= (t_n - t_{n-1}, t_{n+1} - t_n, t_{n+2} - t_{n+1}) \\ c &> \max\left(b \frac{H_1 - H_0}{H_0}, d \frac{H_1 - H_2}{H_2}\right) \end{aligned}$$

且

$$H_1^2 = H_0 H_2 \cos^2 A, H_j > 0 (j = 0, 1, 2)$$

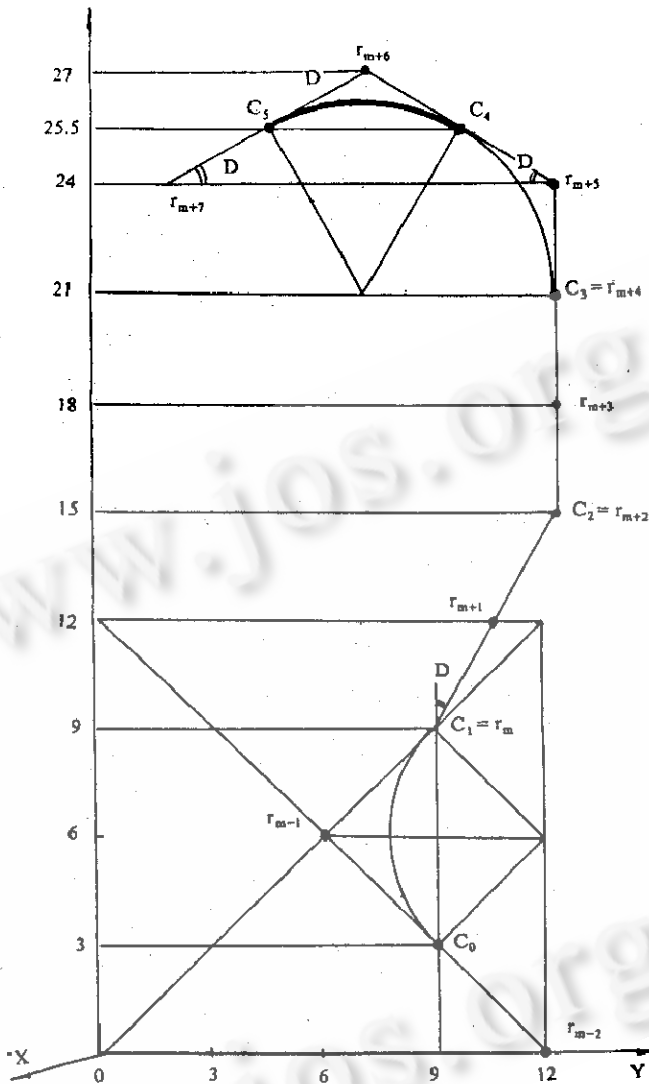


图7 轮廓线 $C_0 C_1 C_2 C_3 C_4 C_5$ 及其控制多边形 $r_{m-2} r_{m-1} \dots r_{m+7}$ (例3). ($D = \pi/6$)

有关算法可仿照算法1, 2, 3来实行。

例3. 利用图7所示的轮廓曲线生成旋转曲面。

首先, 以非均匀有理二次B样条曲线

$$r(s) = \frac{\sum_{i=m-2}^{m+7} N_i^2(s) g_i r_i}{\sum_{i=m-2}^{m+7} N_i^2(s) g_i} \quad (s_m \leq s \leq s_{m+8}) \quad (41)$$

来表示平面曲线 $\widehat{C_0 C_1 C_2 C_3 C_4 C_5}$, 其中 $\widehat{C_0 C_1}$, $\widehat{C_3 C_4}$, $\widehat{C_4 C_5}$ 各为圆弧段, $\widehat{C_1 C_2}$, $\widehat{C_2 C_3}$ 各为直线段。现取 $r_i (i = m-2, m-1, \dots, m+7)$ 为图示位置的点, 按算法2, 节点向量

可取为 $\{s_i\}_{i=m-1}^{m+9} = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}, 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}, 4+\sqrt{2}+2\sqrt{3}\}$, 权因子可取为 $\{g_i\}_{i=m-2}^{m+7} = \{4+2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4, 4, 4, 4, 2\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}, 9+5\sqrt{3}\}$, 控制顶点为 $r_{m-2} = (0, 12, 0)$, $r_{m-1} = (0, 6, 6)$, $r_m = (0, 9, 9)$, $r_{m+1} = (0, 9+\sqrt{3}, 12)$, $r_{m+2} = (0, 9+2\sqrt{3}, 15)$, $r_{m+3} = (0, 9+2\sqrt{3}, 18)$, $r_{m+4} = (0, 9+2\sqrt{3}, 21)$, $r_{m+5} = (0, 9+2\sqrt{3}, 24)$, $r_{m+6} = (0, 9-\sqrt{3}, 27)$, $r_{m+7} = (0, 9-4\sqrt{3}, 24)$.

其次, 我们让曲线 $C_0C_1C_2C_3C_4C_5$ 绕 z 轴以顺时针和逆时针方向各转动角 $A = \frac{\pi}{3}$, 则按命题5, 得到的旋转曲面可表成非均匀有理双二次B样条曲面

$$r(s, t) = \sum_{i=m-2}^{m+7} \sum_{j=n-2}^n N_i^2(s) N_j^2(t) g_i h_j r_{ij} / \sum_{i=m-2}^{m+7} \sum_{j=n-2}^n N_i^2(s) N_j^2(t) g_i h_i \quad (42)$$

$$(s_m \leq s \leq s_{m+8}, t_n \leq t \leq t_{n+1})$$

这里 s 方向的节点向量 $\{s_i\}$ 和权因子 $\{g_i\}$ 如上. 为求 t 方向的节点向量 $\{t_j\}$ 和权因子 $\{h_j\}$, 我们按算法2, 取 $H_0 = H_2 = 2, H_1 = 1, k_1 = k_2 = 0.5$, 因此 $\{t_j\}_{j=n-1}^{n+2} = \{0, 2, 3, 5, \dots\}$, $\{h_j\}_{j=n-2}^n = \{4, 1, 4\}$. 最后可算得曲面控制顶点

$$\begin{cases} r_{i,n-2} = (-\frac{3\sqrt{3}}{4}y_i, -\frac{1}{4}y_i, z_i) \\ r_{i,n-1} = (0, 2y_i, z_i) \\ r_{i,n} = (\frac{3\sqrt{3}}{4}y_i, -\frac{1}{4}y_i, z_i) \end{cases} \quad (i = m-2, m-1, \dots, m+7)$$

显然, 如果要得到一张完整的旋转面, 只要以 z 轴为中心, 对称地布置三张相同的曲面(42)即可. 当然, 这张完整的旋转面也可更方便地表为如下形式的非均匀有理双二次B样条曲面:

$$r^*(s, t) = \sum_{i=m-2}^{m+7} \sum_{j=n-2}^{n+4} N_i^2(s) N_j^2(t) g_i h_j^* r_{ij}^* / \sum_{i=m-2}^{m+7} \sum_{j=n-2}^{n+4} N_i^2(s) N_j^2(t) g_i h_j^* \quad (43)$$

$$(s_m \leq s \leq s_{m+8}, t_n \leq t \leq t_{n+5})$$

这里节点向量 $\{s_i\}$ 与权因子 $\{g_i\}$ 同上, 且

$$\{t_j\}_{j=n-1}^{n+6} = \{0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3\}$$

$$\{h_j^*\}_{j=n-2}^{n+4} = \{2, 1, 2, 1, 2, 1, 2\}$$

$$\begin{cases} r_{i,n-2}^* = (-\frac{\sqrt{3}}{2}y_i, \frac{1}{2}y_i, z_i) \\ r_{i,n-1}^* = (0, 2y_i, z_i) \\ r_{i,n}^* = (\frac{\sqrt{3}}{2}y_i, \frac{1}{2}y_i, z_i) \\ r_{i,n+1}^* = (\sqrt{3}y_i, -y_i, z_i) \\ r_{i,n+2}^* = (0, -y_i, z_i) \\ r_{i,n+3}^* = (-\sqrt{3}y_i, -y_i, z_i) \\ r_{i,n+4}^* = (-\frac{\sqrt{3}}{2}y_i, \frac{1}{2}y_i, z_i) \end{cases} \quad (i = m-2, m-1, \dots, m+7)$$

事实上, 这时 $N_j^2(t)$ 退化为 Bernstein 基函数, 应用命题2 即得 (43).

例4. 四分之一球面的有理双二次B样条表示.

首先, 把 yz 平面上的半圆 $y^2 + z^2 = a^2 (y \geq 0)$ 表为非均匀有理二次B样条曲线

$$r(s) = \sum_{i=m-2}^{m+2} N_i^2(s) g_i r_i / \sum_{i=m-2}^{m+2} N_i^2(s) g_i \quad (s_m \leq s \leq s_{m+3}) \quad (44)$$

这里节点向量 $\{s_i\}_{i=m-1}^{m+4} = \{0, 0, 1, 1, 2, 2\}$, 权因子 $\{g_i\}_{i=m-2}^{m+2} = \{2, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 2\}$, 控制顶点 $r_i (i = m-2, \dots, m+2)$ 见图8. 其次, 让此半圆绕 z 轴以顺时针和逆时针方向各转动角 $A = \frac{\pi}{4}$, 则按命题5, 可得四分之一球面

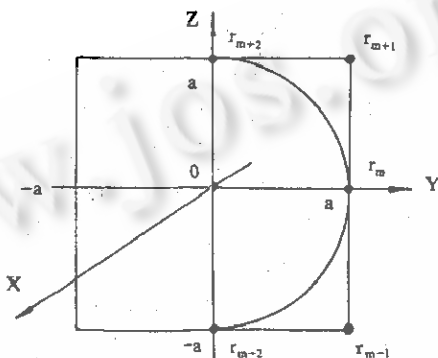


图8. 半圆 $y^2 + z^2 = a^2 (y \geq 0)$ 及其控制多边形 $r_{m-2} r_{m-1} \dots r_{m+2}$ (例4)

$$r(s, t) = \sum_{i=m-2}^{m+2} \sum_{j=n-2}^n N_i^2(s) N_j^2(t) g_i h_j r_{ij} / \sum_{i=m-2}^{m+2} \sum_{j=n-2}^n N_i^2(s) N_j^2(t) g_i h_j \quad (45)$$

$(s_m \leq s \leq s_{m+3}, t_n \leq t \leq t_{n+1})$

这里 s 方向的节点向量 $\{s_i\}$ 和权因子 $\{g_i\}$ 如上. 为求 t 方向的节点向量 $\{t_j\}$ 和权因子 $\{h_j\}$, 按算法2 取 $H_0 = H_2 = 2, H_1 = \sqrt{2}, k_1 = k_2 = 1$, 因此 $\{t_j\}_{j=n-1}^{n+2} = \{0, 1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$, $\{h_j\}_{j=n-2}^n = \{2+\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\}$. 最后可算得曲面的控制网格如表1 所示. 把相同的四张曲面 (45) 对称地布置, 可得到一张整球面.

表1. 四分之一球面的控制顶点 r_{ij}

$i =$	$m-2$	$m-1$	m	$m+1$	$m+2$
r_i	$(0, 0, -a)$	$(0, a, -a)$	$(0, a, 0)$	$(0, a, a)$	$(0, 0, a)$
$r_{i,n-2}$	$(0, 0, -a)$	$(-\sqrt{2}a, 0, -a)$	$(-\sqrt{2}a, 0, 0)$	$(-\sqrt{2}a, 0, a)$	$(0, 0, a)$
$r_{i,n-1}$	$(0, 0, -a)$	$(0, \sqrt{2}a, -a)$	$(0, \sqrt{2}a, 0)$	$(0, \sqrt{2}a, a)$	$(0, 0, a)$
$r_{i,n}$	$(0, 0, -a)$	$(\sqrt{2}a, 0, -a)$	$(\sqrt{2}a, 0, 0)$	$(\sqrt{2}a, 0, a)$	$(0, 0, a)$

值得注意的是, 若取 $k_1 = k_2 = 0$, 则 (45) 退化为二张有理双二次 Bézier 曲面. 类似于例3 的做法, 一张整球面可用八张有理双二次 Bézier 曲面拼成, 并用下

式表示:

$$r^*(s, t) = \frac{\sum_{i=m-2}^{m+2} \sum_{j=n-2}^{n+6} N_i^2(s) N_j^2(t) g_i h_j^* r_{ij}^*}{\sum_{i=m-2}^{m+2} \sum_{i=n-2}^{n+6} N_i^2(s) N_j^2(t) g_i h_j^*} \quad (46)$$

$(s_m \leq s \leq s_{m+3}, t_n \leq t \leq t_{n+7})$

这里 $\{t_j\}_{j=n-1}^{n+6} = \{0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4\}$, $\{h_j^*\}_{j=n-2}^{n+6} = \{2, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 2\}$, $\{s_i\}$ 和 $\{g_i\}$ 如上, 而控制网格如表 2 所示。

表 2. 整球面的控制顶点 r_{ij}^* ($e = a/\sqrt{2}$)

$i =$	$m-2$	$m-1$	m	$m+1$	$m+2$
r_i	$(0, 0, -a)$	$(0, a, -a)$	$(0, a, 0)$	$(0, a, a)$	$(0, 0, a)$
$r_{i,n-2}^*$	$(0, 0, -a)$	$(-e, e, -a)$	$(-e, e, 0)$	$(-e, e, a)$	$(0, 0, a)$
$r_{i,n-1}^*$	$(0, 0, -a)$	$(0, 2e, -a)$	$(0, 2e, 0)$	$(0, 2e, a)$	$(0, 0, a)$
$r_{i,n}^*$	$(0, 0, -a)$	$(e, e, -a)$	$(e, e, 0)$	(e, e, a)	$(0, 0, a)$
$r_{i,n+1}^*$	$(0, 0, -a)$	$(2e, 0, -a)$	$(2e, 0, 0)$	$(2e, 0, a)$	$(0, 0, a)$
$r_{i,n+2}^*$	$(0, 0, -a)$	$(e, -e, -a)$	$(e, -e, 0)$	$(e, -e, a)$	$(0, 0, a)$
$r_{i,n+3}^*$	$(0, 0, -a)$	$(0, -2e, -a)$	$(0, -2e, 0)$	$(0, -2e, a)$	$(0, 0, a)$
$r_{i,n+4}^*$	$(0, 0, -a)$	$(-e, -e, -a)$	$(-e, -e, 0)$	$(-e, -e, a)$	$(0, 0, a)$
$r_{i,n+5}^*$	$(0, 0, -a)$	$(-2e, 0, -a)$	$(-2e, 0, 0)$	$(-2e, 0, a)$	$(0, 0, a)$
$r_{i,n+6}^*$	$(0, 0, -a)$	$(-e, e, -a)$	$(-e, e, 0)$	$(-e, e, a)$	$(0, 0, a)$

例 5. 三分之一球面的有理双二次 B 样条表示。

首先, 把 yz 平面上的半圆 $y^2 + z^2 = a^2 (y \geq 0)$ 表为非均匀有理二次 B 样条曲线

$$r(s) = \frac{\sum_{i=m-2}^{m+4} N_i^2(s) g_i r_i}{\sum_{i=m-2}^{m+4} N_i^2(s) g_i} \quad (s_m \leq s \leq s_{m+5}) \quad (47)$$

这里节点向量 $\{s_i\}_{i=m-1}^{m+6} = \{0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3\}$, 权因子 $\{g_i\}_{i=m-2}^{m+4} = \{2, \sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, 2\}$, 控制多边形 $r_{m-2} r_{m-1} \dots r_{m+4}$ 为如图 9 的半个正六边形。

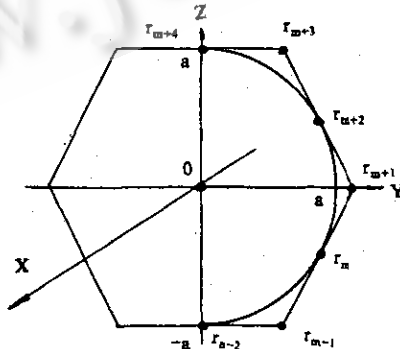


图 9 半圆 $y^2 + z^2 = a^2 (y \geq 0)$ 及其控制多边形 $r_{m-2} r_{m-1} \dots r_{m+4}$ (例 5)

其次, 让此半圆围绕 z 轴以顺时针和逆时针方向各转动角 $A = \frac{\pi}{3}$, 则按命题 5, 可得三分之一球面

$$r(s, t) = \sum_{i=m-2}^{m+4} \sum_{j=n-2}^n N_i^2(s) N_j^2(t) g_i h_j r_{i,j} / \sum_{i=m-2}^{m+4} \sum_{j=n-2}^n N_i^2(s) N_j^2(t) g_i h_j \quad (48)$$

$$(s_m \leq s \leq s_{m+5}, t_n \leq t \leq t_{n+1})$$

这里 $\{s_i\} \{g_i\}$ 如上, 再按算法 2, 取 $H_0 = H_2 = 2, H_1 = 1, k_1 = \frac{1}{3}, k_2 = \frac{1}{5}$, 求得 $\{t_j\}_{j=n-1}^{n+2} = \{0, 2, 4, 5\}, \{h_j\}_{j=n-2}^n = \{6, 2, 5\}$, 最后可算得控制网格如表 3 所示。把相同的三张曲面 (48) 对称布置, 则可得到一张整球面。

表 3. 三分之一球面的控制顶点 $r_{i,j}$

$i =$	$m-2$	$m-1$	m	$m+1$	$m+2$	$m+3$	$m+4$
r_i	$(0, 0, -a)$	$(0, \frac{\sqrt{3}}{2}a, -a)$	$(0, \frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{a}{2})$	$(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}a, 0)$	$(0, \frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2})$	$(0, \frac{\sqrt{3}}{3}a, a)$	$(0, 0, a)$
$r_{i,n-2}$	$(0, 0, -a)$	$(-\frac{2}{3}a, 0, -a)$	$(-a, 0, -\frac{a}{2})$	$(-\frac{4}{3}a, 0, 0)$	$(-a, 0, \frac{a}{2})$	$(-\frac{2}{3}a, 0, a)$	$(0, 0, a)$
$r_{i,n-1}$	$(0, 0, -a)$	$(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}a, -a)$	$(0, \sqrt{3}a, -\frac{a}{2})$	$(0, \frac{4\sqrt{3}}{3}a, 0)$	$(0, \sqrt{3}a, \frac{a}{2})$	$(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}a, a)$	$(0, 0, a)$
$r_{i,n}$	$(0, 0, -a)$	$(\frac{3}{5}a, \frac{\sqrt{3}}{15}a, -a)$	$(\frac{9a}{10}, \frac{\sqrt{3}}{10}a, -\frac{a}{2})$	$(\frac{6}{5}a, \frac{2\sqrt{3}}{15}a, 0)$	$(\frac{9a}{10}, \frac{\sqrt{3}a}{10}, \frac{a}{2})$	$(\frac{3}{5}a, \frac{\sqrt{3}}{15}a, a)$	$(0, 0, a)$

当然, 我们也可用九张有理双二次 Bézier 曲面拼成一张整球面, 并用下式表之:

$$r^*(s, t) = \sum_{i=m-2}^{m+4} \sum_{j=n-2}^{n+4} N_i^2(s) N_j^2(t) g_i h_j^* r_{i,j}^* / \sum_{i=m-2}^{m+4} \sum_{j=n-2}^{n+4} N_i^2(s) N_j^2(t) g_i h_j^* \quad (49)$$

$$(s_m \leq s \leq s_{m+5}, t_n \leq t \leq t_{n+5})$$

这里 $\{t_j\}_{j=n-1}^{n+6} = \{0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3\}, \{h_j^*\}_{j=n-2}^{n+4} = \{2, 1, 2, 1, 2, 1, 2\}, \{s_i\}$ 和 $\{g_i\}$ 如上, 控制网格如表 4 所示。

表 4. 整球面的控制顶点 $r_{i,j}^*$ ($f = \sqrt{3}a/12, c = a/4$)

$i =$	$m-2$	$m-1$	m
r_i^*	$(0, 0, -a)$	$(0, 4f, -a)$	$(0, 6f, -2c)$
$r_{i,n-2}^*$	$(0, 0, -a)$	$(-2c, 2f, -a)$	$(-3c, 3f, -2c)$
$r_{i,n-1}^*$	$(0, 0, -a)$	$(0, 8f, -a)$	$(0, 12f, -2c)$
$r_{i,n}^*$	$(0, 0, -a)$	$(2c, 2f, -a)$	$(3c, 3f, -2c)$
$r_{i,n+1}^*$	$(0, 0, -a)$	$(a, -4f, -a)$	$(6c, -6f, -2c)$
$r_{i,n+2}^*$	$(0, 0, -a)$	$(0, -4f, -a)$	$(0, -6f, -2c)$
$r_{i,n+3}^*$	$(0, 0, -a)$	$(-a, -4f, -a)$	$(-6c, -6f, -2c)$
$r_{i,n+4}^*$	$(0, 0, -a)$	$(-2c, 2f, -a)$	$(-3c, 3f, -2c)$

$m+1$	$m+2$	$m+3$	$m+4$
$(0, 8f, 0)$	$(0, 6f, 2c)$	$(0, 4f, a)$	$(0, 0, a)$
$(-a, 4f, 0)$	$(-3c, 3f, 2c)$	$(-2c, 2f, a)$	$(0, 0, a)$
$(0, 16f, 0)$	$(0, 12f, 2c)$	$(0, 8f, a)$	$(0, 0, a)$
$(a, 4f, 0)$	$(3c, 3f, 2c)$	$(2c, 2f, a)$	$(0, 0, a)$
$(2a, -8f, 0)$	$(6c, -6f, 2c)$	$(a, -4f, a)$	$(0, 0, a)$
$(0, -8f, 0)$	$(0, -6f, 2c)$	$(0, -4f, a)$	$(0, 0, a)$
$(-2a, -8f, 0)$	$(-6c, -6f, 2c)$	$(-a, -4f, a)$	$(0, 0, a)$
$(-a, 4f, 0)$	$(-3c, 3f, 2c)$	$(-2c, 2f, a)$	$(0, 0, a)$

参考文献

- [1.] R. F. Riesenfeld, "Applications of B-spline Approximation to Geometric Problems of Computer Aided Design," Ph. D. Thesis, Syracuse U. (1973). Available at U. of Utah, UTECCSc-73-126.
- [2.] K. J. Versprille, "Computer-Aided Design Applications of the Rational B-spline Approximation Form," PhD dissertation, Syracuse Univ., 1975.
- [3.] W. Tiller, "Rational B-splines for Curve and Surface Representation," IEEE, Computer Graphics and Applications, Sep. 1983, pp61-69.
- [4.] R. T. Farouki, "Exact Offset Procedures for Simple Solids," Computer Aided Geometric Design 2(1985), pp257-279.
- [5.] L. Piegl, "The Sphere as a Rational Bezier Surface," Computer Aided Geometric Design 3(1986), pp45-52.
- [6.] L. Piegl & W. Tiller, "Curve and Surface Constructions for Computer-Aided Design Using Rational B-spline," Computer-Aided Design, Nov. 1987, pp483-498.
- [7.] G. Farin, B. Piper and A. J. Worsey, "The Octant of a Sphere as a Nondegenerate Triangular Bezier Patch," Computer Aided Geometric Design 4 (1987). pp 329-332.
- [8.] 王国瑾, "圆弧曲线的有理三次 Bernstein 基表示," 高校应用数学学报, 第3卷第2期(1988), pp 237-248.
- [9.] 王国瑾, "旋转曲面的有理 Bernstein-Bezier 表示," 高校应用数学学报, 第4卷第2期(1989), pp 157-171.
- [10.] W. Boehm, "Inserting New Knots into B-spline Curves," Computer-Aided Design, Jul. 1980, pp 199-201.