

基于特征保持的三维模型四面体化及优化^{*}

王君良¹, 李重¹, 金小刚², 马利庄³

¹(浙江理工大学 数学科学系, 浙江 杭州 310018)

²(CAD&CG 国家重点实验室(浙江大学), 浙江 杭州 310058)

³(上海交通大学 计算机科学与工程系, 上海 200240)

通讯作者: 李重, E-mail: lizhong@zstu.edu.cn

摘要: 三维模型四面体化是一种重要的有限元网格生成技术. 介绍了一种特征保持的四面体网格生成及优化算法. 首先使用三维模型主成分分析进行预处理, 然后用体心立方构建初始四面体, 接着通过拉普拉斯坐标改变模型边界切点的移动方式保持模型的局部特征, 最后构造改进的密度能量误差函数优化四面体网格质量. 实验结果表明, 该方法可行、有效, 且能很好地保持模型特征.

关键词: 四面体化; 主成分分析; 拉普拉斯坐标; 密度能量误差

中文引用格式: 王君良, 李重, 金小刚, 马利庄. 基于特征保持的三维模型四面体化及优化. 软件学报, 2015, 26(Suppl. (2)): 42-51. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/15014.htm>

英文引用格式: Wang JL, Li Z, Jin XG, Ma LZ. Feature-Preserving tetrahedralization and optimization for 3D models. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2015, 26(Suppl. (2)): 42-51 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/15014.htm>

Feature-Preserving Tetrahedralization and Optimization for 3D Models

WANG Jun-Liang¹, LI Zhong¹, JIN Xiao-Gang², MA Li-Zhuang³

¹(Department of Mathematical Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

²(State Key Laboratory of CAD&CG (Zhejiang University), Hangzhou 310058, China)

³(Department of Computer Science and Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Tetrahedralization of 3D models is an important technique in finite element mesh generation. An algorithm of tetrahedral mesh generation and optimization is proposed in this paper. It first uses principal component analysis of 3D models for the preprocessing. Then the initial tetrahedral mesh is built based on the body-centered cubic while the movement of cutting point is improved via Laplacian coordinates for keeping local features. Finally, it optimizes the quality of the tetrahedral mesh by using the function of energy-density error. Experimental results demonstrate that this method is viable, effective, and can preserve the model feature well.

Key words: tetrahedralization; PCA (principal component analysis); Laplacian coordinate; energy-density error

有限元分析方法是一种能够有效地求解各种工程计算问题的通用数值分析方法. 其中, 网格生成是有限元方法的关键步骤, 应用领域十分广泛, 因此有限元网格生成算法成为众多国内外学者研究的重点. 其中, 四面体网格单元简单灵活, 对复杂边界有较强的适应能力, 是最常用的空间单元表示结构之一, 可用于有限元分析、模型逼近、空间网格剖分等, 因此, 三维模型四面体化已成为一种重要的有限元网格生成技术^[1].

20世纪80年代中后期, 国内外学者将二维平面网格生成算法的研究转向三维空间, 对四面体网格生成算法进行了广泛的研究^[2], 相关技术可分为网格模板法、拓扑分解法、映射法和几何分解法等. 其主要存在精度不高、单元数目较多以及质量不理想等问题. 网格模板法适用于自适应网格生成, 完全自动且速度快, 但对边界单元的

* 基金项目: 国家自然科学基金(61272298, 61133009); 教育部留学回国人员科研启动基金([2009]1590); 浙江省自然科学基金(LY14A010032); 浙江理工大学 521 人才资助项目(11430032521301)

收稿时间: 2014-01-03; 定稿时间: 2014-04-18

质量无法保证,对模型位置方向也特别敏感.拓扑分解法过于依赖几何体的拓扑结构,使生成的四面体网格质量不理想,甚至很差.映射法生成四面体网格单元很方便,但对模型形状要求过高,过于复杂就很难处理.几何分解法所生成的网格单元形状和分布均较好但是自动化程度低,不利于复杂模型的网格生成.Wang 等人^[3]基于体心立方(body-centered cubic,简称BCC)结构,并结合自适应八叉树的思想,首先得到初始的四面体,再对边界四面体重四面体化得到最终的四面体逼近结果.该方法操作简单,易于实现,且具有较好的四面体化效果,但对模型位置方向较为敏感,且四面体单元质量还可进一步优化.Woo 等人^[4]把拓扑分解法延伸到三维空间的网格划分.该方法虽然理论比较简单,实现起来也比较容易,但是在几何因素方面考虑欠缺,生成的网格形状不理想.Shephard 等人^[5,6]基于八叉树法的思想,提出八叉树法,用于实现三维空间的网格划分.Amresh^[7]将几何分解法应用到三维空间的网格生成,首先找出一个分割面,然后用该面将待划分区域用递归的方法将其分割成两个子体,循环操作,直至所有的子体都变成四面体.

本文给出了一种基于体心立方的网格四面体化算法,增加了三维模型主成分分析的预处理,改进了模型边界切点的移动方式从原来的向节点移动变换为向模型的特征方向移动,并对最终的四面体网格使用了密度能量误差函数来优化节点的位置.三维模型运用主成分分析后,提高了初始四面体单元的质量;改进切点向模型特征方向移动保证了四面体化后模型的局部特征;密度能量误差函数优化了最终四面体网格的质量.

1 四面体化方法

1.1 基于体心立方的四面体化算法

本文的四面体化方法是基于体心立方结构来构建的.体心立方结构是材料科学技术组织结构中的一种立方晶系结构,这种结构具有很多优良的特性,在实际的工程中得到了广泛的应用.算法流程如图 1(以类似二维图形表示)所示.

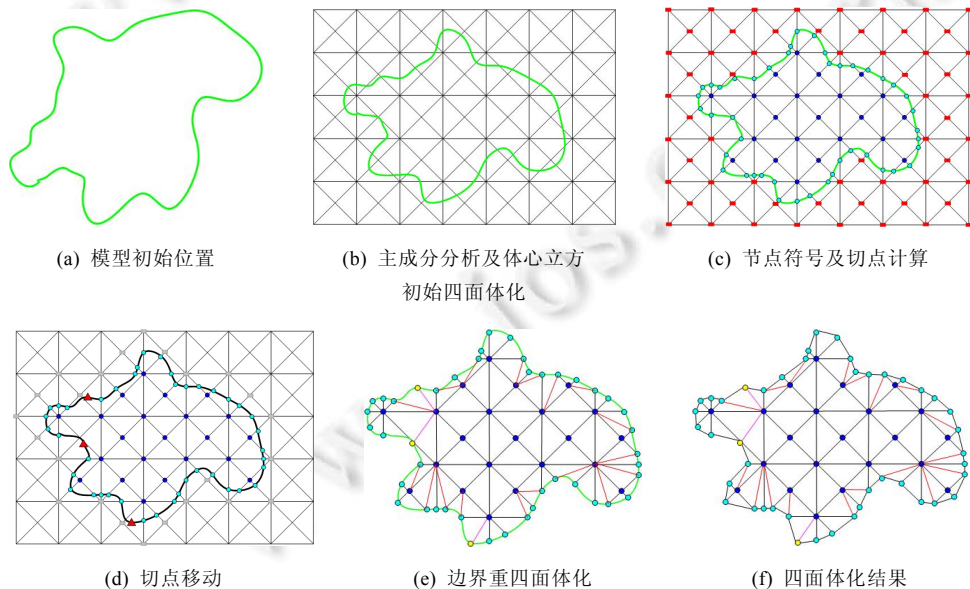


图 1 算法流程图

算法主要包括 5 个步骤,具体算法步骤如下:

Step 1. 模型初始位置预处理.使用三维模型主成分分析法对三维网格模型的初始位置进行预处理,有利于提高四面体单元的质量.

Step 2. 构建体心立方结构.对三维网格模型,构建体心立方基于欧氏距离变换的细分八叉树结构,由模型

表面曲率的不同可以得到自适应的八叉树结果.

Step 3. 初始四面体化.对体心立方初始四面体化,计算体心立方节点相对于模型的位置符号(在模型内部为正号,在模型外部为负号,在模型表面为0),并对两端节点符号相反的四面体的边,计算该边和模型表面的交点(切点).

Step 4. 切点移动.运用拉普拉斯坐标对部分距离节点相对较近的切点进行移动,保持四面体网格模型的局部特征,避免四面体二面角度过小或过大.

Step 5. 边界重四面体化.切点移动后,再对边界的四面体重新四面体化,得到最终的四面体集合,构成逼近模型的四面体网格.

1.2 算法中的主要关键技术

1.2.1 三维模型主成分分析

三维模型主成分分析(principal component analysis,简称 PCA)是模型处理中常用的一种方法,因为它能够有效地提取出模型的主要成分和结构,在一定程度上去除噪音和干扰,因此成为对3D模型施加其他后续操作的基本变换.PCA可分为基于顶点位置主成分分析法(CPCA)和表面法向主成分分析法(NPCA)两种^[8],如图2所示.

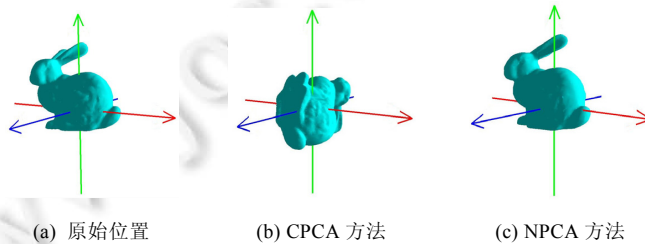


图2 基于顶点位置和表面法向主成分分析法效果图对比

由于模型的3D自由度,在对模型施加PCA操作时需要满足以下几个基本要求:平移不变性、旋转不变性、缩放不变性.在进行PCA分析时,平移和缩放不变性比较容易实现,因而各种方法的差别主要集中在旋转不变性的实现上.由于生成的四面体的二面角度和模型表面法向有关,用NPCA方法处理后能使初始四面体和模型表面相交时切出的二面角度不会过大或过小.本文根据三维模型的数据中面的法向,运用NPCA主成分分析法,对模型进行旋转变换,能使初始四面体化的二面角度得到优化.

1.2.2 节点符号和切点计算

构建体心立方得到初始四面体后,需要计算体心立方中节点的符号,若节点位于模型的内部则符号为正,若位于模型外部则符号为负,若位于模型表面则符号为0.若体心立方中某条边的两个节点的符号不同,则该边一定和模型的表面相交,这些交点称为切点.

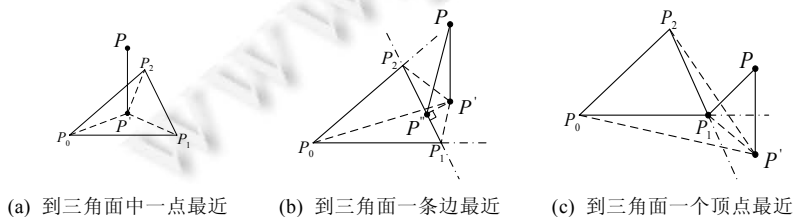


图3 点到三角面距离的3种情况

计算节点符号的问题可归结于判断空间中给定点是否在三维模型内部,本文利用Thürmer等人^[9]提出的角度权伪法矢量,可用来判断一个点在模型内部还是外部,采用动态球搜索技术^[10]可以快速计算获得点到三角网格的最近点.得到体心立方的节点符号后,利用相关三角网格就可以很快计算获得切点了.

如图3所示,在求点 P 到三角面 $P_0P_1P_2$ 的距离时,关键是要找到三角面中距该点最近的点,共有3种情况,

图 3(a)中最近点 P' 在三角面中间,图 3(b)中最近点 P'' 在三角面的边上,图 3(c)所示最近点 P_1 在三角面的顶点上.

1.2.3 切点移动

为使生成的四面体二面角度不会过小,考虑对部分距离节点相对较近的切点进行移动,文献[3]中的移动方式为向距离切点较近的节点移动,但是这样容易破坏模型的特征结构.因此本文考虑将切点移动方向改为模型表面的特征方向(由网格顶点拉普拉斯坐标确定),移动后切点仍然在模型表面上,在优化四面体二面角度的同时保持了模型的特征.

特征方向的选取使用拉普拉斯算法,需计算模型表面网格点的拉普拉斯坐标^[11].三角网格上某一点的拉普拉斯坐标定义为该点指向其相邻点的所有向量之和.拉普拉斯坐标具有平移不变性,使用网格上相邻顶点的线性组合来表示顶点的网格坐标,能够描述网格的细节特性和局部特征.具体的拉普拉斯坐标公式可表示如下:

$$\sigma_i = \sum_{j \in N(i)} w_{ij}(v_i - v_j) \tag{1}$$

其中, $N(i) = \{j | \{i, j\} \in E\}$ 是与顶点 v_i 的相邻的顶点的集合; w_{ij} 表示顶点 v_i 和 v_j 之间的权重,满足等式 $\sum_{j \in N(i)} w_{ij} = 1$.

如图 4 所示, vo_i 为 v_i 在拉普拉斯坐标系下对应的坐标原点,称为虚拟原点.切点移动方式如图 5 所示, v_c 为模型表面的一个切点,与该切点相关的特征方向指向的网格点为 v_{i1}, v_{i2}, v_{i3} , 对应的拉普拉斯坐标虚拟原点为 $vo_{i1}, vo_{i2}, vo_{i3}$, 计算切点 v_c 和各虚拟原点之间的距离,则移动方向为与之最近的虚拟原点对应的特征点,图 5 中 v_c 的移动方向为 $v_c \rightarrow v_{i3}$.

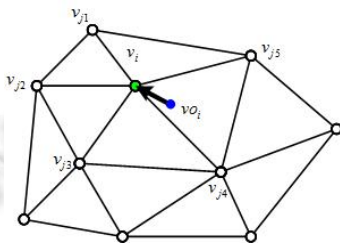


图 4 离散拉普拉斯坐标

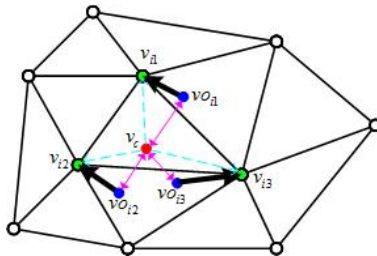


图 5 切点移动方式

切点移动后,对边界四面体进行重新四面体化,使部分边界四面体分裂成几个小四面体,从而保证最终四面体化后的结果都是四面体.

2 四面体网格质量优化

本文在第 1.2.3 节中用拉普拉斯算法对边界节点中的切点进行了移动,初始优化了四面体的二面角度,并保持了四面体网格模型的局部特征.下面使用改进的密度能量误差函数来进一步优化四面体网格单元的质量.

2.1 密度能量误差函数

Alliez 等人^[12]提出了基于 Delaunay 三角形网格的 ODT 光顺算法,对每个星形结构的核心节点位置进行优化,网格中节点的星形结构如图 6 所示.

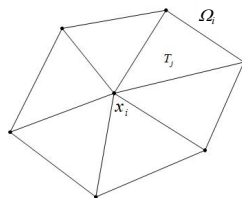


图 6 网格节点的一个星形结构

星形结构的能量误差函数为

$$E_{ODT} = \frac{1}{4} \sum_i x_i^2 |\Omega_i| - \int_M x^2 dx \tag{2}$$

其中, M 是 Delaunay 三角形网格, x_i 是 M 中的节点, Ω_i 是 x_i 所对应的星形结构, $|\Omega_i|$ 是 Ω_i 的面积.

考虑到优化的节点位置与网格单元的角度有关,而单元的角度又是衡量单元质量的一个重要的因素,可将式(2)的能量误差函数改为基于网格质量的密度能量误差函数,因此改进后的密度能量误差函数如下:

$$E_{ODT} = \frac{1}{4} \sum_i x_i^2 \left(\sum_{T_j \in \Omega_i} q_j |T_j| \right) - \int_M x^2 dx \tag{3}$$

其中, $|T_j|$ 是 T_j 的面积, q_j 是网格质量.通过求解式(3)的极小值可得优化后节点的位置为

$$x_i^* = \frac{1}{\sum_{T_j \in \Omega_i} q_j |T_j|} \sum_{T_j \in \Omega_i} q_j |T_j| c_j \tag{4}$$

其中, x_i^* 是 x_i 的优化后的位置, c_j 是 T_j 的外接圆圆心.

在四面体网格中,网格单元的质量函数^[13]可设为

$$q = \sqrt{24} \frac{r}{l_{\max}} \tag{5}$$

其中, r 为四面体的内接球半径, l_{\max} 是四面体的最长边.

类似于二维情况,节点优化相关参数如图 7 所示, C_i 为需优化的节点, C_{j1} 为外接圆圆心, $C_{g_{j1}}$ 为内接圆圆心, r_{j1} 为内接圆半径.

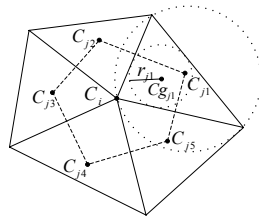


图 7 节点优化参数示意图

四面体化流程的三维效果如图 8 所示.

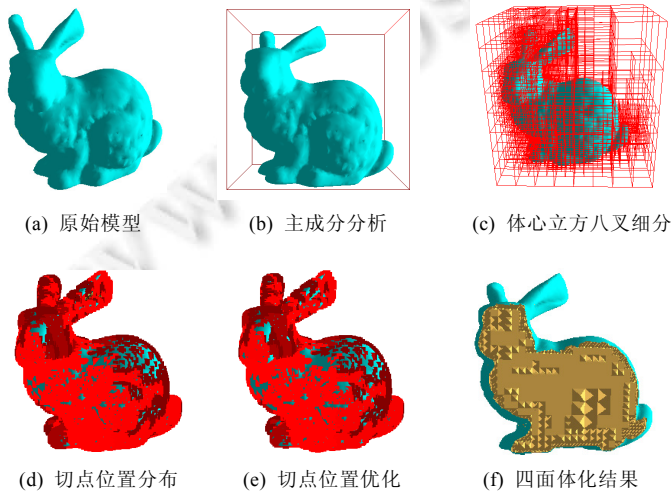


图 8 四面体化流程三维效果图

3 实验及结果分析

本文使用 VS2008 和 OpenGL 在 2.40GHz Intel Core2 CPU,2GB 内存的 PC 机上实现了本文方法,并对不同模型的四面体化结果进行验证,实验结果如图 8~图 19 所示,主要包括模型内部四面体化和外部四面体化效果图以及四面体单元质量的比较.

3.1 四面体化效果比较

本文对 Bunny,Armadillo,Dragon,Dinosaur,Teeth 和 Cow 等模型基于不同方法的内部四面体化效果进行了比较,其剖面图效果如图 9~图 13 所示,可以发现本文方法效果较好.另外,本文方法对 Cow 模型进行了外部四面体化,并与文献[3]方法比较,如图 14 所示.我们对人体模型进行了内部四面体化和外部四面体化,剖面效果如图 15 所示,也取得了较好的实验效果.本文方法与其他方法四面体化的时间效率比较见表 1.从表 1 中可以看出,本文方法虽然增加了主成分分析,并改变了切点的移动方式,但仍有较好的时间效率.

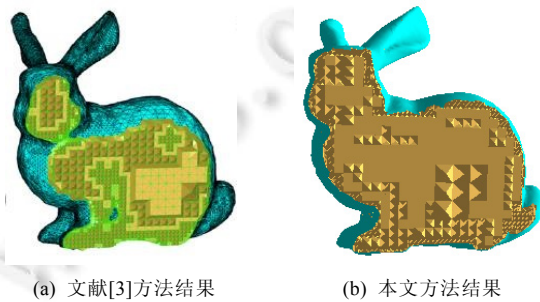


图 9 Bunny 模型内部四面体化剖面效果对比

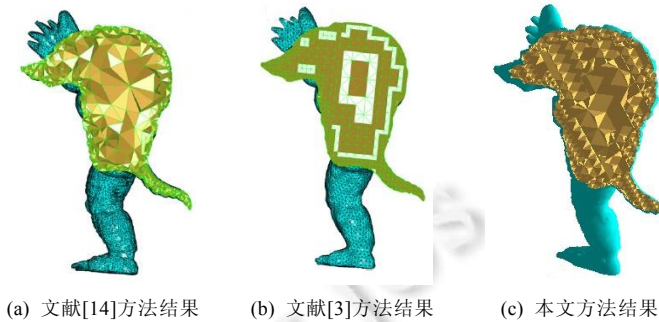


图 10 Armadillo 模型内部四面体化剖面效果对比



图 11 Dragon 模型内部四面体化剖面效果对比

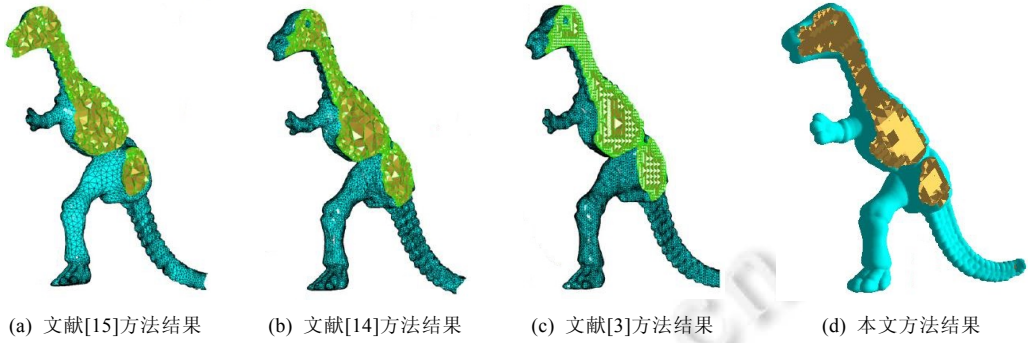


图 12 Dinosaur 模型内部四面体化剖面效果对比

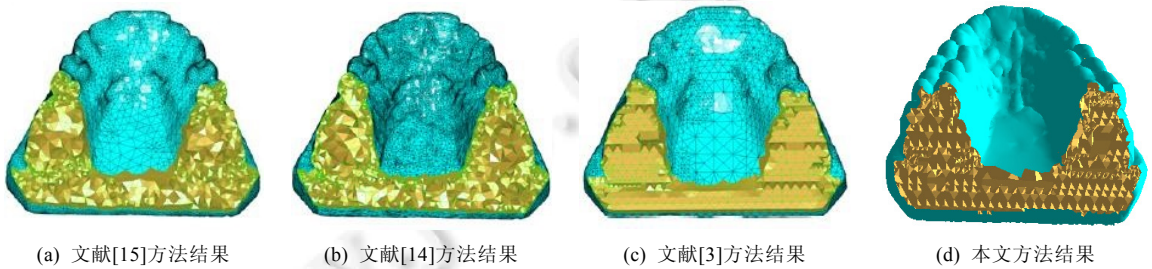


图 13 Teeth 模型内部四面体化剖面效果对比

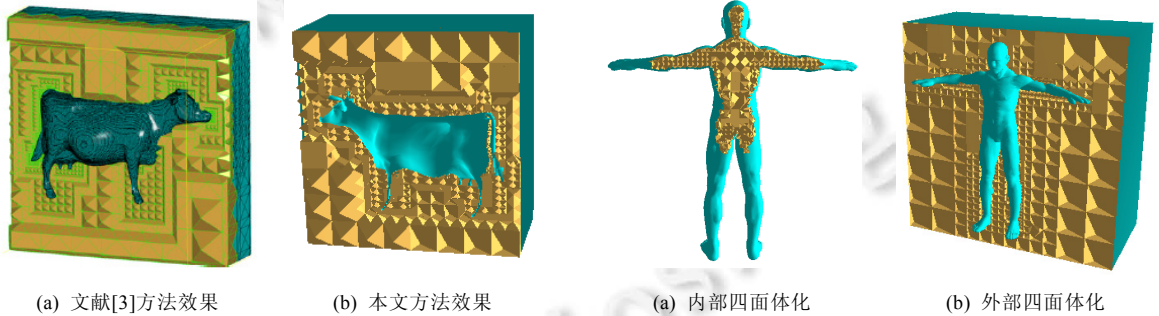


图 14 Cow 模型外部四面体化剖面效果对比

图 15 本文方法人体模型内外四面体化效果

表 1 本文方法与其他方法四面体化时间效率比较

模型	四面体数	主成分分析时间(s)	八叉细分时间(s)	四面体网格生成时间(s)	总时间(s)		
					本文	文献[3]	文献[14]
Armadillo	129 926	0.065	60.559	3.753	64.377	62.572	16.404
Dragon	630 043	0.087	457.212	23.891	481.190	466.909	108.944
Dinosaur	142 301	0.075	54.251	5.832	60.158	56.470	10.262
Teeth	63 911	0.063	27.740	2.175	29.978	28.698	16.905

3.2 四面体网格单元质量比较

四面体二面角度的大小可用来衡量四面体单元质量的好坏,角度过小或过大,则认为单元质量较差.各模型在不同方法四面体化后,四面体网格的最大二面角和最小二面角值对比见表 2,四面体二面角度分布直方图如图 16~图 20 所示.我们发现,本文方法进一步提高了四面体网格的最小二面角度,有效地优化了网格的质量.

表 2 本文方法与其他方法四面体二面角度比较

模型	四面体数			最小二面角(°)			最大二面角(°)		
	文献[14]	文献[3]	本文	文献[14]	文献[3]	本文	文献[14]	文献[3]	本文
Armadillo	180 201	130 213	129 926	1.25	7.59	10.61	173.48	159.57	149.42
Dragon	790 461	630 201	630 043	0.58	7.68	9.99	176.62	155.30	151.68
Dinosaur	152 954	143 162	142 301	0.78	6.93	9.02	174.31	156.65	155.87
Teeth	163 454	63 957	63 911	1.73	6.83	9.83	174.27	161.37	158.36

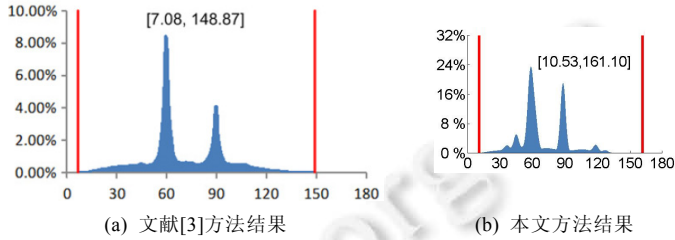


图 16 Bunny 模型四面体网格二面角度分布对比

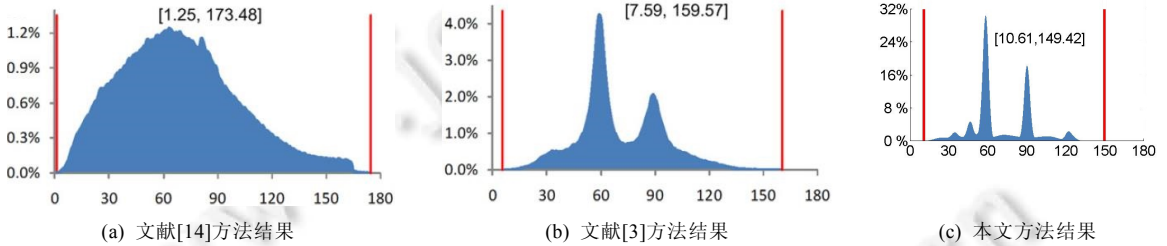


图 17 Armadillo 模型四面体网格二面角度分布对比

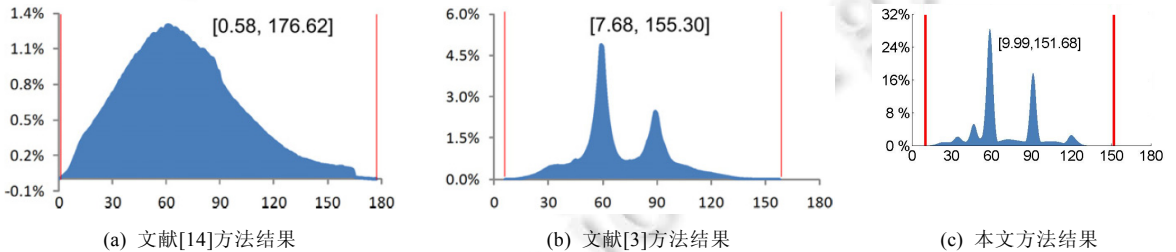


图 18 Dragon 模型四面体网格二面角度分布对比

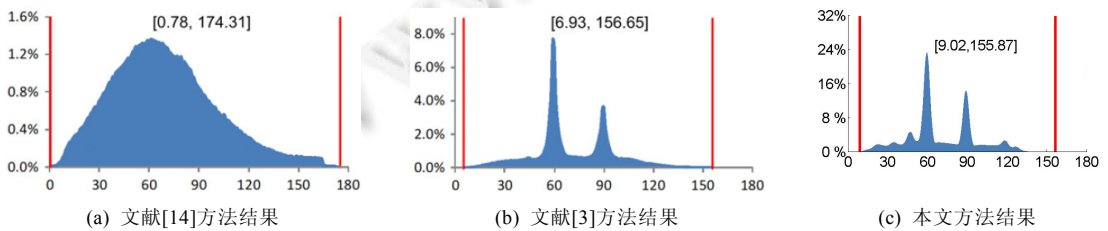


图 19 Dinosaur 模型四面体网格二面角度分布对比

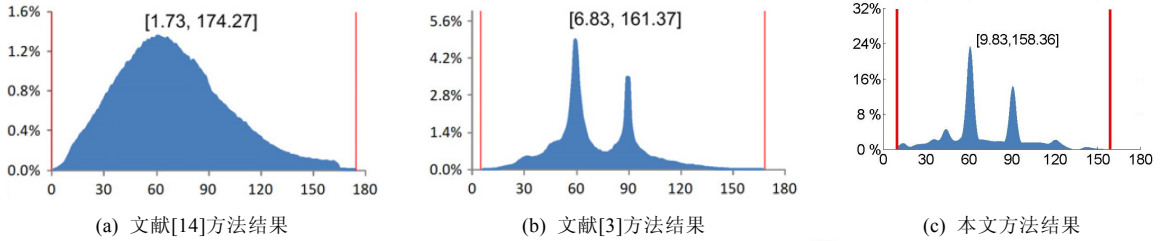


图 20 Teeth 模型四面体网格二面角度分布对比

4 总结和展望

本文提出了一种三维网格模型四面体化及优化算法,首先在四面体化前对三维模型进行基于 NPCA 的主成分分析,调整模型的初始位置;其次使用基于体心立方的四面体化方法,在切点移动时使用拉普拉斯坐标,保持模型的局部特征;最后使用改进的密度能量误差函数优化四面体网格单元.本文方法在一定精度下减少了四面体的个数,并能较好地保持模型局部特征,进一步提高了四面体网格单元质量.

在现有工作条件下,体心立方层数越深,四面体化逼近效果就越好,四面体单元质量也就相对较高,但四面体数目相对增多,计算复杂度就增加了.如何在保证逼近效果的同时,进一步减少四面体的数目,更好地应用于三维模型的有限元分析等问题,将是我们今后研究工作的重点.

References:

- [1] Zhang S, Shi FZ. Implementation of finite element method mesh generation from multiple trimmed free surfaces. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2005,16(11):2008–2013 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/16/2008.htm> [doi: 10.13 60/jos162008]
- [2] Chen X, Xiong YS. Tetrahedral mesh generation from medical volume data. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2008,19:78–86 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/19/s78.htm>
- [3] Wang J, Yu ZY. Feature-Sensitive tetrahedral mesh generation with guaranteed quality. Computer-Aided Design, 2012,44(5): 400–412.
- [4] Woo TC, Thomas T. An algorithm for generating solid elements in objects with holes. Computer & Structure, 1984,18(2): 333–342.
- [5] Shephard MS, Georges MK. Automatic three-dimensional mesh generation by the finite octree technique. Int'l Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991,32(4):709–749.
- [6] Yerry MA, Shephard MS. Automatic three-dimensional mesh generation by the modified-octree technique. Int'l Journal for Numerical Methods in Engineering, 1984,20(11):1965–1990.
- [7] Amresh J. Modern methods for automatic FE mesh generation. In: Proc. of the Modern Methods for Automating Finite Element Mesh Generation. ASCE, 1986. 19–28.
- [8] Papadakis P, Pratikakis I, Perantonis S, Theoharis T. Efficient 3D shape matching and retrieval using a concrete radialized spherical projection representation. Pattern Recognition, 2007,40(9):2437–2452.
- [9] Thürmer G, Wüthrich C. Computing vertex normals from polygonal facets. Journal of Graphics Tools, 1998,3(1):43–46.
- [10] Fang X, Bao HJ, Wang PA, Peng QS. Algorithm for fast calculating the nearest distance between space point and arbitrary polyhedron. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2001,13(9):788–792 (in Chinese with English abstract).
- [11] Sorkine O, Cohen-Or D, Lipman Y, Alexa M. Laplacian surface editing. In: Proc. of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH Symp. on Geometry Processing. ACM, 2004. 175–184.
- [12] Alliez P, Cohen-Steiner D, Yvinec M, Desbrun M. Variational tetrahedral meshing. ACM Trans. on Graphics, 2005,24(3):617–625.
- [13] Liu Y, Chang JH, Guan ZQ. Enhanced 3D optimal Delaunay triangulation optimization method for tetrahedral mesh quality. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2012,24(7):949–953 (in Chinese with English abstract).

[14] Si H, TetGen A. A quality tetrahedral mesh generator and three-dimensional Delaunay triangulator. Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastic, 2006.

[15] Joachim S, Hannes G, Robert G. NETGEN—Automatic mesh generator. Johannes Kepler University Linz, 2012. <http://www.hpfem.jku.at/netgen>

附中文参考文献:

[1] 张苏,施法中.多裁剪自由曲面生成有限元网络的实现.软件学报,2005,16(11):2008–2013. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/16/2008.htm> [doi: 10.1360/jos162008]

[2] 陈欣,熊岳山.基于医学体数据生成四面体网格的方法.软件学报,2008,19:78–86. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/19/s78.htm>

[10] 方向,鲍虎军,王平安,彭群生.点到任意多面体距离的快速计算方法.计算机辅助设计与图形学学报,2001,13(9):788–792.

[13] 刘岩,昌继海,关振群.改进的三维 ODT 四面体网格质量优化算法.计算机辅助设计与图形学学报,2012,24(7):949–953.



王君良(1989—),男,浙江平湖,人,硕士,主要研究领域为计算机图形学.



金小刚(1969—),男,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为计算机动画.



李重(1975—),男,博士,教授,博士生导师,CCF 专业会员,主要研究领域为数字几何处理,服装 CAD.



马利庄(1963—),男,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为计算机图形,数字多媒体,图像处理.