

## Extended IF 逻辑的命题演算系统\*

许文艳

(西安电子科技大学 数学与统计学院, 陕西 西安 710071)

通讯作者: 许文艳, E-mail: xwykiki@126.com

**摘要:** Extended IF 逻辑是一阶逻辑的扩张, 其主要特点是可表达量词间的相互依赖和独立关系, 但其命题部分至今没有得到公理化. 基于 Cirquent 演算方法, 给出了一个关于 Cirquent 语义(命题水平)可靠完备的形式系统. 该系统能够很好地解释和表达命题联结词间的相互依赖和独立关系, 从而使 Extended IF 逻辑在命题水平得到了真正意义上的公理化.

**关键词:** Cirquent 演算; 可计算性逻辑; Extended IF 逻辑

**中图法分类号:** TP181

中文引用格式: 许文艳. Extended IF 逻辑的命题演算系统. 软件学报, 2015, 26(9): 2278–2285. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4705.htm>

英文引用格式: Xu WY. Formal system for propositional Extended IF logic. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2015, 26(9): 2278–2285 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4705.htm>

### A Formal System for Propositional Extended IF Logic

XU Wen-Yan

(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** Extended independence-friendly (IF) logic is an extension of classical first-order logic. The main characteristic of IF logic is to allowing one to express independence relations between quantifiers. However, its propositional level has never been successfully axiomatized. Based on Cirquent calculus, this paper axiomatically constructs a formal system, which is sound and complete w.r.t. the propositional fragment of Cirquent-based semantics, for propositional extended IF logic. Such a system can account for independence relations between propositional connectives, and can thus be considered an axiomatization of purely propositional extended IF logic in its full generality.

**Key words:** Cirquent calculus; computability logic; Extended IF logic

Independence-Friendly (IF)逻辑是一阶逻辑的保守扩张, 它是由 Hintikka 和 Sandu 在文献[1]中首次提出的. 其主要特点是能够表达量词间的相互依赖和独立关系, 例如其中的公式:

$$\forall x \forall y (\exists z / \forall y) (\exists t / \forall x) p(x, y, z, t) \quad (1)$$

在语义上表示对任意的  $x$  和  $y$ , 存在依赖于  $x$  但不依赖于  $y$  的  $z$ , 以及依赖于  $y$  但不依赖于  $x$  的  $t$ , 使得  $p(x, y, z, t)$  是真的. 在一阶逻辑中, 如果一个存在量词  $\exists z$  在全称量词  $\forall y$  的辖域中, 那么变量  $z$  的取值一定依赖于变量  $y$  的取值. 但在 IF 逻辑中, 若存在量词  $\exists z$  虽然在全称量词  $\forall y$  的辖域中但其后标有  $/\forall y$ , 则  $z$  的取值不依赖于  $y$  的取值. 换句话说, IF 逻辑通过对量词后面标注  $/$  (称为 Slash) 来表达量词间的相互依赖和独立关系. 这使得 IF 逻辑比一阶逻辑具有更强的表达能力. 例如, 上面的公式(1)在一阶逻辑中就无法通过对量词的线性重组而得到表达.

由于 IF 逻辑较强的表达能力和它采用的关于不完全信息的博弈语义, IF 逻辑自提出以来已经受到许多学者的关注和研究<sup>[1-8]</sup>. 特别是文献[5]将 IF 逻辑进一步扩张, 得到所谓的 Extended IF 逻辑. Extended IF 逻辑包含有

\* 基金项目: 国家自然科学基金(61303030); 中央高校基本科研业务费(K5051370023); 国家留学基金

收稿时间: 2014-06-03; 定稿时间: 2014-08-09

两种否定:一种是 IF 逻辑中也有的强否定 $\sim$ ;另一种是 IF 逻辑中没有的弱否定 $\neg$ .强否定 $\sim$ 和通常所见否定算子的逻辑功能类似:公式 $\sim A$ 是将公式 $A$ 中的所有算子和原子变为它们的对偶而得到的.但弱否定 $\neg$ 不能运用于公式的任何位置:它只能运用于整个 IF 逻辑公式的前面.例如, $\forall x\forall y\neg\forall z(\exists t/\forall x)p(x,y,z,t)$ 在 Extended IF 逻辑中是非法的表达.这种有点奇怪的情形主要是因为现有的 IF 逻辑方法已经不能为 $\neg$ 提供合理的语义.因此,这就需要有更好更广的方法出现.

2006 年,Japaridze 为公理化可计算性逻辑理论<sup>[9,10]</sup>,提出了一种新的证明理论和方法——Cirquent 演算<sup>[11]</sup>.相比于传统的证明理论,该方法研究处理的是一种基于图的电路式结构——Cirquent,而不是传统的公式、相继式等树形结构.这种结构的最大特点是允许分享子结构.例如在图 1 表示的 Cirquent 中(这是文献[12]给出的 Cirquent 的概念,本文所讨论的 Cirquent 概念将比这个更广),同一个孩子可被不同的父亲分享(即不同的父亲可以有相同的孩子),而这是传统的树形结构所不允许的.

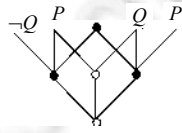


Fig.1

图 1

正是由于这个特点,Cirquent 演算具有很强的表达能力和很高的证明效率.文献[12]证明了即使限制在命题逻辑水平,相应的 Cirquent 演算系统 CL8 也比传统相继式演算系统的证明效率有指数级的提高.这就使得 Cirquent 演算在知识库系统、人工智能行为规划、电路等价性验证等领域有着良好的应用前景和广阔的发展空间.该理论自提出以来,已经在基础理论方面得到了进一步的研究和发展<sup>[12-19]</sup>.

回到前面提到的 Extended IF 逻辑.除了其弱否定 $\neg$ 的逻辑行为有点奇怪之外,Extended IF 逻辑自提出以来的另一个遗憾就是:其命题部分至今没有得到公理化.Japaridze 在文献[13]中对 Cirquent 概念进行了一系列的推广,特别是将 Cirquent 概念推广到带有簇和级两个参数(正规定义见后文)的水平.形象地说,簇是推广了的逻辑与门或或门.每个簇可看作是同类型的若干个门组成的集合,在同一个簇里的这些门,同时(平行地)分享共同的选择(都选择左或者都选择右).级可看作是比簇更高一级的操控台,每个级是若干个簇组成的集合.所有级的线性排列指明了这些操控台应该按怎样的顺序执行选择.文献[13]指出:带有簇和级的 Cirquent 能够表达命题联结词间的相互依赖和独立关系,而这正是 Extended IF 逻辑为发展其命题部分所寻求的.因此,人们可利用 Cirquent 演算将 Extended IF 逻辑进行公理化和扩张.这里仅举一个简单的例子说明两者的上述关系,例如 Extended IF 逻辑中的公式:

$$\forall x(\exists y/\forall x)p(x,y) \tag{2}$$

假设论域是 $\{1,2\}$ ,则公式(2)可改写为

$$(p(1,1)\vee^y/\wedge^x p(1,2))\wedge^x(p(2,1)\vee^y/\wedge^x p(2,2)) \tag{3}$$

进一步地,将上面的 $p(1,1),p(1,2),p(2,1),p(2,2)$ 改写为原子 $p,q,r,s$ ,则公式(3)变为如下的命题公式:

$$(p\vee^y/\wedge^x q)\wedge^x(r\vee^y/\wedge^x s) \tag{4}$$

这里,我们将 $\forall x$ 改为 $\wedge^x$ , $\exists y$ 改为 $\vee^y$ ,其中的上标 $x,y$ 表明相应的命题联结词 $\vee$ 或 $\wedge$ 是由哪个量词得到的;同时,用 $\vee^y/\wedge^x$ 表明标有上标 $y$ 的命题联结词 $\vee$ 不依赖于(独立于)标有上标 $x$ 的命题联结词 $\wedge$ .最后,根据文献[13]的 Descriptions 7.4,公式(4)变为如下的 Cirquent:

$$(p \vee_{i_1} q) \wedge_{i_2} (r \vee_{i_1} s) \tag{5}$$

在 Cirquent 中,若一个联结词的下标为 $k^i$ ,则表明该联结词属于簇 $k$ ,且簇 $k$ 属于 $i$ 级.从而,公式(5)中同属于簇 1 的两个联结词 $\vee$ 独立于属于簇 2 的联结词 $\wedge$ .从这个例子我们确实看到,带有簇和级的 Cirquent 能够表达命题联结词间的相互依赖和独立关系.同时,带有簇和级的 Cirquent 对 Extended IF 逻辑的弱否定 $\neg$ 的问题也迎刃而解(见文献[13]的 Descriptions 7.5, Descriptions 7.6).但是,文献[13]的上述结论只是从语义角度给出的,并没有

给出具体的公理系统.

基于上述背景,本文从语构角度出发,给出了关于 Cirquent 语义(命题水平)可靠完备的形式系统  $EIF_P$ . 该系统是带有簇和级两个参数的 Cirquent 演算系统,它能很好地解释、表达命题联结词间的相互依赖和独立关系,从而为 Extended IF 逻辑的命题部分提供了一个可靠完备的公理系统,使 Extended IF 逻辑在命题水平得到了真正意义上的公理化.我们将看到:本文给出的系统是经典命题逻辑系统的扩张,同时也是文献[19]中系统  $IF_P$  的进一步扩张.

第 1 节介绍与本文相关的基本概念<sup>[13]</sup>.第 2 节给出 Cirquent 演算系统  $EIF_P$  的公理和推理规则,证明所有推理规则是双向保真的,最后证明系统  $EIF_P$  的可靠性与完备性.

### 1 预备知识

我们用大写字母  $P, Q, R, S, \dots$  表示原子,原子  $P$  及其否定  $\neg P$  称为文字.本文所讨论的公式是(由文字和二元联结词  $\wedge, \vee$  生成的,且  $\neg$  只运用于原子的)经典命题逻辑公式.

Cirquent 是带有簇和级两个参数的公式(在 Cirquent 演算理论中, Cirquent 有更广的定义(见文献[13])).其中,

- 簇是对公式中出现的所有  $\wedge, \vee$  联结词组成的集合的划分(划分成的子集也称为簇),且满足条件:同一簇中的联结词具有相同的类型( $\wedge$  或  $\vee$ );
- 级是对所有簇组成的集合的进一步划分,该划分将所有簇组成的集合划分成两个子集(这两个子集也称为级),且满足条件:同一级中的簇具有相同的类型.

每个簇有唯一的正整数与其对应,称为簇 ID.簇  $k$  是指簇的 ID 是  $k$ .包含  $\wedge$ -簇的级称为合取级,包含  $\vee$ -簇的级称为析取级.若簇  $k$  在第 1 级(第 2 级)中,我们说簇  $k$  在 1 级(簇  $k$  在 2 级).例如,图 2 表示一个带有 4 个簇 2 个级(1 级为析取级,2 级为合取级)的 Cirquent.

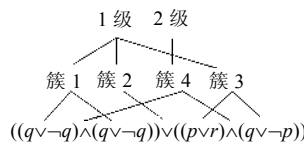


Fig.2

图 2

为了节省空间和表达方式的紧致,本文将用公式的形式表达 Cirquent,只是在公式中出现的每个联结词右下角加注下标  $k^i$ ——表明该联结词属于簇  $k$  且簇  $k$  在  $i$  级( $i \in \{1, 2\}$ ).例如,上段示例中的 Cirquent 将表示为

$$((q \vee_{1^1} \neg q) \wedge_{4^2} (q \vee_{1^1} \neg q)) \vee_{2^1} ((p \vee_{3^1} r) \wedge_{4^2} (q \vee_{3^1} \neg p)).$$

在一个给定的 Cirquent  $C$  中,若簇  $k$  的成员只有一个,则称簇  $k$  是单身的;否则,簇  $k$  是非单身的.若  $C$  中所有的簇都是单身的,则称  $C$  是经典的;否则,称  $C$  是非经典的. $C$  中一个联结词  $a$  的水平,记为  $L^C(a)$ ,是所有使得  $a$  在其辖域中的联结词  $b$  的个数.若联结词  $b$  在联结词  $a$  的辖域中且  $L^C(b) = L^C(a) + 1$ ,则称  $b$  为  $a$  的孩子, $a$  为  $b$  的父亲.关系后代和祖先分别是关系孩子和父亲的传递闭包.联结词  $a$  和它的一个后代  $b$  之间的距离是一个正整数  $k$ ,使得  $k = L^C(b) - L^C(a)$ ;当  $a$  和  $b$  之间的距离小于  $a$  和其另一个后代  $c$  之间的距离,我们称  $b$  与  $a$  比  $c$  与  $a$  近.进一步,对任意的两个联结词  $a$  和  $b$ ,将它们最近共同祖先记为  $\underline{ab}$ .最后,若  $C$  包含后代和祖先在同一个簇中的情形,则称  $C$  是遗传的;否则,称  $C$  是非遗传的.

一个解释是一个函数  $*$ :  $\{P, Q, R, S, \dots\} \rightarrow \{\top, \perp\}$ ,并且通过  $(\neg P)^* = \top$  当且仅当  $P^* = \perp$  扩展到所有文字.

设  $i \in \{1, 2\}$ .一个  $i$ -选择是一个函数  $f_i: \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \{\text{左}, \text{右}\}$ .进一步地,一个选择是二元组  $\vec{f} = (f_1, f_2)$ ,其中对任意  $i \in \{1, 2\}$ ,  $f_i$  是  $i$ -选择.设  $C$  是 Cirquent,且  $C$  有子 Cirquent  $A \vee_{k^i} B$  (或  $A \wedge_{k^i} B$ ).若  $f_i(k) = \text{左}$ ,称  $A \vee_{k^i} B$  (或  $A \wedge_{k^i} B$ ) 的被选项是  $A$ ;若  $f_i(k) = \text{右}$ ,称  $A \vee_{k^i} B$  (或  $A \wedge_{k^i} B$ ) 的被选项是  $B$ .

设  $C$  是 Cirquent,  $*$  是一个解释,  $\vec{f}$  是一个选择.以下给出“关于  $(*, \vec{f})$  是真的”的定义:

- $C$  的文字  $L$  关于  $(*, \bar{f})$  是真的当且仅当  $L^* = T$ ;
- $C$  的子 Cirquent  $A \vee_{k^i} B$  (或  $A \wedge_{k^i} B$ ) 关于  $(*, \bar{f})$  是真的当且仅当其被选项关于  $(*, \bar{f})$  是真的.

进一步地,  $C$  在解释  $*$  下是真的当且仅当  $\alpha_1 f_1 \alpha_2 f_2$  使得  $C$  关于  $(*(, (f_1, f_2))$  是真的. 其中,  $\alpha_i f_i$  表示: 对任意  $i$ -选择  $f_i$  (若  $C$  的  $i$  级是合取级) 以及存在一个  $i$ -选择  $f_i$  (若  $C$  的  $i$  级是析取级). 最后, 我们称  $C$  是有效的当且仅当它在任意解释下都是真的.

以下为叙述方便, 当需要指明 Cirquent  $C$  的 1 级和 2 级的类型时, 我们将用  $C_{1\vee}^{2\wedge}$  表示其 1 级是析取级, 2 级是合取级; 用  $C_{1\wedge}^{2\vee}$  表示其 1 级是合取级, 2 级是析取级.

由上述语义定义容易看到: 经典命题逻辑中的公式等同于本文经典的 Cirquent  $C_{1\vee}^{2\wedge}$ , 只是将  $C_{1\vee}^{2\wedge}$  中所有联结词右下角的下标 ( $k^i$ ) 省略而已. 对经典的 Cirquent  $C_{1\vee}^{2\wedge}$  (即, 经典命题逻辑公式),  $C_{1\vee}^{2\wedge}$  是有效的当且仅当它关于经典命题逻辑语义是有效的. 而且, 经典逻辑语义中一个公式在某个解释  $*$  下是真的当且仅当本文语义中存在一个 1-选择  $f_1$  对任意的 2-选择  $f_2$ , 使得该公式关于  $(*(, (f_1, f_2))$  是真的. 因此, 本文所介绍的逻辑是经典命题逻辑的保守扩张, 经典命题逻辑只是本文限制在经典的  $C_{1\vee}^{2\wedge}$  水平的逻辑部分. 另外, 本文的逻辑也是文献[19]中只带有  $\vee$ -簇 (一个参数) 的逻辑保守扩张, 文献[19]的逻辑是本文限制在  $C_{1\vee}^{2\wedge}$  水平且  $\wedge$ -簇均是单身的逻辑部分.

## 2 主要结论

### 2.1 系统 EIF<sub>P</sub>

本节给出系统 EIF<sub>P</sub> 的公理和推理规则. 在给出公理和推理规则之前, 我们先给出一个定义和两个引理.

对于仅包含非单身  $\wedge$ -簇 (即,  $\vee$ -簇均是单身) 的非遗传 Cirquent  $C_{1\vee}^{2\wedge}$ , 反复执行以下步骤, 直到  $C_{1\vee}^{2\wedge}$  变为经典的: 任选  $C_{1\vee}^{2\wedge}$  中属于非单身  $\wedge$ -簇的一个联结词  $a$ , 将其下标  $k^2$  变为  $l^2$ , 其中,  $l^2$  是在  $C_{1\vee}^{2\wedge}$  (包括下标) 中没有出现过的任意正整数. 我们称上述过程为  $C_{1\vee}^{2\wedge}$  的经典化, 并将经典化的结果记为  $\mathcal{C}(C_{1\vee}^{2\wedge})$ . 对于仅包含非单身  $\vee$ -簇 (即,  $\wedge$ -簇均是单身) 的非遗传 Cirquent  $C_{1\wedge}^{2\vee}$ , 其经典化定义类似, 只是将上述过程中的  $\wedge$ -改为  $\vee$ -,  $\vee$ -改为  $\wedge$ -.

容易验证以下两个引理成立:

引理 1. 设  $*$  是任意的解释:

- (i) 一个经典的 Cirquent  $C_{1\vee}^{2\wedge}$  在  $*$  下是真的当且仅当将  $C_{1\vee}^{2\wedge}$  中的级互换而得到的 Cirquent 在  $*$  下是真的;
- (ii) 一个经典的 Cirquent  $C_{1\wedge}^{2\vee}$  在  $*$  下是真的当且仅当将  $C_{1\wedge}^{2\vee}$  中的级互换而得到的 Cirquent 在  $*$  下是真的.

引理 2. 设  $*$  是任意的解释:

- (i) 一个仅包含非单身  $\wedge$ -簇的非遗传 Cirquent  $C_{1\vee}^{2\wedge}$  在  $*$  下是真的当且仅当  $\mathcal{C}(C_{1\vee}^{2\wedge})$  在  $*$  下是真的;
- (ii) 一个仅包含非单身  $\vee$ -簇的非遗传 Cirquent  $C_{1\wedge}^{2\vee}$  在  $*$  下是真的当且仅当  $\mathcal{C}(C_{1\wedge}^{2\vee})$  在  $*$  下是真的.

由引理 1 容易得到: 对经典的 Cirquent, 我们没必要区分是  $C_{1\vee}^{2\wedge}$  还是  $C_{1\wedge}^{2\vee}$  (即, 与级无关). 为了表达和叙述方便, 本文以下部分在表达 Cirquent 时将总是省去单身簇的 ID 及其所属的级 (即, 省去属于单身簇的联结词的下标  $k^i$ ). 这样, 经典的 Cirquent 就自动变成了经典命题逻辑公式.

我们将看到, 系统 EIF<sub>P</sub> 的推理规则可作用于 Cirquent 的任意深度而不仅仅是在根部进行. 因此, 系统 EIF<sub>P</sub> 采取的是深度推理<sup>[20]</sup>. 正因为此, 在表达推理规则时也借用了深度推理的表达: 将用  $\Phi\{\}$  或  $\Psi\{\}$  来表示任意的在子结构中带有空  $\{\}$  的 Cirquent. 空  $\{\}$  可被任意的 Cirquent 代替. 例如, 若  $\Phi\{\} = (q \vee_{i_2} p) \vee_{i_2} (\{\} \wedge q)$ , 则  $\Phi\{\neg p\} = (q \vee_{i_2} p) \vee_{i_2} (\neg p \wedge q)$ ,  $\Phi\{q\} = (q \vee_{i_2} p) \vee_{i_2} (q \wedge q)$  以及  $\Phi\{p \vee_{i_2} q\} = (q \vee_{i_2} p) \vee_{i_2} ((p \vee_{i_2} q) \wedge q)$ .

系统 EIF<sub>P</sub> 的公理包括 (引理 1 和引理 2 解释了系统 EIF<sub>P</sub> 的公理包括如下 3 部分的合理性):

- (i) 经典命题逻辑中的所有重言式;
- (ii) 所有仅包含非单身  $\wedge$ -簇的非遗传 Cirquent  $C_{1\vee}^{2\wedge}$ , 其中,  $C_{1\vee}^{2\wedge}$  使得  $\mathcal{C}(C_{1\vee}^{2\wedge})$  是重言式;
- (iii) 所有仅包含非单身  $\vee$ -簇的非遗传 Cirquent  $C_{1\wedge}^{2\vee}$ , 其中,  $C_{1\wedge}^{2\vee}$  使得  $\mathcal{C}(C_{1\wedge}^{2\vee})$  是重言式.

系统  $EIF_P$  的推理规则如图 3 所示,包括规则 I、规则 II、规则 III.其中  $A, B, C, D$  代表任意的 Cirquent,  $k$  是某个正整数(代表某个簇的 ID),  $\odot \in \{\wedge, \vee\}$ ,  $\circ \in \{\wedge, \vee, \wedge_l, \vee_l\}$  ( $l$  是任意正整数使得簇  $l$  是非单身的).特别注意:在同一规则中,  $\odot$  的所有出现均代表同一符号(如均是  $\vee$ ),  $\circ$  的所有出现也均代表同一符号(如均是  $\vee_l$ ).

$$\begin{array}{cc}
 \frac{\Phi\{\Psi\{A\}\odot_k C\}}{\Phi\{\Psi\{A\odot_k B\}\odot_k C\}} \text{规则I(左)} & \frac{\Phi\{C\odot_k \Psi\{A\}\}}{\Phi\{C\odot_k \Psi\{B\odot_k A\}\}} \text{规则I(右)} \\
 \frac{\Phi\{(A\circ C)\odot_k (B\circ C)\}}{\Phi\{(A\odot_k B)\circ C\}} \text{规则II(左)} & \frac{\Phi\{(C\circ A)\odot_k (C\circ B)\}}{\Phi\{C\circ (A\odot_k B)\}} \text{规则II(右)} \\
 \frac{\Phi\{(A\circ C)\vee_k (B\circ D)\}}{\Phi\{(A\vee_k B)\circ (C\vee_k D)\}} \text{规则III}(C_{1\vee}^{2\wedge}) & \frac{\Phi\{(A\circ C)\wedge_k (B\circ D)\}}{\Phi\{(A\wedge_k B)\circ (C\wedge_k D)\}} \text{规则III}(C_{1\wedge}^{2\vee})
 \end{array}$$

Fig.3 Inference rules of system  $EIF_P$

图 3 系统  $EIF_P$  的推理规则

说明:

- (i) 规则 I 和规则 II 均有左、右两个版本,适用于任意 Cirquent;规则 III 有  $C_{1\vee}^{2\wedge}, C_{1\wedge}^{2\vee}$  两个版本,其中,规则 III( $C_{1\vee}^{2\wedge}$ )只适用于 1 级是析取级、2 级是合取级的 Cirquent,规则 III( $C_{1\wedge}^{2\vee}$ )只适用于 1 级是合取级、2 级是析取级的 Cirquent;
- (ii) 如图 3 所示,在每条规则的运用中,将前提(结论)中标有下标  $k$  的联结词称为这次运用在前提(结论)中的关键联结词;
- (iii) 图 3 中,我们仅用下标  $k$ (或  $l$ )来表示相应联结词所属的簇(而没用  $k'$ (或  $l'$ )来表明其所属的簇和簇所属的级),这是因为这样表示既简单又不会引起表达的混淆.例如:若规则运用于 Cirquent  $C_{1\vee}^{2\wedge}$ ,则所有  $\vee$ -联结词均是 1 级,所有  $\wedge$ -联结词均是 2 级;若规则运用于 Cirquent  $C_{1\wedge}^{2\vee}$ ,则所有  $\wedge$ -联结词均是 1 级,所有  $\vee$ -联结词均是 2 级.

Cirquent  $C$  在系统  $EIF_P$  中的一个证明是由 Cirquent 组成的序列  $C_0, C_1, \dots, C_n$ , 使得  $C_0$  是  $EIF_P$  中的公理,  $C_n = C$ , 且  $C_i$  是由  $C_{i-1}$  运用  $EIF_P$  中的推理规则得到的 ( $0 \leq i \leq n$ ).  $C$  在系统  $EIF_P$  中是可证的当且仅当  $C$  在  $EIF_P$  中存在一个证明.

**引理 3.** 设  $\Phi\{A\odot_{k'} B\}$  是 Cirquent(其中,  $\odot \in \{\wedge, \vee\}, i \in \{1, 2\}, k$  是正整数),  $\vec{f} = (f_1, f_2)$  是一个选择,  $*$  是一个解释.  $\Phi\{A\odot_{k'} B\}$  关于  $(*, \vec{f})$  是真的当且仅当  $f_i(k)$  是左时  $\Phi\{A\}$  关于  $(*, \vec{f})$  是真的,  $f_i(k)$  是右时  $\Phi\{B\}$  关于  $(*, \vec{f})$  是真的.

证明:对  $\Phi\{\}$  中联结词的个数作归纳证明.若  $\Phi\{\}$  中联结词的个数为 0, 则  $\Phi\{A\odot_{k'} B\} = A\odot_{k'} B, \Phi\{A\} = A, \Phi\{B\} = B$ . 由关于  $(*, \vec{f})$  真的定义,  $A\odot_{k'} B$  关于  $(*, \vec{f})$  是真的当且仅当  $f_i(k)$  是左时其被选项  $A$  关于  $(*, \vec{f})$  是真的,  $f_i(k)$  是右时其被选项  $B$  关于  $(*, \vec{f})$  是真的.

假设  $\Phi\{\}$  中联结词的个数为  $n$  时命题成立, 证明  $\Phi\{\}$  中联结词的个数为  $n+1$  时命题也成立, 分  $\Phi\{\}$  的主要联结词是  $\wedge, \vee, \wedge_m, \vee_m$  ( $m$  是任意正整数使得簇  $m$  是非单身的) 这 4 种情况讨论. 这里只讨论  $\Phi\{\}$  的主要联结词是  $\vee$  的情形, 其他情形类似可证. 不妨设  $\Phi\{A\odot_{k'} B\} = \Psi\{A\vee_{k'} B\} \vee C$ , 其中,  $\Phi\{\}$  的主要联结词  $\vee$  在某个单身簇  $l$  中 ( $\Phi\{A\odot_{k'} B\} = \Psi\{A\wedge_{k'} B\} \vee C$  的情形类似可证). 进一步分以下两种情形讨论:

- (1)  $f_i(l)$  是右, 则  $\Psi\{A\vee_{k'} B\} \vee C$  关于  $(*, \vec{f})$  是真的当且仅当被选项  $C$  关于  $(*, \vec{f})$  是真的. 同理,  $\Psi\{A\} \vee C$  (或  $\Psi\{B\} \vee C$ ) 关于  $(*, \vec{f})$  是真的当且仅当被选项  $C$  关于  $(*, \vec{f})$  是真的. 而  $\Phi\{A\}$  即  $\Psi\{A\} \vee C, \Phi\{B\}$  即  $\Psi\{B\} \vee C$ , 从而结论显然成立;
- (2)  $f_i(l)$  是左, 则  $\Psi\{A\vee_{k'} B\} \vee C$  关于  $(*, \vec{f})$  是真的当且仅当被选项  $\Psi\{A\vee_{k'} B\}$  关于  $(*, \vec{f})$  是真的. 由归纳假设,  $\Psi\{A\vee_{k'} B\}$  关于  $(*, \vec{f})$  是真的当且仅当  $f_i(k)$  是左时  $\Psi\{A\}$  关于  $(*, \vec{f})$  是真的,  $f_i(k)$  是右时  $\Psi\{B\}$  关于

$(*, \bar{f})$  是真的.而  $f_i(k)=$ 左时  $\Psi\{A\}$  关于  $(*, \bar{f})$  是真的, $f_i(k)=$ 右时  $\Psi\{A\}$  关于  $(*, \bar{f})$  是真的当且仅当  $f_i(k)=$ 左时  $\Phi\{A\}$  关于  $(*, \bar{f})$  是真的, $f_i(k)=$ 右时  $\Phi\{B\}$  关于  $(*, \bar{f})$  是真的.  $\square$

**定理 1.** 系统 EIF<sub>P</sub> 中的所有规则都是双向保真的.

证明:我们仅证明规则 III( $C_{1\wedge}^{2\vee}$ ) 双向保真,其他规则类似可证.设 \* 是任意的解释,以下证明前提  $\Phi\{(A\circ C)\wedge_k(B\circ D)\}$  在 \* 下是真的当且仅当结论  $\Phi\{(A\wedge_k B)\circ(C\wedge_k D)\}$  在 \* 下是真的.分 3 种情况讨论如下.

(1)  $\circ$  是  $\vee_l$  或  $\wedge_l$ .

由真的定义,前提  $\Phi\{(A\circ C)\wedge_k(B\circ D)\}$  在 \* 下是真的当且仅当对任意的 1-选择  $f_1$  存在一个 2-选择  $f_2$ ,使得前提关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的(显然,  $(f_1, f_2)$  也是结论的一个选择).由引理 3,前提关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的当且仅当  $f_1(k)=$ 左时  $\Phi\{A\circ C\}$  关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的,或  $f_1(k)=$ 右时  $\Phi\{B\circ D\}$  关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的.另一方面,连用两次引理 3,我们有结论:关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的当且仅当  $f_1(k)=$ 左时  $\Phi\{A\circ C\}$  关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的,或  $f_1(k)=$ 右时  $\Phi\{B\circ D\}$  关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的.所以,前提关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的当且仅当结论关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的.而对任意的 1-选择  $f_1$ ,存在一个 2-选择  $f_2$ ,使得结论关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的当且仅当结论在 \* 下是真的.

(2)  $\circ$  是  $\wedge$ .

设前提是  $\Phi\{(A\wedge_m C)\vee_k\{B\wedge_n D\}\}$ ,结论是  $\Phi\{(A\wedge_k B)\wedge_h\{C\wedge_l D\}\}$ ,其中,簇  $m, n, h$  均是单身的.设结论在 \* 下是真的.设  $g_1$  是结论的任意 1-选择,则  $g_1$  分别在簇  $k, h$  上的附值一定是以下 4 种情况之一:左、左;左、右;右、左;右、右.若  $g_1(k)=$ 左、 $g_1(h)=$ 左,则由真的定义及引理 3,存在结论的 2-选择  $g_2$ ,使得  $\Phi\{A\}$  关于  $(*, (g_1, g_2))$  是真的;同理,若  $g_1(k)=$ 左、 $g_1(h)=$ 右,存在结论的 2-选择  $u_2$ ,使得  $\Phi\{C\}$  关于  $(*, (g_1, u_2))$  是真的;若  $g_1(k)=$ 右、 $g_1(h)=$ 左,存在结论的 2-选择  $v_2$ ,使得  $\Phi\{B\}$  关于  $(*, (g_1, v_2))$  是真的;若  $g_1(k)=$ 右、 $g_1(h)=$ 右,存在结论的 2-选择  $w_2$ ,使得  $\Phi\{D\}$  关于  $(*, (g_1, w_2))$  是真的.显然,  $g_2, u_2, v_2, w_2$  也均是前提的 2-选择.设  $f_1$  是前提任意的 1-选择,则同上,  $f_1$  在簇  $k, m, n$  上的附值共有  $2^3=8$  种情况.由  $g_1, f_1$  的任意性可知,  $g_1, f_1$  分别限制在  $\Phi\{A\}, \Phi\{B\}, \Phi\{C\}, \Phi\{D\}$  上时是相同的.所以当  $f_1(k)=$ 左、 $f_1(m)=$ 左时,取前提的 2-选择  $g_2$ ,则  $\Phi\{A\}$  关于  $(*, (f_1, g_2))$  是真的;同理,当  $f_1(k)=$ 左、 $f_1(m)=$ 右时,取前提的 2-选择  $u_2$ ,则  $\Phi\{C\}$  关于  $(f_1, u_2)$  是真的;当  $f_1(k)=$ 右、 $f_1(n)=$ 左时,取前提的 2-选择  $v_2$ ,则  $\Phi\{B\}$  关于  $(*, (f_1, v_2))$  是真的;当  $f_1(k)=$ 右、 $f_1(n)=$ 右时,取前提的 2-选择  $w_2$ ,则  $\Phi\{D\}$  关于  $(*, (f_1, w_2))$  是真的.所以,对前提任意的 1-选择  $f_1$ ,总存在前提的 2-选择  $f_2$ ,使得前提关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的.故,前提在 \* 下是真的.反之,设前提在 \* 下是真的,同上类似,可证结论在 \* 下是真的.

(3)  $\circ$  是  $\vee$ .

设前提是  $\Phi\{(A\vee_m C)\wedge_k\{B\vee_n D\}\}$ ,结论是  $\Phi\{(A\wedge_k B)\vee_h\{C\wedge_l D\}\}$ ,其中,簇  $m, n, h$  均是单身的.

首先,设结论在 \* 下是真的.设  $f_1$  是前提任意的 1-选择.显然,  $f_1$  也是结论的 1-选择.则由真的定义,对  $f_1$  存在结论的 2-选择  $f_2$ ,使得结论关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的.由引理 3(连用两次),当有  $f_1(k)=$ 左时  $\Phi\{A\vee_m C\}$  关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的,或  $f_1(k)=$ 右时  $\Phi\{B\vee_n D\}$  关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的.令  $g_2$  是前提的一个 2-选择,满足  $g_2(m)=g_2(n)=f_2(h)$ ,且  $g_2$  在其他  $\vee$ -簇上的定义与  $f_2$  相同.则当  $f_1(k)=$ 左时  $\Phi\{A\vee_m C\}$  关于  $(*, (f_1, g_2))$  是真的,或  $f_1(k)=$ 右时  $\Phi\{B\vee_n D\}$  关于  $(*, (f_1, g_2))$  是真的.再由引理 3,我们得到前提关于  $(*, (f_1, g_2))$  是真的.所以前提在 \* 下是真的.

其次,设前提在 \* 下是真的.设  $f_1$  是结论任意的 1-选择.显然,  $f_1$  也是前提的 1-选择.则由真的定义,对  $f_1$  存在前提的 2-选择  $f_2$ ,使得前提关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的.由引理 3,当  $f_1(k)=$ 左时  $\Phi\{A\vee_m C\}$  关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的,或  $f_1(k)=$ 右时  $\Phi\{B\vee_n D\}$  关于  $(*, (f_1, f_2))$  是真的.令  $g_2$  是结论的一个 2-选择,满足  $f_1(k)=$ 左时  $g_2(h)=f_2(m), f_1(k)=$ 右时  $g_2(h)=f_2(n)$ ,且  $g_2$  在其他  $\vee$ -簇上的定义与  $f_2$  相同.从而有:  $f_1(k)=$ 左时  $\Phi\{A\vee_m C\}$  关于  $(*, (f_1, g_2))$  是真的,或  $f_1(k)=$ 右时  $\Phi\{B\vee_n D\}$  关于  $(*, (f_1, g_2))$  是真的.最后再由引理 3(连用两次),得到结论关于  $(*, (f_1, g_2))$  是真的.故,结论在 \* 下是真的.  $\square$

## 2.2 系统 EIF<sub>P</sub> 的可靠性与完备性

本节给出系统 EIF<sub>P</sub> 的可靠性与完备性证明.

**定理 2.** Cirquent  $C$  是有效的当且仅当它在 EIF<sub>P</sub> 中是可证的.

证明:可靠性显然成立.这是因为公理是有效的,再由定理 1,所有规则是保真的(从而保有效性),所以由公理和推理规则推出的 Cirquent  $C$  一定是有效的.现考虑完备性.设 Cirquent  $C$  是有效的.以下证明  $C$  在 EIF<sub>P</sub> 中是可

证的.分以下几种情况讨论(此证明借鉴(但不同于)文献[19]中相应证明的思路):

(1) 设  $C$  是经典的,即, $C$  是经典命题逻辑公式.

则由  $C$  的有效性,我们立即得到  $C$  是经典命题逻辑中的重言式,从而是  $EIF_P$  中的公理.

(2) 设  $C$  是非经典的 Cirquent  $C_{IV}^{2\wedge}$ ,且  $C_{IV}^{2\wedge}$  中只有非单身的  $\wedge$ -簇.

自下而上地反复运用规则 I,直到当前(最上面)的 Cirquent 变为非遗传的 Cirquent  $D_{IV}^{2\wedge}$ .容易看出:每运用一次规则 I,当前 Cirquent 中就减少一对联结词  $a,b$ ,其中, $a,b$  满足在同一簇中且是后代-祖先的关系.因此,上述过程一定能在有限步内结束.由定理 1,规则 I 是双向保真的,所以  $D_{IV}^{2\wedge}$  是有效的.又规则 I 的运用不会使非单身  $\vee$ -簇出现,所以  $D_{IV}^{2\wedge}$  是有效的只有非单身  $\wedge$ -簇的非遗传 Cirquent,从而是  $EIF_P$  中的公理.

(3) 设  $C$  是非经典的 Cirquent  $C_{IV}^{2\vee}$ ,且  $C_{IV}^{2\vee}$  中只有非单身的  $\vee$ -簇.

与情形(2)类似,自下而上地反复运用规则 I,直到当前的 Cirquent 变为非遗传的 Cirquent  $E_{IV}^{2\vee}$ .因为规则 I 是双向保真的,所以  $E_{IV}^{2\vee}$  是有效的.且此过程不会使非单身的  $\wedge$ -簇出现,所以  $E_{IV}^{2\vee}$  是有效的只有非单身  $\vee$ -簇的非遗传 Cirquent,从而是  $EIF_P$  中的公理.

(4) 设  $C$  是非经典的 Cirquent  $C_{IV}^{2\vee}$ ,且  $C_{IV}^{2\vee}$  中有非单身的  $\wedge$ -簇和  $\vee$ -簇.

自下而上地建立  $C_{IV}^{2\vee}$  的证明如下:

首先,对当前(最上面的)Cirquent 反复运用规则 I,直到当前 Cirquent 变为非遗传的 Cirquent  $C_{IV}^{2\vee}$ ,则  $C_{IV}^{2\vee}$  是有效的(由定理 1).设  $k_1, k_2, \dots, k_n (n \geq 0)$  是  $C_{IV}^{2\vee}$  中所有非单身的  $\wedge$ -簇,任意选取其中一个  $\wedge$ -簇  $k_i$ ,反复执行以下 3 个步骤,直到当前 Cirquent 中的簇  $k_i$  变为单身(以下我们用  $A$  表示当前的 Cirquent):

步骤 1. 任意选取满足以下两个条件的一对  $\wedge$ -联结词  $a,b$ : $a,b$  均在簇  $k_i$  中;对簇  $k_i$  中的任意一对  $\wedge$ -联结词  $c,d$ ,  $L^A(ab) \geq L^A(cd)$ . 令  $m=2, l=L^A(ab)$ .

步骤 2. (a) 反复执行以下两步直到  $L^A(a)=l+1$ :

- (i) 自下而上地对  $A$  运用规则 II,使得联结词  $a$  是这次运用(在结论中)的关键联结词;
- (ii) 将这次运用(在前提中)的关键联结词重命名为  $a$ ;

(b) 反复执行以下两步直到  $L^A(b)=l+1$ :

- (i) 自下而上地对  $A$  运用规则 II,使得联结词  $b$  是这次运用(在结论中)的关键联结词;
- (ii) 将这次运用(在前提中)的关键联结词重命名为  $b$ ;

步骤 3. 自下而上地对  $A$  运用规则 III,使得  $a,b$  是这次运用(在结论中)的关键联结词.令  $m=1$ .

容易验证,上述 3 步骤的执行过程保持当前 Cirquent 的非遗传性.又由文献[19]的定理 3.3,该过程可在有限步内结束(停止).设上述 3 步骤过程结束时得到的 Cirquent 是  $E_{IV}^{2\vee}$ ,则  $E_{IV}^{2\vee}$  中有  $n-1$  个非单身的  $\wedge$ -簇(因为此过程不会增加新的非单身簇,且簇  $k_i$  变成了单身).在  $E_{IV}^{2\vee}$  中任选  $\wedge$ -簇  $k_j (j \neq i, 1 \leq j \leq n)$  执行上述类似的过程,则得到 Cirquent  $F_{IV}^{2\vee}$  (其中有  $n-2$  个非单身  $\wedge$ -簇).上述过程每执行一次,当前 Cirquent 中非单身  $\wedge$ -簇的个数减 1.因此,最外层的循环过程一定在有限步内结束,且最后得到的 Cirquent  $G_{IV}^{2\vee}$  中没有非单身的  $\wedge$ -簇.因为上述过程中只用到规则 II 和规则 III,且它们都是双向保真的,所以所有的 Cirquent  $E_{IV}^{2\vee}, F_{IV}^{2\vee}, \dots, G_{IV}^{2\vee}$  都是有效的.因为最上面的 Cirquent  $G_{IV}^{2\vee}$  是有效的只包含非单身  $\vee$ -簇的非遗传 Cirquent(已经是  $EIF_P$  中的公理),所以得到了  $C_{IV}^{2\vee}$  的自下而上的一个证明.

(5) 设  $C$  是非经典的 Cirquent  $C_{IV}^{2\wedge}$ ,且  $C_{IV}^{2\wedge}$  中有非单身的  $\wedge$ -簇和  $\vee$ -簇.

与情形(4)类似,可自下而上建立  $C_{IV}^{2\wedge}$  的一个证明,只是将情形 4 过程中的  $\wedge$ -均换成  $\vee$ -, $\vee$ -均换成  $\wedge$ -.

□

### 3 总结与展望

本文给出了一个带有簇和 2 个级的 Cirquent 演算系统  $EIF_P$ ,证明了该系统关于 Cirquent 语义(命题水平)的可靠性与完备性.系统  $EIF_P$  是经典命题逻辑系统的扩张.同时,由于带有簇和级的 Cirquent 能很好地解释和表达

命题联结词间的相互依赖和独立关系,系统  $\text{EIF}_p$  可看作是 Extended IF 逻辑命题部分的一个可靠完备的公理系统.这使得 Extended IF 逻辑在命题水平得到了真正意义上的公理化,从而为 Extended IF 逻辑的发展做出了一定的理论贡献.当然,本文给出的系统还可进一步扩张.由于 Cirquent 概念有一系列的推广,未来我们还需研究系统  $\text{EIF}_p$  的一系列扩张.其中,首要研究带有簇和任意有限个级(而不是只有 2 个级)的 Cirquent 概念,给出相应的推理系统并证明其可靠性与完备性.

## References:

- [1] Hintikka J, Sandu G. Game-Theoretical Semantics. In: van Benthem J, ter Meulen A, eds. Handbook of Logic and Language. North-Holland, 1997. 361–410.
- [2] Hodges W. Compositional semantics for a language of imperfect information. Logic Journal of the IGPL, 1997,5(4):539–563. [doi: 10.1093/jigpal/5.4.539]
- [3] Hodges W. Logics of imperfect information: Why sets of assignments? In: van Benthem J, Gabbay DM, Löve B, eds. Proc. of the Interactive Logic. Amsterdam University Press, 2007. 117–133.
- [4] Mann AL, Sandu G, Sevenster M. Independence-Friendly Logic: A Game-Theoretic Approach. Cambridge eBook, 2011.
- [5] Tulenheimo T. Independence Friendly Logic. Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2009. <http://plato.stanford.edu/entries/logic-if/>
- [6] Väänänen J. Dependence Logic: A New Approach to Independence Friendly Logic. London Mathematical Society Student Texts, 2007.
- [7] Pietarinen AV. Propositional logic of imperfect information: Foundations and applications. Notre Dame Journal Formal Logic, 2001,42(4):193–210. [doi: 10.1305/ndjfl/1063372242]
- [8] Sandu G, Pietarinen A. Partiality and games: Propositional logic. Logic Journal of the IGPL, 2001,9(1):101–121. [doi: 10.1093/jigpal/9.1.101]
- [9] Japaridze G. Introduction to computability logic. Annals of Pure and Applied Logic, 2003,123:1–99. [doi: 10.1016/S0168-0072(03)00023-X]
- [10] Japaridze G. In the beginning was game semantics. In: Majer O, Pietarinen AV, Tulenheimo T, eds. Proc. of the Games: Unifying Logic, Language and Philosophy. Springer-Verlag, 2009. 249–350. [doi: 10.1007/978-1-4020-9374-6\_11]
- [11] Japaridze G. Introduction to cirquent calculus and abstract resource semantics. Journal of Logic and Computation, 2006,16(4): 489–532. [doi: 10.1093/logcom/exl005]
- [12] Japaridze G. Cirquent calculus deepened. Journal of Logic and Computation, 2008,18(6):983–1028. [doi: 10.1093/logcom/exn019]
- [13] Japaridze G. From formulas to cirquents in computability logic. Logical Methods in Computer Science, 2011,7(2):1–55. [doi: 10.2168/LMCS-7(2:1)2011]
- [14] Japaridze G. The taming of recurrences in computability logic through cirquent calculus, Part I. Archive for Mathematical Logic, 2013,52:173–212. [doi: 10.1007/s00153-012-0313-8]
- [15] Japaridze G. The taming of recurrences in computability logic through cirquent calculus, Part II. Archive for Mathematical Logic, 2013,52:213–259. [doi: 10.1007/s00153-012-0314-7]
- [16] Xu WY, Liu SY. Soundness and completeness of the cirquent calculus system CL6 for computability logic. Logic Journal of the IGPL, 2012,20:317–330. [doi: 10.1093/jigpal/jzr043]
- [17] Xu WY, Liu SY. The countable versus uncountable branching recurrences in computability logic. Journal of Applied Logic, 2012,10(4): 431–446. [doi: 10.1016/j.jal.2012.05.001]
- [18] Xu WY, Liu SY. The parallel versus branching recurrences in computability logic. Notre Dame Journal of Formal Logic, 2013,54(1): 61–78. [doi: 10.1215/00294527-1731389]
- [19] Xu WY. A propositional system induced by Japaridze's approach to IF logic. Logic Journal of the IGPL, 2014. <http://arxiv.org/abs/1402.4172>
- [20] Bruscoli P, Guglielmi A. On the proof complexity of deep inference. ACM Trans. on Computational Logic, 2009,10(2):14. [doi: 10.1145/1462179.1462186]



许文艳(1978—),女,山西太原人,博士,副教授,主要研究领域为数理逻辑,计算理论.