

多值 Łukasiewicz 逻辑公式的范式表示和计数问题*

王庆平^{1,2}, 王国俊¹

¹(陕西师范大学 数学研究所, 陕西 西安 710062)

²(江西财经大学 统计学院, 江西 南昌 330013)

通讯作者: 王国俊, E-mail: gjwang@snnu.edu.cn, http://www.snnu.edu.cn

摘要: 将符号化计算树逻辑中的 Shannon 展开式做了推广, 在 n 值 Łukasiewicz 逻辑系统 L_n 中, 研究了由逻辑公式导出的 n 值 McNaughton 函数的展开式, 给出了 m 元 n 值 McNaughton 函数的准析取范式和准合取范式. 在此基础上, 给出了 m 元 n 值 McNaughton 函数的计数问题, 并在 n 值 Łukasiewicz 逻辑系统 L_n 中, 给出了 m 元逻辑公式的构造方法及其逻辑等价类的计数问题.

关键词: Shannon 展开式; n 值 McNaughton 函数; 准析(合)取范式; 逻辑等价类; 计数问题

中图法分类号: TP181 **文献标识码:** A

中文引用格式: 王庆平, 王国俊. 多值 Łukasiewicz 逻辑公式的范式表示和计数问题. 软件学报, 2013, 24(3): 433-453. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4231.htm>

英文引用格式: Wang QP, Wang GJ. Normal form of Łukasiewicz logic formulae and related counting problems. Ruanjian Xuebao/Journal of Software, 2013, 24(3): 433-453 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4231.htm>

Normal Form of Łukasiewicz Logic Formulae and Related Counting Problems

WANG Qing-Ping^{1,2}, WANG Guo-Jun¹

¹(Institute of Mathematics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

²(School of Statistics, Jiangxi University of Finance and Economics, Nanchang 330013, China)

Corresponding author: WANG Guo-Jun, E-mail: gjwang@snnu.edu.cn, <http://www.snnu.edu.cn>

Abstract: The Shannon expansion in symbolic computation tree logic is generalized. In a n -valued Łukasiewicz logic system, L_n , the expansion of n -valued McNaughton functions which are induced by logical formulae is studied. The quasi disjunctive normal form and quasi conjunctive normal form of m -ary n -valued McNaughton functions, and the counting problems of m -ary n -valued McNaughton functions are given. In n -valued Łukasiewicz logic system L_n , the construction of formulae and counting problems of their logic equivalence class are provided.

Key words: Shannon expansion; n -valued McNaughton function; quasi disjunctive (conjunctive) normal form; logic equivalence class; counting problem

模型检验(model checking)技术自提出以来,已在航空航天、电子商务、通信技术乃至医疗系统等各个领域取得了成功的应用,近年来得到了迅速的发展^[1-11].所谓模型是指包含有状态集、状态转移关系以及与一组原子命题相联系的迁移系统(transition system,简称 TS),而模型检验的任务就在于通过某种自动化的方法检验一个 TS 是否满足预定的规范(specification).这里的规范通常用具有足够强的表述功能的逻辑公式 φ 来表示, φ 经常取为计算树逻辑(computing tree logic)中的公式,简称 CTL 公式.模型检验技术虽然是自动化的,但对于复杂的规范往往会出现计算复杂性大大增加,乃至出现状态爆炸的情况.为了简化检验过程,符号化的 CLT 模型检验已被提出,其中,基于开关函数(switching function)和 Shannon 展开式的有序二元决策图(ordered binary decision

* 基金项目: 国家自然科学基金(11171200, 61005046, 61103133)

收稿时间: 2011-01-05; 定稿时间: 2012-03-19

diagram,简称 OBDD)起着重要的作用.

另一方面,多值逻辑公式的计数问题也是一个困难的问题.众所周知,含有 m 个原子公式的二值命题逻辑公式的个数恰等于 m 元 Boole 函数的个数,即 2^{2^m} 个.但对于多值逻辑,相应的问题要复杂得多.以 3 值 Łukasiewicz 逻辑为例,含有 m 个原子公式的 3 值命题逻辑公式的个数并不等于 3^{3^m} .由于 Shannon 展开式是针对二值函数给出的,所以并不复杂,但其想法是巧妙的.本文首先基于 Shannon 展开式简练地导出二值逻辑公式的析取范式和合取范式.然后,根据 Shannon 展开式的思想提出多值逻辑公式的准范式,并最终用于多值逻辑公式的计数问题.为 n 值 Łukasiewicz 逻辑在近似推理中的应用奠定了基础.

1 预备知识

定义 1^[12]. 设 $S=\{p_1,p_2,\dots\}$,对 $F(S)$ 做如下情形:

- (i) $p_1,p_2,\dots \in F(S)$;
- (ii) 若 $A,B \in F(S)$,则 $\neg A, A \rightarrow B \in F(S)$;
- (iii) $F(S)$ 中的元都可通过情形(i)与情形(ii)而得到.

$F(S)$ 是 S 生成的 (\neg, \rightarrow) 型自由代数, S 中的元叫原子命题、命题变元或原子公式, $F(S)$ 中的元叫命题或合式公式,简称公式.

注 1:在定义 1 中并未用到逻辑连接词 \vee 与 \wedge ,其实它们都可以用 \neg 与 \rightarrow 来表达.规定: $A \vee B$ 与 $A \wedge B$ 分别是 $\neg A \rightarrow B$ 与 $\neg(A \rightarrow \neg B)$ 的简写.

定义 2^[12]. 设 $v:F(S) \rightarrow \{0,1\}$ 是映射,这里, $\{0,1\}$ 是 Boole 代数.若 v 是 (\neg, \rightarrow) 型同态,即 $v(\neg A) = \neg v(A), v(A \rightarrow B) = v(A) \rightarrow v(B)$,则称 v 为 $F(S)$ 的赋值, $v(A)$ 也叫公式 A 的赋值. $F(S)$ 中全体赋值集记作 Ω .

定义 3^[12]. 设 $A, B \in F(S)$:

- (i) 如果对每个 $v \in \Omega$ 均有 $v(A) = 1$,则称 A 为重言式,记作 $\models A$;如果对每个 $v \in \Omega$ 均有 $v(A) = 0$,则称 A 为矛盾式;
- (ii) 如果对每个 $v \in \Omega$ 均有 $v(A) = v(B)$,则称 A 与 B 逻辑等价,记作 $A \approx B$.

定义 4^[12]. 函数 $f:\{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}$ 叫 m 元 Boole 函数($m \in \mathbb{N}$).

定义 5^[12]. 设 $A(p_1, \dots, p_m)$ 是含有 m 个命题变元的合式公式,它由 p_1, \dots, p_m 通过逻辑连接词 \neg, \rightarrow, \vee 与 \wedge 连接而成.设 $(x_1, \dots, x_m) \in \{0,1\}^m$,分别用 x_1, \dots, x_m 取代 $A(p_1, \dots, p_m)$ 中的 p_1, \dots, p_m ,并按 $\neg 0 = 1, a \rightarrow b = 0$ 当且仅当 $a = 1, b = 0, a \vee b = \max\{a, b\}, a \wedge b = \min\{a, b\}$ 理解 \neg, \rightarrow, \vee 与 \wedge ,则得 m 元函数,记作 $\bar{A}(x_1, \dots, x_m)$,叫作公式 A 导出的 Boole 函数.

命题 1^[12]. 每个 Boole 函数都可由某公式导出.

定义 6^[12]. 设 $A(p_1, \dots, p_m) \in F(S)$,则分别当 A 具有形式 $(Q_{11} \wedge \dots \wedge Q_{1s}) \vee \dots \vee (Q_{t1} \wedge \dots \wedge Q_{ts})$ 或 $(Q_{11} \vee \dots \vee Q_{1s}) \wedge \dots \wedge (Q_{t1} \vee \dots \vee Q_{ts})$ 时,称 A 为析取范式或合取范式.这里, $Q_{ij} = p_j$ 或 $Q_{ij} = \neg p_j (j = 1, \dots, s; i = 1, \dots, t)$.

注 2:由原子公式或其否定通过析(合)取连接词连接而成的公式叫简单析(合)取式.如 $p_1 \vee p_2 \vee p_3$ 是简单析取式, $\neg p_1 \wedge p_2$ 是简单合取式.简单析(合)取式既可以看作析取范式,又可以看作合取范式.

定义 7^[1]. 设 $f(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 Boole 函数,称下式为 Shannon 展开式:

$$f(x_1, \dots, x_m) = (\neg x_1 \wedge f(0, x_2, \dots, x_m)) \vee (x_1 \wedge f(1, x_2, \dots, x_m)).$$

下面,我们给出 Shannon 展开式的推广形式.

命题 2. 设 $f(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 Boole 函数,约定 $x_k^0 = \neg x_k, x_k^1 = x_k (k = 1, 2)$,则

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \vee \{x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge f(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \dots, x_m) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \{0,1\}^2\}.$$

证明:由 Shannon 展开式可得:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = (\neg x_1 \wedge f(0, x_2, x_3, \dots, x_m)) \vee (x_1 \wedge f(1, x_2, x_3, \dots, x_m)) \quad (1)$$

又

$$\begin{aligned} f(0, x_2, x_3, \dots, x_m) &= (\neg x_2 \wedge f(0, 0, x_3, \dots, x_m)) \vee (x_2 \wedge f(0, 1, x_3, \dots, x_m)), \\ f(1, x_2, x_3, \dots, x_m) &= (\neg x_2 \wedge f(1, 0, x_3, \dots, x_m)) \vee (x_2 \wedge f(1, 1, x_3, \dots, x_m)). \end{aligned}$$

代入公式(1),整理得到:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \vee \{x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge f(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \dots, x_m) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \{0, 1\}^2\}. \quad \square$$

更一般地,由 Shannon 展开式及其推广形式可以得到 Boole 函数的析取范式.

推论 1. 设 $f(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 Boole 函数,约定 $x_k^0 = \neg x_k, x_k^1 = x_k (k=1, 2, \dots, m)$, 则

$$f(x_1, \dots, x_m) = \vee \{x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\alpha_m} \wedge f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \{0, 1\}^m\} = \vee \{x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\alpha_m} : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in f^{-1}(1)\}.$$

注 3:若 $f^{-1}(1) = \emptyset$, 即 $f(x_1, \dots, x_m) = 0$, 这时可令 $f(x_1, \dots, x_m) = x_1 \wedge \neg x_1$.

下面,我们再给出 Shannon 展开式的对偶形式及其推广.

命题 3. 设 $f(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 Boole 函数,约定 $x_k^0 = x_k, x_k^1 = \neg x_k (k=1, 2)$, 则,

- (i) $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1 \vee f(0, x_2, \dots, x_m)) \wedge (\neg x_1 \vee f(1, x_2, \dots, x_m))$;
- (ii) $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \wedge \{x_1^{\beta_1} \vee x_2^{\beta_2} \vee f(\beta_1, \beta_2, x_3, \dots, x_m) : (\beta_1, \beta_2) \in \{0, 1\}^2\}.$

证明:

(i) 当 $x_1=0$ 时

$$\begin{aligned} (x_1 \vee f(0, x_2, \dots, x_m)) \wedge (\neg x_1 \vee f(1, x_2, \dots, x_m)) &= (0 \vee f(0, x_2, \dots, x_m)) \wedge (1 \vee f(1, x_2, \dots, x_m)) \\ &= f(0, x_2, \dots, x_m) \wedge 1 \\ &= f(0, x_2, \dots, x_m) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

当 $x_1=1$ 时

$$\begin{aligned} (x_1 \vee f(0, x_2, \dots, x_m)) \wedge (\neg x_1 \vee f(1, x_2, \dots, x_m)) &= (1 \vee f(0, x_2, \dots, x_m)) \wedge (0 \vee f(1, x_2, \dots, x_m)) \\ &= 1 \wedge f(1, x_2, \dots, x_m) \\ &= f(1, x_2, \dots, x_m) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

(ii) 由情形(i)可得

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = (x_1 \vee f(0, x_2, x_3, \dots, x_m)) \wedge (\neg x_1 \vee f(1, x_2, x_3, \dots, x_m)) \quad (2)$$

又

$$\begin{aligned} f(0, x_2, x_3, \dots, x_m) &= (x_2 \vee f(0, 0, x_3, \dots, x_m)) \wedge (\neg x_2 \vee f(0, 1, x_3, \dots, x_m)), \\ f(1, x_2, x_3, \dots, x_m) &= (x_2 \vee f(1, 0, x_3, \dots, x_m)) \wedge (\neg x_2 \vee f(1, 1, x_3, \dots, x_m)). \end{aligned}$$

代入公式(2),整理可得:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \wedge \{x_1^{\beta_1} \vee x_2^{\beta_2} \vee f(\beta_1, \beta_2, x_3, \dots, x_m) : (\beta_1, \beta_2) \in \{0, 1\}^2\}. \quad \square$$

由命题 3 可以得到 Boole 函数的合取范式.

推论 2. 设 $f(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 Boole 函数,约定 $x_k^0 = x_k, x_k^1 = \neg x_k (k=1, 2, \dots, m)$, 则

$$f(x_1, \dots, x_m) = \wedge \{x_1^{\beta_1} \vee \dots \vee x_m^{\beta_m} \vee f(\beta_1, \dots, \beta_m) : (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \{0, 1\}^m\} = \wedge \{x_1^{\beta_1} \vee \dots \vee x_m^{\beta_m} : (\beta_1, \dots, \beta_m) \in f^{-1}(0)\}.$$

注 4:若 $f^{-1}(0) = \emptyset$, 即 $f(x_1, \dots, x_m) = 1$, 这时可令 $f(x_1, \dots, x_m) = x_1 \vee \neg x_1$.

定理 1^[12]. 每个公式都逻辑等价于一个析取范式(或合取范式).

注 5:文献[12]给出了定理 1 的构造性证明,下面根据 Shannon 展开式及其推广形式给出另外一种证明方法.

证明:仅证析取范式的情形(合取范式的情形是类似的).

$\forall A \in F(S)$,不妨设 A 中含有 m 个原子命题 p_1, \dots, p_m , 则 A 导出一个 m 元 Boole 函数 $\bar{A}(x_1, \dots, x_m)$.

- 若 A 不是矛盾式,则 $\bar{A}^{-1}(1) \neq \emptyset$.由推论 1 可知,约定 $x_k^0 = \neg x_k, x_k^1 = x_k (k=1, 2, \dots, m)$, 则

$$\bar{A}(x_1, \dots, x_m) = \vee \{x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\alpha_m} : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \bar{A}^{-1}(1)\}.$$

这时,约定 $p_k^0 = \neg p_k, p_k^1 = p_k (k=1, 2, \dots, m)$, 令 $B = \vee \{p_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge p_m^{\alpha_m} : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \bar{A}^{-1}(1)\}$, 则 B 导出的 m 元 Boole 函数 $\bar{B}(x_1, \dots, x_m) = \bar{A}(x_1, \dots, x_m)$. 所以 $A \approx B$, 且 B 是析取范式.

- 若 A 是矛盾式,则 $\bar{A}(x_1, \dots, x_m) = 0$.由注 3 可知,可令 $\bar{A}(x_1, \dots, x_m) = x_1 \wedge \neg x_1$.

这时,令公式 $B = p_1 \wedge \neg p_1$, 则 $\bar{B}(x_1) = \bar{A}(x_1, \dots, x_m)$. 所以 $A \approx B$, 且 B 是简单合取式,可看作析取范式. □

定理 2. 在二值命题逻辑系统 L 中, m 元公式的逻辑等价类共 2^{2^m} 个.

证明:任意 m 元 Boole 函数均可由某个 m 元公式导出,且任意 m 元公式导出的函数均为 m 元 Boole 函数. 而 Boole 函数共 2^{2^m} 个. 又因逻辑等价公式导出的 Boole 函数是相等的,故 m 元公式的逻辑等价类共 2^{2^m} 个. \square

2 n 值 McNaughton 函数的范式表示

本文用 $L(n)$ 表示集合 $\left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, 用 $h_0(x)$ 表示函数 $\neg(\neg x \rightarrow x)$, 用 $h_{\frac{1}{2}}(x)$ 表示函数 $(x \rightarrow \neg x) \wedge (\neg x \rightarrow x)$, 用 $h_1(x)$ 表示函数 $\neg(x \rightarrow \neg x)$.

2.1 n 值 Łukasiewicz 逻辑系统 L_n

定义 8^[12]. 设 $S = \{p_1, p_2, \dots\}$, $F(S)$ 是由 S 生成的 (\neg, \rightarrow) 型自由代数, 称 $F(S)$ 中的元为系统 L_n 中的公式(或命题), 称 S 中的元为系统 L_n 中的原子公式(或原子命题).

注 6:与经典逻辑系统不同,在 L_n 中, $A \vee B$ 不再是 $\neg A \rightarrow B$ 的简写,而是 $(A \rightarrow B) \rightarrow B$ 的简写, $A \wedge B$ 表示 $\neg(\neg A \vee \neg B)$.

定义 9^[12]. 设 $v: F(S) \rightarrow L(n)$ 是映射, 这里, $L(n)$ 是 n 值 MV 代数, 若 v 是 (\neg, \rightarrow) 型同态, 即

$$v(\neg A) = \neg v(A), v(A \rightarrow B) = v(A) \rightarrow v(B) = \min\{1 - v(A) + v(B), 1\},$$

则称 v 为 $F(S)$ 在 n 值 MV 代数 $L(n)$ 中的赋值, 简称 v 为赋值. $F(S)$ 中全体赋值之集记作 $\Omega(L_n)$.

在 L_n 中, 重言式、矛盾式以及逻辑等价的定义与经典逻辑系统 L 中的定义是一致的, 这里不再赘述.

定义 10^[12]. 设 $A(p_1, \dots, p_m)$ 是含有 m 个命题变元的合式公式, 它由 p_1, \dots, p_m 通过逻辑连接词 \neg, \rightarrow, \vee 与 \wedge 连接而成. 设 $(x_1, \dots, x_m) \in (L(n))^m$, 分别用 x_1, \dots, x_m 取代 $A(p_1, \dots, p_m)$ 中的 p_1, \dots, p_m , 并按 $\neg x = 1 - x, x \rightarrow y = (1 - x + y) \wedge 1, x \vee y = \max\{x, y\}, x \wedge y = \min\{x, y\}, (x, y \in L(n))$ 理解 \neg, \rightarrow, \vee 与 \wedge , 则得 m 元函数, 记作 $\bar{A}(x_1, \dots, x_m)$, 叫作公式 A 导出的函数.

定义 11^[13]. 若函数 $g: (L(n))^m \rightarrow L(n)$ 可由 L_n 中的某个 m 元逻辑公式导出, 则称 $g(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 n 值 McNaughton 函数 ($m \in N$).

例 1: 设 $\bar{g}: (L(n))^m \rightarrow L(n)$ 为 m 元 n 值函数, 则常值映射 $\bar{g}(x_1, \dots, x_m) \equiv \frac{1}{2}$ 不能由合式公式导出.

证明: 任给 m 元合式公式 $A(p_1, \dots, p_m)$, 设 $\bar{A}(x_1, \dots, x_m)$ 为公式 A 导出的 n 值函数. 当 p_1, \dots, p_m 全部赋值为 0 时, 作用连接词 \neg, \rightarrow, \vee 与 \wedge 只能得到 0 或 1, 不可能为 $\frac{1}{2}$. 即, $\bar{A}(0, \dots, 0) \neq \frac{1}{2}$. 而 $\bar{g}(x_1, \dots, x_m)$ 恒等于 $\frac{1}{2}$, 故 $\bar{g}(x_1, \dots, x_m) \equiv \frac{1}{2}$ 不能由合式公式导出. \square

注 7: 在经典逻辑系统中, 每一个 m 元 Boole 函数 $f: \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}$ 都可由某合式公式导出; 然而在 n 值逻辑系统中, 每一个 m 元 n 值函数 \bar{g} 却不一定由某个合式公式导出. 因此在 n 值逻辑系统中, 由 m 元公式导出的 m 元 n 值函数的形式要比 m 元 Boole 函数复杂很多. 下面, 我们将 Shannon 展开式的技巧进行推广来解决这一问题. 首先研究 3 值 McNaughton 函数的范式表示.

2.2 3 值 McNaughton 函数的范式表示

在 3 值 Łukasiewicz 逻辑系统 L_3 中, 公式的赋值域为 $L(3) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. $\forall x, y \in L(3), L_3$ 中的真值表如下所示:

x	$\neg x$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

$x \vee y$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$x \wedge y$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

$x \rightarrow y$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$\neg x$

$x \rightarrow y$

$x \vee y$

$x \wedge y$

而且, $h_0(x) = \neg(\neg x \rightarrow x)$, $h_{\frac{1}{2}}(x) = (x \rightarrow \neg x) \wedge (\neg x \rightarrow x)$, $h_1(x) = \neg(x \rightarrow \neg x)$ 的真值表如下所示:

x	$h_0(x)$
0	1
$\frac{1}{2}$	0
1	0

x	$h_{\frac{1}{2}}(x)$
0	0
$\frac{1}{2}$	1
1	0

x	$h_1(x)$
0	0
$\frac{1}{2}$	0
1	1

下面,依据 Shannon 展开式的技巧以及 $h_0(x)$, $h_{\frac{1}{2}}(x)$, $h_1(x)$ 的特点,我们给出 m 元 3 值 McNaughton 函数的展开式及准析(合)取范式.

命题 4. 设 $g(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 3 值 McNaughton 函数,则

$$g(x_1, \dots, x_m) = (h_0(x_1) \wedge g(0, x_2, \dots, x_m)) \vee \left(h_{\frac{1}{2}}(x_1) \wedge g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \vee (h_1(x_1) \wedge g(1, x_2, \dots, x_m)).$$

证明:

• 当 $x_1=0$ 时

$$\begin{aligned} & (h_0(x_1) \wedge g(0, x_2, \dots, x_m)) \vee \left(h_{\frac{1}{2}}(x_1) \wedge g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \vee (h_1(x_1) \wedge g(1, x_2, \dots, x_m)) = \\ & (1 \wedge g(0, x_2, \dots, x_m)) \vee \left(0 \wedge g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \vee (0 \wedge g(1, x_2, \dots, x_m)) = \\ & g(0, x_2, \dots, x_m) \vee 0 \vee 0 = g(0, x_2, \dots, x_m) = g(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

• 当 $x_1=\frac{1}{2}$ 时

$$\begin{aligned} & (h_0(x_1) \wedge g(0, x_2, \dots, x_m)) \vee \left(h_{\frac{1}{2}}(x_1) \wedge g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \vee (h_1(x_1) \wedge g(1, x_2, \dots, x_m)) = \\ & (0 \wedge g(0, x_2, \dots, x_m)) \vee \left(1 \wedge g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \vee (0 \wedge g(1, x_2, \dots, x_m)) = \\ & 0 \vee g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) \vee 0 = g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) = g(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

• 当 $x_1=1$ 时

$$\begin{aligned} & (h_0(x_1) \wedge g(0, x_2, \dots, x_m)) \vee \left(h_{\frac{1}{2}}(x_1) \wedge g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \vee (h_1(x_1) \wedge g(1, x_2, \dots, x_m)) = \\ & (0 \wedge g(0, x_2, \dots, x_m)) \vee \left(0 \wedge g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \vee (1 \wedge g(1, x_2, \dots, x_m)) = \\ & 0 \vee 0 \vee g(1, x_2, \dots, x_m) = g(1, x_2, \dots, x_m) = g(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

□

命题 5. 设 $g(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 3 值 McNaughton 函数,约定 $x_k^0 = h_0(x_k)$, $x_k^{\frac{1}{2}} = h_{\frac{1}{2}}(x_k)$, $x_k^1 = h_1(x_k)$ ($k=1,2$),则

$$g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \vee \left\{ x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge g(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \dots, x_m) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}^2 \right\}.$$

证明:由命题 4 可知:

$$g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \vee \left\{ x_1^{\alpha_1} \wedge g(\alpha_1, x_2, x_3, \dots, x_m) : \alpha_1 \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\} \right\} \quad (3)$$

又 $g(\alpha_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \vee \left\{ x_2^{\alpha_2} \wedge g(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \dots, x_m) : \alpha_2 \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\} \right\}$, $\alpha_1 = 0, \frac{1}{2}, 1$, 代入公式(3),整理可得:

$$g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \vee \left\{ x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge g(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \dots, x_m) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}^2 \right\}. \quad \square$$

推论 3. 设 $g(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 3 值 McNaughton 函数, 约定 $x_k^0 = h_0(x_k), x_k^{\frac{1}{2}} = h_{\frac{1}{2}}(x_k), x_k^1 = h_1(x_k) (k=1, 2, \dots, m)$, 则

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_m) &= \vee \left\{ x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\alpha_m} \wedge g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}^m \right\} \\ &= (\vee \{ x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\alpha_m} : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in g^{-1}(1) \}) \vee \left(\vee \left\{ x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\alpha_m} \wedge \frac{1}{2} : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \right). \end{aligned}$$

注 8:

(i) 称 $(\vee \{ x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\alpha_m} : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in g^{-1}(1) \}) \vee \left(\vee \left\{ x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\alpha_m} \wedge \frac{1}{2} : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \right)$ 为 m 元 3 值 McNaughton 函数的准析取范式. 注意: 在析取范式中, $x_i^{\alpha_i} (i=1, 2, \dots, m)$ 取 x_i 或 $\neg x_i$; 而在准析取范式中, $x_i^{\alpha_i}$ 是 x_i 通过 $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge$ 运算得到的 1 元函数;

(ii) 若 $g^{-1}(1) = g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \emptyset$, 即 $g(x_1, \dots, x_m) = 0$, 这时可令 $g(x_1, \dots, x_m) = x_1^0 \wedge x_1^1$, 即

$$g(x_1, \dots, x_m) = \neg(\neg x_1 \rightarrow x_1) \wedge \neg(x_1 \rightarrow \neg x_1).$$

而 $\neg(\neg x_1 \rightarrow x_1) \wedge \neg(x_1 \rightarrow \neg x_1)$ 是 x_1 的 1 元函数, 可看作简单准析(合)取式;

(iii) 若 $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \neq \emptyset$, 则 x_1, \dots, x_m 中至少有一个取值 $\frac{1}{2}$, 则 $g(x_1, \dots, x_m)$ 可表示为

$$(\vee \{ x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\alpha_m} : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in g^{-1}(1) \}) \vee \left(\vee \left\{ (x_1^{\alpha_1} \wedge (x_1 \vee \neg x_1)) \wedge \dots \wedge (x_m^{\alpha_m} \wedge (x_m \vee \neg x_m)) : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \right).$$

下面给出命题 4 的对偶形式.

命题 6. 设 $g(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 3 值 McNaughton 函数, 则

$$g(x_1, \dots, x_m) = (\neg h_0(x_1) \vee g(0, x_2, \dots, x_m)) \wedge \left(\neg h_{\frac{1}{2}}(x_1) \vee g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \wedge (\neg h_1(x_1) \wedge g(1, x_2, \dots, x_m)).$$

证明:

• 当 $x_1=0$ 时

$$\begin{aligned} &(\neg h_0(x_1) \vee g(0, x_2, \dots, x_m)) \wedge \left(\neg h_{\frac{1}{2}}(x_1) \vee g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \wedge (\neg h_1(x_1) \vee g(1, x_2, \dots, x_m)) = \\ &(0 \vee g(0, x_2, \dots, x_m)) \wedge \left(1 \vee g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \wedge (1 \vee g(1, x_2, \dots, x_m)) = \\ &g(0, x_2, \dots, x_m) \wedge 1 \wedge 1 = g(0, x_2, \dots, x_m) = g(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

• 当 $x_1=\frac{1}{2}$ 时

$$\begin{aligned} &(\neg h_0(x_1) \vee g(0, x_2, \dots, x_m)) \wedge \left(\neg h_{\frac{1}{2}}(x_1) \vee g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \wedge (\neg h_1(x_1) \vee g(1, x_2, \dots, x_m)) = \\ &(1 \vee g(0, x_2, \dots, x_m)) \wedge \left(0 \vee g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \wedge (1 \vee g(1, x_2, \dots, x_m)) = \\ &1 \wedge g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) \wedge 1 = g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) = g(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

• 当 $x_1=1$ 时

$$\begin{aligned} & (\neg h_0(x_1) \vee g(0, x_2, \dots, x_m)) \wedge \left(\neg h_{\frac{1}{2}}(x_1) \vee g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \wedge (\neg h_1(x_1) \vee g(1, x_2, \dots, x_m)) = \\ & (1 \vee g(0, x_2, \dots, x_m)) \wedge \left(1 \vee g\left(\frac{1}{2}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \wedge (0 \vee g(1, x_2, \dots, x_m)) = \\ & 1 \wedge 1 \wedge g(1, x_2, \dots, x_m) = g(1, x_2, \dots, x_m) = g(x_1, x_2, \dots, x_m). \quad \square \end{aligned}$$

命题 7. 设 $g(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 3 值 McNaughton 函数, 约定 $x_k^0 = \neg h_0(x_k), x_k^{\frac{1}{2}} = \neg h_{\frac{1}{2}}(x_k), x_k^1 = \neg h_1(x_k) (k=1, 2)$, 则

$$g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \wedge \left\{ x_1^{\beta_1} \vee x_2^{\beta_2} \vee g(\beta_1, \beta_2, x_3, \dots, x_m) : (\beta_1, \beta_2) \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}^2 \right\}.$$

证明: 由命题 6 可知:

$$g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \wedge \left\{ x_1^{\beta_1} \vee g(\beta_1, x_2, x_3, \dots, x_m) : \beta_1 \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\} \right\} \quad (4)$$

又 $g(\beta_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \wedge \left\{ x_2^{\beta_2} \vee g(\beta_1, \beta_2, x_3, \dots, x_m) : \beta_2 \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\} \right\}, \beta_1 = 0, \frac{1}{2}, 1$, 代入公式(4), 整理可得:

$$g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \wedge \left\{ x_1^{\beta_1} \vee x_2^{\beta_2} \vee g(\beta_1, \beta_2, x_3, \dots, x_m) : (\beta_1, \beta_2) \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}^2 \right\}. \quad \square$$

推论 4. 设 $g(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 3 值 McNaughton 函数, 约定 $x_k^0 = \neg h_0(x_k), x_k^{\frac{1}{2}} = \neg h_{\frac{1}{2}}(x_k), x_k^1 = \neg h_1(x_k) (k=1, 2, \dots, m)$, 则有

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_m) &= \wedge \left\{ x_1^{\beta_1} \vee \dots \vee x_m^{\beta_m} \vee g(\beta_1, \dots, \beta_m) : (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}^m \right\} \\ &= (\wedge \{ x_1^{\beta_1} \vee \dots \vee x_m^{\beta_m} : (\beta_1, \dots, \beta_m) \in g^{-1}(0) \}) \wedge \left(\wedge \left\{ x_1^{\beta_1} \vee \dots \vee x_m^{\beta_m} \vee \frac{1}{2} : (\beta_1, \dots, \beta_m) \in g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \right). \end{aligned}$$

注 9:

(i) 称 $(\wedge \{ x_1^{\beta_1} \vee \dots \vee x_m^{\beta_m} : (\beta_1, \dots, \beta_m) \in g^{-1}(0) \}) \wedge \left(\wedge \left\{ x_1^{\beta_1} \vee \dots \vee x_m^{\beta_m} \vee \frac{1}{2} : (\beta_1, \dots, \beta_m) \in g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \right)$ 为 m 元 3 值 McNaughton 函数的准合取范式. 注意: 在合取范式中, $x_i^{\alpha_i} (i=1, 2, \dots, m)$ 取 x_i 或 $\neg x_i$; 而在准合取范式中, $x_i^{\alpha_i}$ 是 x_i 通过 $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge$ 运算得到的一元函数;

(ii) 若 $g^{-1}(0) = g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \emptyset$, 即 $g(x_1, \dots, x_m) = 1$, 这时可令 $g(x_1, \dots, x_m) = x_1^0 \vee x_1^1$, 即

$$g(x_1, \dots, x_m) = (\neg x_1 \rightarrow x_1) \vee (x_1 \rightarrow \neg x_1).$$

而 $(\neg x_1 \rightarrow x_1) \vee (x_1 \rightarrow \neg x_1)$ 是 x_1 的一元函数, 可看作简单准析(合)取式;

(iii) 若 $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \neq \emptyset$, 则 x_1, \dots, x_m 中至少有一个取值 $\frac{1}{2}$, 则 $g(x_1, \dots, x_m)$ 可表示为

$$(\wedge \{ x_1^{\beta_1} \vee \dots \vee x_m^{\beta_m} : (\beta_1, \dots, \beta_m) \in g^{-1}(0) \}) \wedge \left(\wedge \left\{ (x_1^{\beta_1} \vee (x_1 \wedge \neg x_1)) \vee \dots \vee (x_m^{\beta_m} \vee (x_m \wedge \neg x_m)) : (\beta_1, \dots, \beta_m) \in g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \right).$$

2.3 n 值 McNaughton 函数的展开式及其范式表示

现在, 我们研究 n 值 McNaughton 函数. 这时, McNaughton 函数的值域为 $L(n) = \left\{ 0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\}$. 为了给出 n 值 McNaughton 函数的展开式, 我们先给下面的引理.

引理 1. 在 n 值 Łukasiewicz 逻辑系统 L_n 中, $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-2, n-1\}$, 均存在一元逻辑公式 $A_k(p)$, 使得 $A_k(p)$

导出的一元函数 $\overline{A_k}(x)$, 满足: $\overline{A_k}(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{k}{n-1} \\ 0, & x \neq \frac{k}{n-1} \end{cases}, x \in L(n)$.

证明:

(i) 当 $k=0$ 时, 令

$$B_{01}(p) = \neg p \rightarrow p, B_{02}(p) = \neg B_{01}(p) \rightarrow B_{01}(p), \dots, B_{0([\log_2(n-1)]+1)}(p) = \neg B_{0([\log_2(n-1)])}(p) \rightarrow B_{0([\log_2(n-1)])}(p).$$

这里, $[\log_2(n-1)]$ 表示 $\log_2(n-1)$ 取整数部分, 则有

$$\overline{B_{01}}(x) = \neg x \rightarrow x, \overline{B_{02}}(x) = \neg \overline{B_{01}}(x) \rightarrow \overline{B_{01}}(x), \dots, \overline{B_{0([\log_2(n-1)]+1)}}(x) = \neg \overline{B_{0([\log_2(n-1)])}}(x) \rightarrow \overline{B_{0([\log_2(n-1)])}}(x).$$

因为 $\neg x = 1 - x, x \rightarrow y = (1 - x + y) \wedge 1$, 所以,

$$\overline{B_{01}}(x) = 2x \wedge 1, \overline{B_{02}}(x) = 2\overline{B_{01}}(x) \wedge 1, \dots, \overline{B_{0([\log_2(n-1)]+1)}}(x) = 2\overline{B_{0([\log_2(n-1)])}}(x) \wedge 1.$$

- 代入 $x=0$ 得: $\overline{B_{01}}(0) = 0, \overline{B_{02}}(0) = 0, \dots, \overline{B_{0([\log_2(n-1)]+1)}}(0) = 0$;
- 代入 $x = \frac{1}{n-1}$ 得: $\overline{B_{01}}\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{2}{n-1} \wedge 1, \overline{B_{02}}\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{4}{n-1} \wedge 1, \dots, \overline{B_{0([\log_2(n-1)]+1)}}\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{2^{[\log_2(n-1)]+1}}{n-1} \wedge 1 = 1$;
- 代入 $x = \frac{2}{n-1}$ 得: $\overline{B_{01}}\left(\frac{2}{n-1}\right) = \frac{4}{n-1} \wedge 1, \overline{B_{02}}\left(\frac{2}{n-1}\right) = \frac{8}{n-1} \wedge 1, \dots, \overline{B_{0([\log_2(n-1)]+1)}}\left(\frac{2}{n-1}\right) = \frac{2^{[\log_2(n-1)]+2}}{n-1} \wedge 1 = 1$;
- ...;
- 代入 $x = \frac{n-2}{n-1}$, 可得:

$$\overline{B_{01}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right) = \frac{(n-2) \times 2}{n-1} \wedge 1, \overline{B_{02}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right) = \frac{(n-2) \times 4}{n-1} \wedge 1, \dots, \overline{B_{0([\log_2(n-1)]+1)}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right) = \frac{(n-2) \times 2^{[\log_2(n-1)]+1}}{n-1} \wedge 1 = 1.$$

- 代入 $x=1$ 得: $\overline{B_{01}}(1) = 1, \overline{B_{02}}(1) = 1, \dots, \overline{B_{0([\log_2(n-1)]+1)}}(1) = 1$.

这时令 $A_0(p) = \neg B_{0([\log_2(n-1)]+1)}(p)$, 则有 $\overline{A_k}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, x \in L(n)$.

(ii) 当 $k=n-1$ 时, 令 $B_{n-1}(p) = \neg p$, 则 $\overline{B_{n-1}}\left(\frac{i}{n-1}\right) = 1 - \frac{i}{n-1} (i = 0, 1, 2, \dots, n-2, n-1)$, 即

$$\overline{B_{n-1}}(1) = 0, \overline{B_{n-1}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}, \overline{B_{n-1}}\left(\frac{n-3}{n-1}\right) = \frac{2}{n-1}, \dots, \overline{B_{n-1}}\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{n-2}{n-1}, \overline{B_{n-1}}(0) = 1.$$

这时, 可采用情形(i)的做法, 令

$$\begin{aligned} B_{(n-1)1}(p) &= \neg B_{n-1}(p) \rightarrow B_{n-1}(p), \\ B_{(n-1)2}(p) &= \neg B_{(n-1)1}(p) \rightarrow B_{(n-1)1}(p), \\ &\dots, \\ B_{(n-1)([\log_2(n-1)]+1)}(p) &= \neg B_{(n-1)([\log_2(n-1)])}(p) \rightarrow B_{(n-1)([\log_2(n-1)])}(p), \\ A_{n-1}(p) &= \neg B_{(n-1)([\log_2(n-1)]+1)}(p), \end{aligned}$$

则有 $\overline{A_k}(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \neq 1 \end{cases}, x \in L(n)$.

(iii) 若 n 为奇数, 则 $\frac{n-1}{2}$ 为整数. 当 $k = \frac{n-1}{2}$ 时, 令 $B_{\frac{n-1}{2}}(p) = \neg((p \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow p))$, 则有

$$\overline{B_{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{i}{n-1}\right) = \frac{2i - (n-1)}{n-1} \vee \frac{(n-1) - 2i}{n-1}, i = 0, 1, 2, \dots, n-2, n-1.$$

即

$$\begin{aligned} \overline{B_{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{1}{2}\right) &= 0, \overline{B_{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{2}{n-1}, \dots, \overline{B_{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{2}{n-1}\right) = \frac{n-5}{n-1}, \overline{B_{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{n-3}{n-1}, \\ \overline{B_{\frac{n-1}{2}}}(0) &= 1, \overline{B_{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{2}{n-1}, \dots, \overline{B_{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right) = \frac{n-3}{n-1}, \overline{B_{\frac{n-1}{2}}}(1) = 1. \end{aligned}$$

这时,可采用情形(i)的做法,令

$$\begin{aligned} B_{\frac{n-1}{2}}(p) &= \neg B_{\frac{n-1}{2}}(p) \rightarrow B_{\frac{n-1}{2}}(p), \\ B_{\frac{n-1}{2}}(p) &= \neg B_{\frac{n-1}{2}}(p) \rightarrow B_{\frac{n-1}{2}}(p), \\ &\dots \\ B_{\frac{n-1}{2}(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}(p) &= \neg B_{\frac{n-1}{2}(\lceil \log_2(n-1) \rceil)}(p) \rightarrow B_{\frac{n-1}{2}(\lceil \log_2(n-1) \rceil)}(p), \\ A_{\frac{n-1}{2}}(p) &= \neg B_{\frac{n-1}{2}(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}(p), \end{aligned}$$

$$\text{则有 } \overline{A_k}(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{2} \\ 0, & x \neq \frac{1}{2} \end{cases}, x \in L(n).$$

(iv) 当 $0 < k < \frac{n-1}{2}$ 时,令 $C_{k1}(p) = \neg p \rightarrow p$, 则 $\overline{C_{k1}}(x) = \neg x \rightarrow x$, 所以 $\overline{C_{k1}}\left(\frac{i}{n-1}\right) = \frac{2i}{n-1} \wedge 1$ ($i=0, 1, 2, \dots, n-2, n-1$). 当 $\frac{i}{n-1} \geq \frac{1}{2}$ 时, $\overline{C_{k1}}\left(\frac{i}{n-1}\right) = 1$. 注意, $\overline{C_{k1}}(0), \overline{C_{k1}}\left(\frac{1}{n-1}\right), \overline{C_{k1}}\left(\frac{2}{n-1}\right), \dots, \overline{C_{k1}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right), \overline{C_{k1}}(1)$ 中非 0, 1 且相邻的两个数的差为 $\frac{2}{n-1}$.

若 $\overline{C_{k1}}\left(\frac{k}{n-1}\right) = \frac{2k}{n-1} = \frac{1}{2}$, 则采用情形(iii)的做法, 令 $B_k(p) = \neg((C_{k1}(p) \rightarrow \neg C_{k1}(p)) \wedge (\neg C_{k1}(p) \rightarrow C_{k1}(p)))$, 则有

$$\begin{aligned} \overline{B_k}\left(\frac{k}{n-1}\right) &= 0, \overline{B_k}(0) = 1, \overline{B_k}\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{n-5}{n-1}, \overline{B_k}\left(\frac{2}{n-1}\right) = \frac{n-9}{n-1}, \dots, \overline{B_k}\left(\frac{k-1}{n-1}\right) = \frac{4}{n-1}, \\ \overline{B_k}\left(\frac{k+1}{n-1}\right) &= \frac{4}{n-1}, \dots, \overline{B_k}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{n-5}{n-1}, \overline{B_k}\left(\frac{1}{2}\right) = \dots = \overline{B_k}\left(\frac{n-2}{n-1}\right) = \overline{B_k}(1) = 1. \end{aligned}$$

这时,令

$$\begin{aligned} B_{k1}(p) &= \neg B_k(p) \rightarrow B_k(p), \\ B_{k2}(p) &= \neg B_{k1}(p) \rightarrow B_{k1}(p), \\ &\dots \\ B_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}(p) &= \neg B_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil)}(p) \rightarrow B_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil)}(p), \\ A_k(p) &= \neg B_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}(p), \end{aligned}$$

$$\text{则有 } \overline{A_k}(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{k}{n-1} \\ 0, & x \neq \frac{k}{n-1} \end{cases}, x \in L(n).$$

若 $\overline{C_{k1}}\left(\frac{k}{n-1}\right) = \frac{2k}{n-1} \neq \frac{1}{2}$, 令 $D_{k1}(p) = \begin{cases} \neg C_{k1}(p), & \overline{C_{k1}}\left(\frac{k}{n-1}\right) > \frac{1}{2} \\ C_{k1}(p), & \overline{C_{k1}}\left(\frac{k}{n-1}\right) < \frac{1}{2} \end{cases}$, 则有 $\overline{D_{k1}}\left(\frac{k}{n-1}\right) < \frac{1}{2}$.

再令 $C_{k2}(p) = \neg D_{k1}(p) \rightarrow D_{k1}(p)$, 即 $\overline{C_{k2}}(x) = 2\overline{D_{k1}}(x) \wedge 1$, 则 $\overline{C_{k2}}(0), \overline{C_{k2}}\left(\frac{1}{n-1}\right), \overline{C_{k2}}\left(\frac{2}{n-1}\right), \dots, \overline{C_{k2}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right), \overline{C_{k2}}(1)$ 中

非 0,1 且相邻的两个数的差为 $\frac{4}{n-1}$. 这时, $\overline{C_{k2}}\left(\frac{k}{n-1}\right) = \frac{4k}{n-1} \wedge \left(1 - \frac{4k}{n-1}\right)$.

若 $\overline{C_{k2}}\left(\frac{k}{n-1}\right) = \frac{1}{2}$, 则采用情形(iii)的做法可得满足要求的 $\overline{A_k}(x)$;

若 $\overline{C_{k2}}\left(\frac{k}{n-1}\right) \neq \frac{1}{2}$, 令 $D_{k2}(p) = \begin{cases} -C_{k2}(p), & \overline{C_{k2}}\left(\frac{k}{n-1}\right) > \frac{1}{2} \\ C_{k2}(p), & \overline{C_{k2}}\left(\frac{k}{n-1}\right) < \frac{1}{2} \end{cases}$, 则 $\overline{D_{k2}}\left(\frac{k}{n-1}\right) < \frac{1}{2}$.

再令 $C_{k3}(p) = \neg D_{k2}(p) \rightarrow D_{k2}(p)$, 即 $\overline{C_{k3}}(x) = 2\overline{D_{k2}}(x) \wedge 1$. 序行此法, 或得到满足要求的 $\overline{A_k}(x)$, 或得到一个函数列 $\overline{C_{k1}}(x), \overline{C_{k2}}(x), \overline{C_{k3}}(x), \dots, \overline{C_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}}(x)$, 满足 $\overline{C_{kj}}(0), \overline{C_{kj}}\left(\frac{1}{n-1}\right), \overline{C_{kj}}\left(\frac{2}{n-1}\right), \dots, \overline{C_{kj}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right), \overline{C_{kj}}(1)$ 中非 0,1 且相邻的两个数的差为 $\frac{2j}{n-1}$ 且 $\frac{1}{n-1} \leq \overline{C_{kj}}\left(\frac{k}{n-1}\right) \leq \frac{n-2}{n-1}$ ($j=1, 2, 3, \dots, \lceil \log_2(n-1) \rceil + 1$). 注意, $j = \lceil \log_2(n-1) \rceil + 1$ 时, $\frac{2j}{n-1} > 1$.

所以, $\overline{C_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}}(0), \overline{C_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}}\left(\frac{1}{n-1}\right), \overline{C_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}}\left(\frac{2}{n-1}\right), \dots, \overline{C_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right), \overline{C_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}}(1)$ 中只有 $\overline{C_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}}\left(\frac{k}{n-1}\right)$ 不为 0,1, 其余的全部为 0,1. 这时, 令

$$C(p) = (C_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}(p) \rightarrow \neg C_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}(p)) \wedge (\neg C_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}(p) \rightarrow C_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}(p)),$$

则有 $\overline{C}(x) = 0, x \neq \frac{k}{n-1}$.

而 $\overline{C}\left(\frac{k}{n-1}\right) = 2\overline{C_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}}\left(\frac{k}{n-1}\right) \wedge \left(1 - 2\overline{C_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}}\left(\frac{k}{n-1}\right)\right)$, 由 $\frac{1}{n-1} \leq \overline{C_{k(\lceil \log_2(n-1) \rceil + 1)}}\left(\frac{k}{n-1}\right) \leq \frac{n-2}{n-1}$ 可知, $\overline{C}\left(\frac{k}{n-1}\right) \geq \frac{2}{n-1}$.

再令 $C_1(p) = \neg C(p) \rightarrow C(p), C_2(p) = \neg C_1(p) \rightarrow C_1(p), \dots, C_{\lceil \log_2(n-1) \rceil}(p) = \neg C_{\lceil \log_2(n-1) \rceil - 1}(p) \rightarrow C_{\lceil \log_2(n-1) \rceil - 1}(p)$, 则 $\overline{C_1}(x) = 2\overline{C}(x) \wedge 1, \overline{C_2}(x) = 2\overline{C_1}(x) \wedge 1, \dots, \overline{C_{\lceil \log_2(n-1) \rceil}}(x) = 2\overline{C_{\lceil \log_2(n-1) \rceil - 1}}(x) \wedge 1$.

- 当 $x \neq \frac{k}{n-1}$ 时, $\overline{C_{\lceil \log_2(n-1) \rceil}}(x) = 0$;
- 当 $x = \frac{k}{n-1}$ 时, $\overline{C_{\lceil \log_2(n-1) \rceil}}\left(\frac{k}{n-1}\right) \geq \frac{2 \times 2^{\lceil \log_2(n-1) \rceil}}{n-1} \wedge 1 = 1$.

所以, $\overline{C_{\lceil \log_2(n-1) \rceil}}\left(\frac{k}{n-1}\right) = 1$. 记 $A_k(p) = C_{\lceil \log_2(n-1) \rceil}(p)$, 则 $\overline{A_k}(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{k}{n-1} \\ 0, & x \neq \frac{k}{n-1} \end{cases}, x \in L(n)$.

(v) 当 $\frac{n-1}{2} < k < n-1$ 时, 令 $E(p) = \neg p$, 则 $0 < \overline{E}\left(\frac{k}{n-1}\right) < \frac{1}{2}$, 这时可采用情形(iv)的做法, 令 $E_{k1}(p) = \neg E(p) \rightarrow E(p)$,

其余步骤类似, 则可得到满足要求的 $\overline{A_k}(x)$.

由情形(i)~情形(v)可知, $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-2, n-1\}$, 均存在一元逻辑公式 $A_k(p)$, 使得 $A_k(p)$ 导出的一元函数

$$\overline{A_k}(x) \text{ 满足: } \overline{A_k}(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{k}{n-1} \\ 0, & x \neq \frac{k}{n-1} \end{cases}, x \in L(n).$$

例 2: 设 $L(6) = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\}$, 构造一个一元逻辑公式 $A_k(p)$, 使得 $A_k(p)$ 导出的一元函数 $\overline{A_k}(x)$ 满足:

$$\overline{A}_k(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{k}{5} \\ 0, & x \neq \frac{k}{5} \end{cases}, x \in L(6), k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

解:

(i) 令 $B_{01}(p) = \neg p \rightarrow p, B_{02}(p) = \neg B_{01}(p) \rightarrow B_{01}(p), B_{03}(p) = \neg B_{02}(p) \rightarrow B_{02}(p)$, 则有

$$\overline{B}_{03}(0) = 0, \overline{B}_{03}\left(\frac{1}{5}\right) = \overline{B}_{03}\left(\frac{2}{5}\right) = \overline{B}_{03}\left(\frac{3}{5}\right) = \overline{B}_{03}\left(\frac{4}{5}\right) = \overline{B}_{03}(1) = 1.$$

再令 $A_0(p) = \neg B_{03}(p)$, 则 $A_0(p)$ 导出的 1 元函数 $\overline{A}_0(x)$ 满足: $\overline{A}_0(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, x \in L(6)$.

(ii) 令 $C_{11}(p) = \neg p \rightarrow p, C_{12}(p) = \neg C_{11}(p) \rightarrow C_{11}(p)$, 则 $\overline{C}_{12}(0) = 0, \overline{C}_{12}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}, \overline{C}_{12}\left(\frac{2}{5}\right) = \overline{C}_{12}\left(\frac{3}{5}\right) = \overline{C}_{12}\left(\frac{4}{5}\right) = \overline{C}_{12}(1) = 1$.

再令 $B(p) = (C_{12}(p) \rightarrow \neg C_{12}(p)) \wedge (\neg C_{12}(p) \rightarrow C_{12}(p))$, 则 $\overline{B}(0) = \overline{B}\left(\frac{2}{5}\right) = \overline{B}_{03}\left(\frac{3}{5}\right) = \overline{B}_{03}\left(\frac{4}{5}\right) = \overline{B}_{03}(1) = 0, \overline{B}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$.

这时, 令 $B_1(p) = \neg B(p) \rightarrow B(p), A_1(p) = \neg B_1(p) \rightarrow B_1(p)$, 则 $\overline{A}_1(0) = \overline{A}_1\left(\frac{2}{5}\right) = \overline{A}_1\left(\frac{3}{5}\right) = \overline{A}_1\left(\frac{4}{5}\right) = \overline{A}_1(1) = 0, \overline{A}_1\left(\frac{1}{5}\right) = 1$.

即, $A_1(p)$ 导出的 1 元函数 $\overline{A}_1(x)$ 满足: $\overline{A}_1(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{5} \\ 0, & x \neq \frac{1}{5} \end{cases}, x \in L(6)$.

(iii) 令 $C_{11}(p) = \neg p \rightarrow p$, 因为 $\overline{C}_{21}\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5} > \frac{1}{2}$, 所以, 令 $D_{21}(p) = \neg C_{21}(p), C_{22}(p) = \neg D_{21}(p) \rightarrow D_{21}(p)$, 则有

$$\overline{C}_{22}(0) = \overline{C}_{22}\left(\frac{1}{5}\right) = 1, \overline{C}_{22}\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}, \overline{C}_{22}\left(\frac{3}{5}\right) = \overline{C}_{22}\left(\frac{4}{5}\right) = \overline{C}_{22}(1) = 0.$$

这时, 令 $B(p) = (C_{22}(p) \rightarrow \neg C_{22}(p)) \wedge (\neg C_{22}(p) \rightarrow C_{22}(p))$, 则 $\overline{B}(0) = \overline{B}\left(\frac{1}{5}\right) = \overline{B}\left(\frac{3}{5}\right) = \overline{B}\left(\frac{4}{5}\right) = \overline{B}(1) = 0, \overline{B}\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

再令 $A_2(p) = \neg B(p) \rightarrow B(p)$, 则 $\overline{A}_2(0) = \overline{A}_2\left(\frac{1}{5}\right) = \overline{A}_2\left(\frac{3}{5}\right) = \overline{A}_2\left(\frac{4}{5}\right) = \overline{A}_2(1) = 0, \overline{A}_2\left(\frac{2}{5}\right) = 1$.

即, $A_2(p)$ 导出的 1 元函数 $\overline{A}_2(x)$ 满足: $\overline{A}_2(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{2}{5} \\ 0, & x \neq \frac{2}{5} \end{cases}, x \in L(6)$.

(iv) 令 $C_{31}(p) = \neg p \rightarrow p$, 因为 $\overline{C}_{31}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5} > \frac{1}{2}$ 所以, 令 $D_{31}(p) = \neg C_{31}(p), C_{32}(p) = \neg D_{31}(p) \rightarrow D_{31}(p)$, 则有

$$\overline{C}_{32}(1) = \overline{C}_{32}\left(\frac{4}{5}\right) = 1, \overline{C}_{32}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{2}{5}, \overline{C}_{32}\left(\frac{2}{5}\right) = \overline{C}_{32}\left(\frac{1}{5}\right) = \overline{C}_{32}(0) = 0.$$

这时, 令 $B(p) = (C_{32}(p) \rightarrow \neg C_{32}(p)) \wedge (\neg C_{32}(p) \rightarrow C_{32}(p))$, 则 $\overline{B}(0) = \overline{B}\left(\frac{1}{5}\right) = \overline{B}\left(\frac{2}{5}\right) = \overline{B}\left(\frac{4}{5}\right) = \overline{B}(1) = 0, \overline{B}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

再令 $A_3(p) = \neg B(p) \rightarrow B(p)$, 则 $\overline{A}_3(0) = \overline{A}_3\left(\frac{1}{5}\right) = \overline{A}_3\left(\frac{2}{5}\right) = \overline{A}_3\left(\frac{4}{5}\right) = \overline{A}_3(1) = 0, \overline{A}_3\left(\frac{3}{5}\right) = 1$.

即, $A_3(p)$ 导出的 1 元函数 $\overline{A}_3(x)$ 满足: $\overline{A}_3(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{3}{5} \\ 0, & x \neq \frac{3}{5} \end{cases}, x \in L(6)$.

(v) 令 $C_{41}(p)=\neg p \rightarrow p, C_{42}(p)=\neg C_{41}(p) \rightarrow C_{41}(p)$, 则 $\overline{C_{42}}(1) = 0, \overline{C_{12}}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}, \overline{C_{12}}\left(\frac{3}{5}\right) = \overline{C_{12}}\left(\frac{2}{5}\right) = \overline{C_{12}}\left(\frac{1}{5}\right) = \overline{C_{12}}(0) = 1$.

再令 $B(p)=(C_{42}(p) \rightarrow \neg C_{42}(p)) \wedge (\neg C_{42}(p) \rightarrow C_{42}(p))$, 则 $\overline{B}(0) = \overline{B}\left(\frac{1}{5}\right) = \overline{B_{03}}\left(\frac{2}{5}\right) = \overline{B_{03}}\left(\frac{3}{5}\right) = \overline{B_{03}}(1) = 0, \overline{B}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}$.

这时, 令 $B_4(p)=\neg B(p) \rightarrow B(p), A_4(p)=\neg B_4(p) \rightarrow B_4(p)$, 则 $\overline{A_4}(0) = \overline{A_4}\left(\frac{1}{5}\right) = \overline{A_4}\left(\frac{2}{5}\right) = \overline{A_4}\left(\frac{3}{5}\right) = \overline{A_4}(1) = 0, \overline{A_4}\left(\frac{4}{5}\right) = 1$.

即 $A_4(p)$ 导出的 1 元函数 $\overline{A_4}(x)$ 满足: $\overline{A_4}(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{4}{5} \\ 0, & x \neq \frac{4}{5} \end{cases}, x \in L(6)$.

(vi) 令 $B_{51}(p)=\neg p \rightarrow p, B_{52}(p)=\neg B_{51}(p) \rightarrow B_{51}(p), B_{53}(p)=\neg B_{52}(p) \rightarrow B_{52}(p)$, 则

$$\overline{B_{53}}(1) = 0, \overline{B_{53}}(0) = \overline{B_{53}}\left(\frac{1}{5}\right) = \overline{B_{53}}\left(\frac{2}{5}\right) = \overline{B_{53}}\left(\frac{3}{5}\right) = \overline{B_{53}}\left(\frac{4}{5}\right) = 1.$$

再令 $A_5(p)=\neg B_{53}(p)$, 则 $A_5(p)$ 导出的 1 元函数 $\overline{A_5}(x)$ 满足: $\overline{A_5}(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \neq 1 \end{cases}, x \in L(6)$.

注 10: 由引理 1 和例 2 知, 在 n 值 Łukasiewicz 逻辑系统 L_n 中, 我们可以构造出 1 元逻辑公式 $A_k(p)$, 使得 $A_k(p)$

导出的 1 元函数 $\overline{A_k}(x)$ 满足: $\overline{A_k}(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{k}{n-1} \\ 0, & x \neq \frac{k}{n-1} \end{cases}, x \in L(n)$. 这样, 依据 Shannon 展开式的技巧, 我们可以得出 m 元

n 值 McNaughton 函数的展开式及其准析(合)取范式.

命题 8. 设 $g(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 n 值 McNaughton 函数, $\overline{A_k}(x)$ 的定义同引理 1, 则有

$$g(x_1, x_2, \dots, x_m) = (\overline{A_0}(x) \wedge g(0, x_2, \dots, x_m)) \vee \left(\overline{A_1}(x) \wedge g\left(\frac{1}{n-1}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \vee \left(\overline{A_2}(x) \wedge g\left(\frac{2}{n-1}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \vee \dots \vee (\overline{A_{n-1}}(x) \wedge g(1, x_2, \dots, x_m)).$$

证明: $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-2, n-1\}$, 当 $x_1 = \frac{k}{n-1}$ 时,

$$\begin{aligned} & (\overline{A_0}(x) \wedge g(0, x_2, \dots, x_m)) \vee \left(\overline{A_1}(x) \wedge g\left(\frac{1}{n-1}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \vee \\ & \left(\overline{A_2}(x) \wedge g\left(\frac{2}{n-1}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \vee \dots \vee (\overline{A_{n-1}}(x) \wedge g(1, x_2, \dots, x_m)) = \\ & (0 \wedge g(0, x_2, \dots, x_m)) \vee \dots \vee \left(0 \wedge g\left(\frac{k-1}{n-1}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \vee \left(1 \wedge g\left(\frac{k}{n-1}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \vee \\ & \left(0 \wedge g\left(\frac{k+1}{n-1}, x_2, \dots, x_m\right) \right) \vee \dots \vee (0 \wedge g(1, x_2, \dots, x_m)) = g\left(\frac{k}{n-1}, x_2, \dots, x_m\right) = g(x_1, x_2, \dots, x_m). \quad \square \end{aligned}$$

命题 9. 设 $g(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 n 值 McNaughton 函数, $\overline{A_k}(x)$ 的定义同引理 1, 约定 $x_i^{\frac{k}{n-1}} = \overline{A_k}(x_i)$ ($l=1, 2; k=0, 1, 2, \dots, n-2, n-1$), 则 $g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \vee \{x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge g(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \dots, x_m) : (\alpha_1, \alpha_2) \in (L(n))^2\}$.

证明: 由命题 8 可知:

$$g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \vee \{x_1^{\alpha_1} \wedge g(\alpha_1, x_2, x_3, \dots, x_m) : \alpha_1 \in L(n)\} \quad (5)$$

又 $g(\alpha_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \vee \{x_2^{\alpha_2} \wedge g(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \dots, x_m) : \alpha_2 \in L(n)\}, \alpha_1 = 0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1$, 代入公式(5), 整理可得

$$g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \vee \{x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge g(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \dots, x_m) : (\alpha_1, \alpha_2) \in (L(n))^2\}. \quad \square$$

推论 5. 设 $g(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 n 值 McNaughton 函数, $\overline{A}_k(x)$ 的定义同引理 1, 约定 $x_i^{\frac{k}{n-1}} = \overline{A}_k(x_i)$ ($l=1, 2, \dots, m; k=0, 1, 2, \dots, n-2, n-1$), 则

$$g(x_1, \dots, x_m) = \vee \{x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\alpha_m} \wedge g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (L(n))^m\}$$

$$= \vee_{k=1}^{n-1} \left\{ x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\alpha_m} \wedge \frac{k}{n-1} : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in g^{-1} \left(\frac{k}{n-1} \right) \right\}.$$

注 11: 称 $\vee_{k=1}^{n-1} \left\{ x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\alpha_m} \wedge \frac{k}{n-1} : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in g^{-1} \left(\frac{k}{n-1} \right) \right\}$ 为 m 元 n 值 McNaughton 函数的准析取范式. 若 $\forall k=1, 2, \dots, n-1$, 有 $g^{-1} \left(\frac{k}{n-1} \right) = \emptyset$, 即可令 $g(x_1, \dots, x_m) = \overline{A}_0(x_1) \wedge \neg \overline{A}_0(x_1)$, 而 $\overline{A}_0(x_1) \wedge \neg \overline{A}_0(x_1)$ 是 x_1 的 1 元函数, 可看作简单准合取式.

下面给出命题 8 的对偶形式.

命题 10. 设 $g(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 n 值 McNaughton 函数, $\overline{A}_k(x)$ 的定义同引理 1, 则有

$$g(x_1, x_2, \dots, x_m) = (\neg \overline{A}_0(x) \vee g(0, x_2, \dots, x_m)) \wedge \left(\neg \overline{A}_1(x) \vee g \left(\frac{1}{n-1}, x_2, \dots, x_m \right) \right) \wedge$$

$$\left(\neg \overline{A}_2(x) \vee g \left(\frac{2}{n-1}, x_2, \dots, x_m \right) \right) \wedge \dots \wedge (\neg \overline{A}_{n-1}(x) \vee g(1, x_2, \dots, x_m)).$$

证明: $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-2, n-1\}$, 当 $x_1 = \frac{k}{n-1}$ 时,

$$(\neg \overline{A}_0(x) \vee g(0, x_2, \dots, x_m)) \wedge \left(\neg \overline{A}_1(x) \vee g \left(\frac{1}{n-1}, x_2, \dots, x_m \right) \right) \wedge$$

$$\left(\neg \overline{A}_2(x) \vee g \left(\frac{2}{n-1}, x_2, \dots, x_m \right) \right) \wedge \dots \wedge (\neg \overline{A}_{n-1}(x) \vee g(1, x_2, \dots, x_m)) =$$

$$(1 \vee g(0, x_2, \dots, x_m)) \wedge \dots \wedge \left(1 \vee g \left(\frac{k-1}{n-1}, x_2, \dots, x_m \right) \right) \wedge \left(0 \vee g \left(\frac{k}{n-1}, x_2, \dots, x_m \right) \right) \wedge$$

$$\left(1 \vee g \left(\frac{k+1}{n-1}, x_2, \dots, x_m \right) \right) \wedge \dots \wedge (1 \vee g(1, x_2, \dots, x_m)) = g \left(\frac{k}{n-1}, x_2, \dots, x_m \right) = g(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

□

命题 11. 设 $g(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 n 值 McNaughton 函数, $\overline{A}_k(x)$ 的定义同引理 1, 约定 $x_i^{\frac{k}{n-1}} = \neg \overline{A}_k(x_i)$ ($l=1, 2; k=0, 1, 2, \dots, n-2, n-1$), 则 $g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \wedge \{x_1^{\beta_1} \vee x_2^{\beta_2} \vee g(\beta_1, \beta_2, x_3, \dots, x_m) : (\beta_1, \beta_2) \in (L(n))^2\}$.

证明: 由命题 10 可知:

$$g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \wedge \{x_1^{\beta_1} \vee g(\beta_1, x_2, x_3, \dots, x_m) : \beta_1 \in L(n)\} \tag{6}$$

又 $g(\beta_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \wedge \{x_2^{\beta_2} \vee g(\beta_1, \beta_2, x_3, \dots, x_m) : \beta_2 \in L(n)\}$, $\beta_1 = 0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1$, 代入公式(6), 整理得:

$$g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \wedge \{x_1^{\beta_1} \vee x_2^{\beta_2} \vee g(\beta_1, \beta_2, x_3, \dots, x_m) : (\beta_1, \beta_2) \in (L(n))^2\}.$$

□

推论 6. 设 $g(x_1, \dots, x_m)$ 为 m 元 n 值 McNaughton 函数, $\overline{A}_k(x)$ 的定义同引理 1, 约定 $x_i^{\frac{k}{n-1}} = \neg \overline{A}_k(x_i)$ ($l=1, 2, \dots, m; k=0, 1, 2, \dots, n-2, n-1$), 则

$$g(x_1, \dots, x_m) = \wedge \{x_1^{\beta_1} \vee \dots \vee x_m^{\beta_m} \vee g(\beta_1, \dots, \beta_m) : (\beta_1, \dots, \beta_m) \in (L(n))^m\}$$

$$= \bigwedge_{k=0}^{n-2} \left\{ x_1^{\beta_1} \vee \dots \vee x_m^{\beta_m} \vee \frac{k}{n-1} : (\beta_1, \dots, \beta_m) \in g^{-1} \left(\frac{k}{n-1} \right) \right\}.$$

注 12: 称 $\bigwedge_{k=0}^{n-2} \left\{ x_1^{\beta_1} \vee \dots \vee x_m^{\beta_m} \vee \frac{k}{n-1} : (\beta_1, \dots, \beta_m) \in g^{-1} \left(\frac{k}{n-1} \right) \right\}$ 为 m 元 n 值 McNaughton 函数的准合取范式. 若

$\forall k=0,1,2,\dots,n-2$, 有 $g^{-1}\left(\frac{k}{n-1}\right) = \emptyset$, 即 $g(x_1, \dots, x_m) = 1$, 这时可令 $g(x_1, \dots, x_m) = \overline{A_0}(x_1) \vee \neg \overline{A_0}(x_1)$, 而 $\overline{A_0}(x_1) \vee \neg \overline{A_0}(x_1)$ 是 x_1 的一元函数, 可看作简单准析(合)取式.

3 n 值 McNaughton 函数的计数问题

第 2 节依据 Shannon 展开式的技巧, 我们得到了 n 值 McNaughton 函数的展开式及准析(合)取范式. 下面, 我们根据 n 值 McNaughton 函数的范式表示, 研究 n 值 McNaughton 函数的计数问题.

例 3: 设

$$A_1 = \neg(\neg p_1 \rightarrow p_1), B_1 = \neg(p_1 \rightarrow \neg p_1), C_1 = (p_1 \rightarrow \neg p_1) \wedge (\neg p_1 \rightarrow p_1), C'_1 = (p_1 \rightarrow \neg p_1) \wedge (\neg p_1 \rightarrow p_1) \wedge p_1 = C_1 \wedge p_1, \text{ 令}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \neg(A_1 \vee B_1 \vee C_1) & D_2 &= B_1 & D_3 &= C'_1 \\ D_4 &= B_1 \vee C'_1 & D_5 &= C_1 & D_6 &= B_1 \vee C_1 \\ D_7 &= A_1 & D_8 &= A_1 \vee B_1 & D_9 &= A_1 \vee C'_1 \\ D_{10} &= A_1 \vee B_1 \vee C'_1 & D_{11} &= A_1 \vee C_1 & D_{12} &= A_1 \vee B_1 \vee C_1 \end{aligned}$$

则这 12 个公式导出的一元 3 值 McNaughton 函数由下表给出.

三值函数 p_1 的值	$\overline{D_1}$	$\overline{D_2}$	$\overline{D_3}$	$\overline{D_4}$	$\overline{D_5}$	$\overline{D_6}$	$\overline{D_7}$	$\overline{D_8}$	$\overline{D_9}$	$\overline{D_{10}}$	$\overline{D_{11}}$	$\overline{D_{12}}$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1

由上表可以看出: 当 p_1 赋值为 0, 1 时, $\overline{D_k}$ 的值只能取为 0, 1; 当 p_1 赋值为 $\frac{1}{2}$ 时, $\overline{D_k}$ 的值可取为 3 个值 $0, \frac{1}{2}, 1$. 因此可知, 所有一元 3 值 McNaughton 函数至多有 $2 \times 2 \times 3 = 12$ 个, 而例 3 中所给的 12 个公式恰好导出了 12 个不同的一元 3 值 McNaughton 函数. 所以, 1 元 3 值 McNaughton 函数共 12 个, 而一元 3 值函数共 $3^3 = 27$ 个.

定义 12^[14]. 设 $L(n)$ 是 (\neg, \rightarrow) 型自由代数, M 是 $L(n)$ 的非空子集. 如果 M 关于运算 \neg, \rightarrow 都封闭, 则称 M 为 $L(n)$ 的子代数. 这里, $\neg x = 1-x, x \rightarrow y = \min\{1-x+y, 1\}, x, y \in L(n)$. 任取 $\alpha \in M$, 则由 $\alpha \rightarrow \alpha = 1$ 得知, $1 \in M, 0 = \neg 1 \in M$. 可见: $L(n)$ 的子代数一定包含 0 与 1; 又, $C_2 = \{0, 1\}$ 显然是 $L(n)$ 的一个子代数, 它是 $L(n)$ 的最小子代数.

定理 3^[14]. $L(m)$ 是 $L(n)$ 的子代数, 当且仅当 $n-1 = k(m-1), (k=1, 2, \dots)$.

推论 7. 如果 $n-1$ 为素数, 则 $L(n)$ 的子代数只有 $L(n)$ 和 C_2 .

推论 8. 设 r 为素数, 如果 $n-1 = r^t (t \geq 1)$, 则 $L(n)$ 的子代数为 $C_2, L(r+1), L(r^2+1), \dots, L(r^t+1)$, 且

$$C_2 \triangleleft L(r+1) \triangleleft L(r^2+1) \triangleleft \dots \triangleleft L(r^t+1).$$

$L(m) \triangleleft L(n)$ 表示 $L(m)$ 是 $L(n)$ 的子代数.

推论 9. 设 $r_1, r_2 (r_1 \neq r_2)$ 为素数, 如果 $n-1 = r_1 r_2$, 则 $L(n)$ 的子代数为 $C_2, L(r_1+1), L(r_2+1), L(r_1 r_2+1) = L(n)$, 且

$$C_2 \triangleleft L(r_1+1), L(r_2+1) \triangleleft L(r_1 r_2+1) = L(n).$$

$L(r_1 r_2+1)$ 是包含 $L(r_1+1)$ 与 $L(r_2+1)$ 的最小子代数.

命题 12. 设 $x_0 = \frac{r}{n-1}$, 若 r 与 $n-1$ 互素, 则 L_n 中均存在 1 元逻辑公式 $C_k(p)$, 使得 $C_k(p)$ 导出的一元函数 $\overline{C_k}(x)$

在 x_0 的值为 $\frac{k}{n-1}$, 即 $\overline{C_k}\left(\frac{r}{n-1}\right) = \frac{k}{n-1} (k=0, 1, 2, \dots, n-2, n-1)$.

证明:

(i) 若 $r=1$, 可令 $C_0(p) = \neg(p \rightarrow p), C_1(p) = p, C_2(p) = \neg p \rightarrow p, C_3(p) = \neg C_2(p) \rightarrow p, \dots, C_{n-1}(p) = \neg C_{n-2}(p) \rightarrow p$, 则有

$$\begin{aligned} \overline{C}_0\left(\frac{1}{n-1}\right) &= \neg\left(\frac{1}{n-1} \rightarrow \frac{1}{n-1}\right) = 0, \\ \overline{C}_1\left(\frac{1}{n-1}\right) &= \frac{1}{n-1}, \\ \overline{C}_2\left(\frac{1}{n-1}\right) &= \neg\frac{1}{n-1} \rightarrow \frac{1}{n-1} = \frac{2}{n-1}, \\ \overline{C}_3\left(\frac{1}{n-1}\right) &= \neg\frac{2}{n-1} \rightarrow \frac{1}{n-1} = \frac{3}{n-1}, \\ &\dots, \\ \overline{C}_{n-1}\left(\frac{1}{n-1}\right) &= \neg\frac{n-2}{n-1} \rightarrow \frac{1}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} = 1. \end{aligned}$$

(ii) 若 $r > 1$, 由 r 与 $n-1$ 互素知, 存在正整数 u, v , 使得 $ur - v(n-1) = \pm 1$, 不妨设 $ur - v(n-1) = 1$. 这时, 令

$$\begin{aligned} D_1(p) &= p, \\ D_2(p) &= \begin{cases} \neg D_1(p) \rightarrow p, & \overline{D}_1\left(\frac{r}{n-1}\right) + \frac{r}{n-1} < 1 \\ \neg(D_1(p) \rightarrow \neg p), & \overline{D}_1\left(\frac{r}{n-1}\right) + \frac{r}{n-1} \geq 1 \end{cases}, \\ D_3(p) &= \begin{cases} \neg D_2(p) \rightarrow p, & \overline{D}_2\left(\frac{r}{n-1}\right) + \frac{r}{n-1} < 1 \\ \neg(D_2(p) \rightarrow \neg p), & \overline{D}_2\left(\frac{r}{n-1}\right) + \frac{r}{n-1} \geq 1 \end{cases}, \\ &\dots, \\ D_u(p) &= \begin{cases} \neg D_{u-1}(p) \rightarrow p, & \overline{D}_{u-1}\left(\frac{r}{n-1}\right) + \frac{r}{n-1} < 1 \\ \neg(D_{u-1}(p) \rightarrow \neg p), & \overline{D}_{u-1}\left(\frac{r}{n-1}\right) + \frac{r}{n-1} \geq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \overline{D}_1\left(\frac{r}{n-1}\right) &= \frac{r}{n-1}, \\ \overline{D}_2\left(\frac{r}{n-1}\right) &= \begin{cases} \frac{2r}{n-1}, & 0 \leq \frac{r}{n-1} < \frac{1}{2} \\ \frac{2r}{n-1} - 1, & \frac{1}{2} \leq \frac{r}{n-1} < 1 \end{cases}, \\ \overline{D}_3\left(\frac{r}{n-1}\right) &= \begin{cases} \frac{3r}{n-1}, & 0 \leq \frac{r}{n-1} < \frac{1}{3} \\ \frac{3r}{n-1} - 1, & \frac{1}{3} \leq \frac{r}{n-1} < \frac{2}{3} \\ \frac{3r}{n-1} - 2, & \frac{2}{3} \leq \frac{r}{n-1} < 1 \end{cases}, \\ &\dots, \\ \overline{D}_u\left(\frac{r}{n-1}\right) &= \frac{ur}{n-1} - k, \frac{k}{u} \leq \frac{r}{n-1} < \frac{k+1}{u}, k = 0, 1, 2, \dots, u-1. \end{aligned}$$

注意, $0 \leq \overline{D}_i\left(\frac{r}{n-1}\right) < 1, i = 1, 2, \dots, u$. 而在 $\overline{D}_u\left(\frac{r}{n-1}\right)$ 中, 当 $k=v$ 时, $\frac{ur}{n-1} - v = \frac{1}{n-1}$, 所以 $\overline{D}_u\left(\frac{r}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}$. 这样就可以采用情形(i)中的方法, 令

$$C_0(p) = \neg(p \rightarrow p), C_1(p) = D_u(p), C_2(p) = \neg D_u(p) \rightarrow D_u(p), C_3(p) = \neg C_2(p) \rightarrow D_u(p), \dots, C_{n-1}(p) = \neg C_{n-2}(p) \rightarrow D_u(p),$$

则

$$\begin{aligned} \overline{C_0}\left(\frac{r}{n-1}\right) &= \neg\left(\frac{r}{n-1} \rightarrow \frac{r}{n-1}\right) = 0, \\ \overline{C_1}\left(\frac{r}{n-1}\right) &= D_u\left(\frac{r}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}, \\ \overline{C_2}\left(\frac{r}{n-1}\right) &= \neg\frac{1}{n-1} \rightarrow \frac{1}{n-1} = \frac{2}{n-1}, \\ \overline{C_3}\left(\frac{r}{n-1}\right) &= \neg\frac{2}{n-1} \rightarrow \frac{1}{n-1} = \frac{3}{n-1}, \\ &\dots \\ \overline{C_{n-1}}\left(\frac{1}{n-1}\right) &= \neg\frac{n-2}{n-1} \rightarrow \frac{1}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} = 1. \end{aligned}$$

□

例 4: 设 $L(21) = \left\{0, \frac{1}{20}, \frac{2}{20}, \dots, \frac{19}{20}, 1\right\}$, 求 L_{21} 中的一元逻辑公式 $C_k(p)$, 使得 $C_k(p)$ 导出的一元函数 $\overline{C_k}(x)$ 满足

$$\overline{C_k}\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{k}{20}, k = 0, 1, 2, \dots, 19, 20.$$

解: 令 $D_1(p) = p$:

- 因为 $\overline{D_1}\left(\frac{11}{20}\right) + \frac{11}{20} \geq 1$, 所以, 令 $D_2(p) = \neg(D_1(p) \rightarrow \neg p)$, 则 $\overline{D_2}\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{2}{20}$;
- 因为 $\overline{D_2}\left(\frac{11}{20}\right) + \frac{11}{20} < 1$, 所以, 令 $D_3(p) = \neg D_2(p) \rightarrow p$, 则 $\overline{D_3}\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{13}{20}$;
- 因为 $\overline{D_3}\left(\frac{11}{20}\right) + \frac{11}{20} \geq 1$, 所以, 令 $D_4(p) = \neg(D_3(p) \rightarrow \neg p)$, 则 $\overline{D_4}\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{4}{20}$;
- 因为 $\overline{D_4}\left(\frac{11}{20}\right) + \frac{11}{20} < 1$, 所以, 令 $D_5(p) = \neg D_4(p) \rightarrow p$, 则 $\overline{D_5}\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{15}{20}$;
- 因为 $\overline{D_5}\left(\frac{11}{20}\right) + \frac{11}{20} \geq 1$, 所以, 令 $D_6(p) = \neg(D_5(p) \rightarrow \neg p)$, 则 $\overline{D_6}\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{6}{20}$;
- 因为 $\overline{D_6}\left(\frac{11}{20}\right) + \frac{11}{20} < 1$, 所以, 令 $D_7(p) = \neg D_6(p) \rightarrow p$, 则 $\overline{D_7}\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{17}{20}$;
- 因为 $\overline{D_7}\left(\frac{11}{20}\right) + \frac{11}{20} \geq 1$, 所以, 令 $D_8(p) = \neg(D_7(p) \rightarrow \neg p)$, 则 $\overline{D_8}\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{8}{20}$;
- 因为 $\overline{D_8}\left(\frac{11}{20}\right) + \frac{11}{20} < 1$, 所以, 令 $D_9(p) = \neg D_8(p) \rightarrow p$, 则 $\overline{D_9}\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{19}{20}$;
- 因为 $\overline{D_9}\left(\frac{11}{20}\right) + \frac{11}{20} \geq 1$, 所以, 令 $D_{10}(p) = \neg(D_9(p) \rightarrow \neg p)$, 则 $\overline{D_{10}}\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{10}{20}$;
- 因为 $\overline{D_{10}}\left(\frac{11}{20}\right) + \frac{11}{20} < 1$, 所以, 令 $D_{11}(p) = \neg D_{10}(p) \rightarrow p$, 则 $\overline{D_{11}}\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{1}{20}$.

这时, 令

$$C_0(p) = \neg(p \rightarrow p), C_1(p) = D_{11}(p), C_2(p) = \neg D_{11}(p) \rightarrow D_{11}(p), C_3(p) = \neg C_2(p) \rightarrow D_{11}(p), \dots, C_{20}(p) = \neg C_{19}(p) \rightarrow D_{11}(p),$$

则有

$$\begin{aligned} \overline{C_0}\left(\frac{11}{20}\right) &= \neg\left(\frac{11}{20} \rightarrow \frac{11}{20}\right) = 0, \\ \overline{C_1}\left(\frac{11}{20}\right) &= D_{11}\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{1}{20}, \\ \overline{C_2}\left(\frac{11}{20}\right) &= \neg\frac{1}{20} \rightarrow \frac{1}{20} = \frac{2}{20}, \\ \overline{C_3}\left(\frac{11}{20}\right) &= \neg\frac{2}{20} \rightarrow \frac{1}{20} = \frac{3}{20}, \\ &\dots, \\ \overline{C_{20}}\left(\frac{11}{20}\right) &= \neg\frac{19}{20} \rightarrow \frac{1}{20} = \frac{20}{20} = 1. \end{aligned}$$

注 13:在例 4 中,因为 11 与 20 互素,所以存在正整数 $u=11, v=6$,使得 $u \times 11 - v \times 6 = 11 \times 11 - 20 \times 6 = 1$,故

$$\overline{D_{11}}\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{1}{20}.$$

定理 4. 设 $n-1$ 为素数,则 m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1, \dots, x_m)$ 共 $2^m \times n^{m-2^m}$ 个.

证明:因为 m 维向量 $(x_1, \dots, x_m) \in (L(n))^m$ 的不同选取共 n^m 个,其中 x_1, \dots, x_m 只取 0,1 两个值的选取共 2^m 个; x_1, \dots, x_m 中至少有一个不取 0,1 的选取共 $n^m - 2^m$ 个.

- 当 x_1, \dots, x_m 只取 0,1 两个值时, $g(x_1, \dots, x_m)$ 的值只能为 0,1.由推论 5 得知,对这 2^m 个不同的选取都能取到 0 和 1.

- 当 x_1, \dots, x_m 中至少有一个不取 0,1 时,即至少有一个取为 $\frac{r}{n-1}, 1 \leq r \leq n-2$,因为 $n-1$ 为素数,所以 r 与 $n-1$ 互素.由命题 12 及推论 5 得知,对这 $n^m - 2^m$ 个不同选取 $g(x_1, \dots, x_m)$ 的值能取到 $L(n)$ 中 n 个值的任意一个值.

因此, m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1, \dots, x_m)$ 共 $2^m \times n^{m-2^m}$ 个. □

定理 5. 设 $n-1=r^t$ (r 为素数, $t \geq 1$),则 m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1, \dots, x_m)$ 共 $2^{2^m} \times (r+1)^{(r+1)^m - 2^m} \times (r^2+1)^{(r^2+1)^m - (r+1)^m} \times \dots \times (r^t+1)^{(r^t+1)^m - (r^{t-1}+1)^m}$ 个.

证明:因为 m 维向量 $(x_1, \dots, x_m) \in (L(n))^m$ 的不同选取共 n^m 个,即 $(r^t+1)^m$ 个:

- 若 x_1, \dots, x_m 只取 0,1 两个值,则 (x_1, \dots, x_m) 不同的选取共 2^m 个.这时,由推论 5 可知, $g(x_1, \dots, x_m)$ 的值都能取到 0 和 1 两个值;

- 若 x_1, \dots, x_m 在 $\left\{0, \frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \dots, \frac{r-1}{r}, 1\right\}$ 中取值,且至少有一个不取 0,1,则 (x_1, \dots, x_m) 不同的选取共 $(r+1)^m - 2^m$ 个.这时, x_1, \dots, x_m 中至少有一个取为 $\frac{k}{r}, 1 \leq k \leq r-1$.因为 r 为素数,所以 k 与 r 互素.由命题 12 及推论 5 知, $g(x_1, \dots, x_m)$ 的值能取到 $\left\{0, \frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \dots, \frac{r-1}{r}, 1\right\}$ 中 $r+1$ 个值的任意一个值;

- 若 x_1, \dots, x_m 在 $\left\{0, \frac{1}{r^2}, \frac{2}{r^2}, \dots, \frac{r^2-1}{r^2}, 1\right\}$ 中取值,且至少有一个不取 $\left\{0, \frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \dots, \frac{r-1}{r}, 1\right\}$ 的值,则 (x_1, \dots, x_m) 不同的选取共 $(r^2+1)^m - (r+1)^m$ 个.这时, x_1, \dots, x_m 中至少有一个取为 $\frac{k}{r^2}, k \neq 0, r, 2r, \dots, (r-1)r, r^2$.因为 r 为素数,所以 k 与 r 互素.由命题 12 及推论 5 可知, $g(x_1, \dots, x_m)$ 的值能取到 $\left\{0, \frac{1}{r^2}, \frac{2}{r^2}, \dots, \frac{r^2-1}{r^2}, 1\right\}$ 中 r^2+1 个值的任意一个值;

• ...

- 若 x_1, \dots, x_m 在 $\left\{0, \frac{1}{r^t}, \frac{2}{r^t}, \dots, \frac{r^t-1}{r^t}, 1\right\} = L(n)$ 中取值,且至少有一个不取 $\left\{0, \frac{1}{r^{t-1}}, \frac{2}{r^{t-1}}, \dots, \frac{r^{t-1}-1}{r^{t-1}}, 1\right\}$ 的值,则

(x_1, \dots, x_m) 不同的选取共 $(r'+1)^m - (r'^{-1}+1)^m$ 个.

这时 x_1, \dots, x_m 中至少有一个取为 $\frac{k}{r'}$, $k \neq 0, r, 2r, \dots, (r'-1)r, r'$. 因为 r 为素数, 所以 k 与 r 互素, 由命题 12 及推论 5 得知, $g(x_1, \dots, x_m)$ 的值能取到 $\left\{0, \frac{1}{r'}, \frac{2}{r'}, \dots, \frac{r'-1}{r'}, 1\right\}$ 中 $r'+1$ 个值的任意一个值.

因此, m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1, \dots, x_m)$ 共 $2^{2^m} \times (r+1)^{(r+1)^m - 2^m} \times (r^2+1)^{(r^2+1)^m - (r+1)^m} \times \dots \times (r'+1)^{(r'+1)^m - (r'^{-1}+1)^m}$ 个. □

定理 6. 设 $n-1=r_1r_2$ (r_1, r_2 为素数, $r_1 \neq r_2$), 则 m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1, \dots, x_m)$ 共 $2^{2^m} \times (r_1+1)^{(r_1+1)^m - 2^m} \times (r_2+1)^{(r_2+1)^m - 2^m} \times (r_1r_2+1)^{(r_1r_2+1)^m - (r_1+1)^m - (r_2+1)^m + 2^m}$ 个.

证明: 因为 m 维向量 $(x_1, \dots, x_m) \in (L(n))^m$ 的不同选取共 n^m 个, 即 $(r_1r_2+1)^m$ 个:

(i) 若 x_1, \dots, x_m 只取 $0, 1$ 两个值, 则 (x_1, \dots, x_m) 不同的选取共 2^m 个. 这时, 由推论 5 可知, $g(x_1, \dots, x_m)$ 的值都能取到 0 和 1 两个值;

(ii) 若 x_1, \dots, x_m 在 $\left\{0, \frac{1}{r_1}, \frac{2}{r_1}, \dots, \frac{r_1-1}{r_1}, 1\right\}$ 中取值, 且至少有一个不取 $0, 1$, 则 (x_1, \dots, x_m) 不同的选取共 $(r_1+1)^m - 2^m$ 个.

这时 x_1, \dots, x_m 中至少有一个取为 $\frac{k}{r_1}$, $1 \leq k \leq r_1 - 1$. 因为 r_1 为素数, 所以 k 与 r_1 互素. 由命题 12 及推论 5 得知,

$g(x_1, \dots, x_m)$ 的值能取到 $\left\{0, \frac{1}{r_1}, \frac{2}{r_1}, \dots, \frac{r_1-1}{r_1}, 1\right\}$ 中 r_1+1 个值的任意一个值;

(iii) 若 x_1, \dots, x_m 在 $\left\{0, \frac{1}{r_2}, \frac{2}{r_2}, \dots, \frac{r_2-1}{r_2}, 1\right\}$ 中取值, 且至少有一个不取 $0, 1$, 则 (x_1, \dots, x_m) 不同的选取共 $(r_2+1)^m - 2^m$

个. 这时 x_1, \dots, x_m 中至少有一个取为 $\frac{k}{r_2}$, $1 \leq k \leq r_2 - 1$. 因为 r_2 为素数, 所以 k 与 r_2 互素. 由命题 12 及推论 5 得知,

$g(x_1, \dots, x_m)$ 的值能取到 $\left\{0, \frac{1}{r_2}, \frac{2}{r_2}, \dots, \frac{r_2-1}{r_2}, 1\right\}$ 中 r_2+1 个值的任意一个值;

(iv) 若 x_1, \dots, x_m 在 $\left\{0, \frac{1}{r_1r_2}, \frac{2}{r_1r_2}, \dots, \frac{r_1r_2-1}{r_1r_2}, 1\right\}$ 中取值, 且不是上述 3 种情形之一, 即至少有一个不取

$\left\{0, \frac{1}{r_1}, \frac{2}{r_1}, \dots, \frac{r_1-1}{r_1}, 1\right\} \cup \left\{0, \frac{1}{r_2}, \frac{2}{r_2}, \dots, \frac{r_2-1}{r_2}, 1\right\}$ 的值; 或者至少有一个取自 $\left\{0, \frac{1}{r_1}, \frac{2}{r_1}, \dots, \frac{r_1-1}{r_1}, 1\right\}$ 中的非 $0, 1$, 一个取自

$\left\{0, \frac{1}{r_2}, \frac{2}{r_2}, \dots, \frac{r_2-1}{r_2}, 1\right\}$ 中的非 $0, 1$, 则 (x_1, \dots, x_m) 不同的选取共 $(r_1r_2+1)^m - (r_1+1)^m - (r_2+1)^m + 2^m$ 个. 这时,

若 x_1, \dots, x_m 中至少有一个取为 $\frac{k}{r_1r_2}$, $k \neq 0, r_1, 2r_1, \dots, (r_2-1)r_1, r_2r_1; r_2, 2r_2, \dots, (r_1-1)r_2$, 因为 r_1, r_2 为素数, 所以 k 与 r_1r_2

互素. 由命题 12 及推论 5 可知, $g(x_1, \dots, x_m)$ 的值能取到 $\left\{0, \frac{1}{r_1r_2}, \frac{2}{r_1r_2}, \dots, \frac{r_1r_2-1}{r_1r_2}, 1\right\}$ 中 r_1r_2+1 个值的任意一个值;

若 x_1, \dots, x_m 中至少有一个取自 $\left\{0, \frac{1}{r_1}, \frac{2}{r_1}, \dots, \frac{r_1-1}{r_1}, 1\right\}$ 中的非 $0, 1$, 一个取自 $\left\{0, \frac{1}{r_2}, \frac{2}{r_2}, \dots, \frac{r_2-1}{r_2}, 1\right\}$ 中的非 $0, 1$, 不妨

设一个取 $\frac{i}{r_1}$, $1 \leq i \leq r_1 - 1$, 另一个取 $\frac{j}{r_2}$, $1 \leq j \leq r_2 - 1$, 因为 r_1, r_2 为素数, 所以 i 与 r_1 互素, j 与 r_2 互素. 由命题 12 可

知, 存在一元逻辑公式 $D_i(p)$ 与 $D_j(p)$, 使得 $\overline{D_i}\left(\frac{i}{r_1}\right) = \frac{1}{r_1}, \overline{D_j}\left(\frac{j}{r_2}\right) = \frac{1}{r_2}$. 这时, 令 $D(p_1, p_2) = \overline{D_i}(p_1) \rightarrow D_j(p_2)$, 则有

$$\bar{D}\left(\frac{i}{r_1}, \frac{j}{r_2}\right) = \neg \frac{1}{r_1} \rightarrow \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}.$$

因为 r_1, r_2 为素数, 所以 $r_1 + r_2$ 与 $r_1 r_2$ 互素.

再由命题 12 及推论 5 得知, $g(x_1, \dots, x_m)$ 的值能取到 $\left\{0, \frac{1}{r_1 r_2}, \frac{2}{r_1 r_2}, \dots, \frac{r_1 r_2 - 1}{r_1 r_2}, 1\right\}$ 中 $r_1 r_2 + 1$ 个值的任意一个值.

因此, m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1, \dots, x_m)$ 共有

$$2^{2^m} \times (r_1 + 1)^{(r_1 + 1)^m - 2^m} \times (r_2 + 1)^{(r_2 + 1)^m - 2^m} \times (r_1 r_2 + 1)^{(r_1 r_2 + 1)^m - (r_1 + 1)^m - (r_2 + 1)^m + 2^m} \text{ 个.} \quad \square$$

注 14: 对于任意的 n 值 Łukasiewicz 命题逻辑系统 $L_n (n \geq 3)$, 由算术基本定理可知, $n-1$ 能够唯一地表示为

$$n-1 = r_1^{t_1} \times \dots \times r_k^{t_k},$$

其中, r_i 为素数, $t_i \geq 1, i=1, 2, \dots, k$. 采用定理 5 和定理 6 的方法, 可以得到 m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1, \dots, x_m)$ 的个数, 但个数的表达方式随着 $n-1$ 素分解的复杂程度会变得很复杂.

4 L_n 中公式的构造及逻辑等价类的计数问题

在 n 值 Łukasiewicz 逻辑系统 L_n 中, 由逻辑公式 A 可以很容易地得到 A 导出的 n 值 McNaughton 函数 \bar{A} . 反过来, 由 n 值 McNaughton 函数 $g: (L(n))^m \rightarrow L(n)$ 出发, 如何构造一个逻辑公式 A , 使得 A 导出的 n 值 McNaughton 函数恰好就是 g 呢? 下面, 我们来解决这个问题.

例 5: 设 $L(6) = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\}$, 求 L_6 中的 1 元逻辑公式 $A(p)$, 使得 $A(p)$ 导出的 1 元函数 $\bar{A}(x)$ 满足:

x	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
$\bar{A}(x)$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

解: 由例 2 可知, 存在一元逻辑公式 $A_k(p)$, 使得 $A_k(p)$ 导出的一元函数 $\bar{A}_k(x)$ 满足:

$$\bar{A}_k(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{k}{5} \\ 0, & x \neq \frac{k}{5} \end{cases}, x \in L(6), k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

由推论 5 得知, $\bar{A}(x) = \bar{A}_0(x) \vee \left(\bar{A}_1(x) \wedge \frac{2}{5}\right) \vee \left(\bar{A}_2(x) \wedge \frac{3}{5}\right) \vee \left(\bar{A}_3(x) \wedge \frac{1}{5}\right) \vee \left(\bar{A}_4(x) \wedge \frac{1}{5}\right) \vee \bar{A}_5(x)$. 令

$$C_1(p) = \neg p \rightarrow p, C_2(p) = (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p, C_3(p) = \neg(p \rightarrow \neg p), C_4(p) = \neg p,$$

则 $\bar{C}_1\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}, \bar{C}_2\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{5}, \bar{C}_3\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}, \bar{C}_4\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5}$. 这时, 令

$$A(p) = A_0(p) \vee (A_1(p) \wedge C_1(p)) \vee (A_2(p) \wedge C_2(p)) \vee (A_3(p) \wedge C_3(p)) \vee (A_4(p) \wedge C_4(p)) \vee A_5(p),$$

则 $A(p)$ 导出的一元函数 $\bar{A}(x)$ 满足题设条件.

例 6: 设 $n-1$ 为素数, $g(x_1, \dots, x_m)$ 是任意一个 m 元 n 值 McNaughton 函数, 求 L_n 中的 m 元逻辑公式 $A(p_1, \dots, p_m)$, 使得 $A(p_1, \dots, p_m)$ 导出的 m 元函数就是 g .

解: 设 $g(x_1, \dots, x_m)$ 是任意一个 m 元 n 值 McNaughton 函数, $\bar{A}_k(x)$ 的定义同引理 1, 约定 $x_i^{\frac{k}{n-1}} = \bar{A}_k(x_i) (i=1, 2, \dots, m; k=0, 1, 2, \dots, n-2, n-1)$:

(i) 若 $\forall k=0, 1, 2, \dots, n-2, g^{-1}\left(\frac{k}{n-1}\right) = \emptyset$, 即 $g(x_1, \dots, x_m) = 1$, 由注 12 可知, $g(x_1, \dots, x_m) = \bar{A}_0(x_1) \vee \neg \bar{A}_0(x_1)$, 令

$$A(p_1, \dots, p_m) = A_0(p_1) \vee \neg A_0(p_1),$$

则 $A(p_1, \dots, p_m)$ 导出的函数就是 g .

(ii) 若 $\exists k=0,1,2,\dots,n-2$,使得 $g^{-1}\left(\frac{k}{n-1}\right) \neq \emptyset$,设 $\frac{k}{n-1} = \frac{k_1}{(n-1)_1}$ (k_1 与 $(n-1)_1$ 互素),由定理 4 得知, x_1, \dots, x_m 至少有一个取值 $\frac{k_1}{(n-1)_1}$ (k_1 与 $(n-1)_1$ 互素),不妨设 x_i 取值为 $\frac{k_1}{(n-1)_1}$.

由命题 12 可知,存在一元逻辑公式 $C_k(p_i)$,使得 $\overline{C_k}\left(\frac{k_1}{(n-1)_1}\right) = \frac{k_1}{(n-1)_1} = \frac{k}{n-1}$. 令公式:

$$A(p_1, \dots, p_m) = \bigwedge_{k=0}^{n-2} \left\{ p_1^{\beta_1} \vee \dots \vee p_{i-1}^{\beta_{i-1}} \vee (p_i^{\beta_i} \vee C_k(p_i)) \vee p_{i+1}^{\beta_{i+1}} \vee \dots \vee p_m^{\beta_m} : (\beta_1, \dots, \beta_m) \in g^{-1}\left(\frac{k}{n-1}\right) \right\}.$$

由推论 6 可知, $A(p_1, \dots, p_m)$ 导出的函数就是 g .

定理 7. 在 L_n 中, m 元公式 $A(p_1, \dots, p_m)$ 的逻辑等价类的个数可分以下几种情形来讨论:

(i) 若 $n-1$ 为素数,则 m 元公式 $A(p_1, \dots, p_m)$ 的逻辑等价类共 $2^{2^m} \times n^{m-2^m}$ 个;

(ii) 若 $n-1=r^t$ (r 为素数, $t \geq 1$),

则 m 元公式 $A(p_1, \dots, p_m)$ 的逻辑等价类共 $2^{2^m} \times (r+1)^{(r+1)^m-2^m} \times (r^2+1)^{(r^2+1)^m-(r+1)^m} \times \dots \times (r^t+1)^{(r^t+1)^m-(r^{t-1}+1)^m}$ 个.

(iii) 若 $n-1=r_1r_2$ (r_1, r_2 为素数, $r_1 \neq r_2$),则有:

m 元公式 $A(p_1, \dots, p_m)$ 的逻辑等价类共 $2^{2^m} \times (r_1+1)^{(r_1+1)^m-2^m} \times (r_2+1)^{(r_2+1)^m-2^m} \times (r_1r_2+1)^{(r_1r_2+1)^m-(r_1+1)^m-(r_2+1)^m+2^m}$ 个.

证明:任意 m 元 n 值 McNaughton 函数是由 m 元公式 $A(p_1, \dots, p_m)$ 导出的,且任意 m 元公式 $A(p_1, \dots, p_m)$ 导出的函数是 m 元 n 值 McNaughton 函数.

(i) 当 $n-1$ 为素数时,由定理 4 得知, m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1, \dots, x_m)$ 共 $2^{2^m} \times n^{m-2^m}$ 个;又因为逻辑等价的公式导出的 n 值 McNaughton 函数是相等的,所以 m 元公式 $A(p_1, \dots, p_m)$ 的逻辑等价类共 $2^{2^m} \times n^{m-2^m}$ 个.

(ii) 当 $n-1=r^t$ (r 为素数, $t \geq 1$)时,由定理 5 得知, m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1, \dots, x_m)$ 共 $2^{2^m} \times (r+1)^{(r+1)^m-2^m} \times (r^2+1)^{(r^2+1)^m-(r+1)^m} \times \dots \times (r^t+1)^{(r^t+1)^m-(r^{t-1}+1)^m}$ 个;又因为逻辑等价的公式导出的 n 值 McNaughton 函数是相等的,所以 m 元公式 $A(p_1, \dots, p_m)$ 的逻辑等价类共 $2^{2^m} \times (r+1)^{(r+1)^m-2^m} \times (r^2+1)^{(r^2+1)^m-(r+1)^m} \times \dots \times (r^t+1)^{(r^t+1)^m-(r^{t-1}+1)^m}$ 个.

(iii) 当 $n-1=r_1r_2$ (r_1, r_2 为素数, $r_1 \neq r_2$)时,由定理 6 得知, m 元 n 值 McNaughton 函数 $g(x_1, \dots, x_m)$ 共 $2^{2^m} \times (r_1+1)^{(r_1+1)^m-2^m} \times (r_2+1)^{(r_2+1)^m-2^m} \times (r_1r_2+1)^{(r_1r_2+1)^m-(r_1+1)^m-(r_2+1)^m+2^m}$ 个;

又因为逻辑等价的公式导出的 n 值 McNaughton 函数是相等的,所以 m 元公式 $A(p_1, \dots, p_m)$ 的逻辑等价类共 $2^{2^m} \times (r_1+1)^{(r_1+1)^m-2^m} \times (r_2+1)^{(r_2+1)^m-2^m} \times (r_1r_2+1)^{(r_1r_2+1)^m-(r_1+1)^m-(r_2+1)^m+2^m}$ 个.

注 15:对于任意的 n 值 Lukasiewicz 命题逻辑系统 L_n ($n \geq 3$),由算术基本定理可知, $n-1$ 能够唯一地表示为

$$n-1 = r_1^{t_1} \times \dots \times r_k^{t_k},$$

其中, r_i 为素数, $t_i \geq 1, i=1,2,\dots,k$.由注 14 可知,在一般的 n 值 Lukasiewicz 命题逻辑系统 L_n 中,可以得到 m 元公式 $A(p_1, \dots, p_m)$ 的逻辑等价类的个数.

5 结束语

本文由 Boole 函数的 Shannon 展开式出发,研究了 n 值 McNaughton 函数的展开式,给出了 m 元 n 值 McNaughton 函数的准析取范式和准合取范式.在此基础上,给出了 m 元 n 值 McNaughton 函数的计数问题.并在 n 值 Lukasiewicz 逻辑系统 L_n 中,研究了逻辑公式的构造问题以及 m 元公式逻辑等价类的计数问题.这些问题的解决,为 n 值 Lukasiewicz 逻辑在近似推理中的应用奠定了基础.然而,在 n 值 R_0 -逻辑系统 L_n^* 中,由逻辑公式导出的函数的结构与 McNaughton 函数有很大的不同,其结构和计数问题将另文加以讨论.

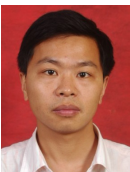
References:

[1] Baier C, Katoen JP. Principles of Model Checking. The MIT Press Cambridge, 2008.

- [2] Dasgupta P, Chakrabarti PP, Deka JK, Sankaranarayanan S. Min-Max computation tree logic. *Artificial Intelligence*, 2001,127(1): 137–162.
- [3] Ivančić F, Yang ZJ, ganai MK, Gupta A, Ashar P. Efficient SAT-based bounded model checking for software verification. *Theoretical Computer Science*, 2008,404(3):256–274. [doi: 10.1016/j.tcs.2008.03.013]
- [4] Basagiannis S, Katsaros P, Pombortsis A. An intruder model with message inspection for model checking security protocols. *Computer & Security*, 2010,29(1):16–34. [doi: 10.1016/j.cose.2009.08.003]
- [5] Burkart O, Steffen B. Model checking the full modal mu-calculus for infinite sequential processes. *Theoretical Computer Science*, 1999,221(1-2):251–270.
- [6] Lomuscio A, Penczek W, Woźna B. Bounded model checking for knowledge and real time. *Artificial Intelligence*, 2007,171(16-17): 1011–1038. [doi: 10.1016/j.artint.2007.05.005]
- [7] Raimondi F, Lomuscio A. Automatic verification of multi-agent systems by model checking via ordered binary decision diagrams. *Journal of Applied Logic*, 2007,5(2):235–251. [doi: 10.1016/j.jal.2005.12.010]
- [8] Moreno-Ger P, Fuentes-Fernández R, Sierra-Rodríguez JL, Fernández-Manjón B. Model-Checking for adventure videogames. *Information and Software Technology*, 2009,51(3):564–580. [doi: 10.1016/j.infsof.2008.08.003]
- [9] Baresi L, Rafe V, Rahmani AT, Spoletini P. An efficient solution for model checking graph transformation systems. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 2008,213(1):3–21. [doi: 10.1016/j.entcs.2008.04.071]
- [10] Boucheneb H, Hadjidj R. CTL^* model checking for time Petri nets. *Theoretical Computer Science*, 2006,353(1-3):208–227. [doi: 10.1016/j.tcs.2005.11.002]
- [11] Awedh M, Somenzi F. Termination criteria for bounded model checking: extensions and comparison. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 2006,144(1):51–66. [doi: 10.1016/j.entcs.2005.07.019]
- [12] Wang GJ. *Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle*. 2nd ed., Beijing: Science Press, 2006. 16–40 (in Chinese).
- [13] Cignoli RLO, D’Ottaviano IML, Mundici D. *Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 7–30.
- [14] Wang GJ. *Nonclassical Mathematical Logic and Approximate Reasoning*. 2nd ed., Beijing: Science Press, 2008. 29–36 (in Chinese).

附中文参考文献:

- [12] 王国俊.数理逻辑引论与归结原理.第2版,北京:科学出版社,2006.16–40.
- [14] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理.第2版,北京:科学出版社,2008.29–36.



王庆平(1979—),男,山东东平人,博士生,讲师,CCF会员,主要研究领域为不确定性推理,计量逻辑学.
E-mail: lc_wqp@163.com



王国俊(1935—),男,教授,博士生导师,CCF高级会员,主要研究领域为不确定性推理,计量逻辑学.
E-mail: gjwang@snnu.edu.cn