

基于非截断小波有限元的BLT正向问题研究^{*}

靳露冬¹, 吴艳¹⁺, 王卫卫², 任努努¹, 黄鹤羽¹, 陈雪利¹, 韩润强¹

¹(西安电子科技大学 电子工程学院 智能生物信息研究中心, 陕西 西安 710071)

²(西安电子科技大学 理学院, 陕西 西安 710071)

Research on Bioluminescent Tomography Forward Problem Based on Non-Truncated Wavelet Finite Element

JIN Lu-Dong¹, WU Yan¹⁺, WANG Wei-Wei², REN Nu-Nu¹, HUANG He-Yu¹, CHEN Xue-Li¹, HAN Run-Qiang¹

¹(Life Science Research Center, School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

²(School of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China)

+ Corresponding author: E-mail: ywu@mail.xidian.edu.cn

Jin LD, Wu Y, Wang WW, Ren NN, Huang HY, Chen XL, Han RQ. Research on bioluminescent tomography forward problem based on non-truncated wavelet finite element. *Journal of Software*, 2009,20(5):1194–1206. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3567.htm>

Abstract: In this paper, an algorithm named non-truncated wavelet finite element for bioluminescence tomography (BLT) is proposed. Using linear combination of non-truncated wavelet functions across the elements to approximate the unknown function, this algorithm is used in BLT forward problem in phantoms of cylinder and sphere successfully. Theoretical analysis and numerical simulations show that the computation accuracy by this algorithm is almost as good as that of finite element method (FEM), while the number of elements and computational complexity reduce greatly compared with FEM.

Key words: molecular imaging; bioluminescence tomography; non-truncated wavelet finite element

摘要: 针对自发荧光断层成像,提出了一种非截断小波有限元算法,该算法采用单元间非截断组合小波基来逼近未知函数,从理论上解决了二维和三维下复杂形状体的剖分,并成功地应用于自发荧光断层成像正向问题中圆柱和圆球仿体的研究.理论分析和数值仿真结果表明,与传统有限元的数值解相比,该算法在获得同样有效解的情况下减少了单元剖分数,降低了计算的复杂度.

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60872137, 30873462, 90209008, 30870685, 30672690, 30600151, 60532050, 60621001 (国家自然科学基金); the National Basic Research Program of China under Grant No.2006CB705700 (国家重点基础研究发展计划(973)); the Program for Cheung Kong Scholars and Innovative Research Team in University of China under Grant No.IRT0645 (长江学者和创新团队发展计划); the Program for Chair Professors of "Cheung Kong Scholars Program" of China ("长江学者奖励计划"特聘教授); the Joint Research Fund for Overseas Chinese Young Scholars under Grant No.30528027 (海外青年学者合作研究基金); the CAS Hundred Talents Program (中国科学院百人计划); the CAS Scientific Research Equipment Develop Program under Grant Nos.YZ0642, YZ200766 (中国科学院重大科研装备研制项目); the Beijing Municipal Natural Science Foundation of China under Grant No.4071003 (北京市自然科学基金)

Received 2008-04-10; Accepted 2009-01-14

关键词: 分子影像;自发荧光断层成像;非截断小波有限元

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

自发荧光断层成像(bioluminescence tomography,简称 BLT)近几年来逐渐成为分子影像领域中的研究热点,其优势在于可以在体无创地探测到分子和细胞水平的生物活动^[1].BLT 中,荧光分子探针与感兴趣区域(如病变区域)特异性结合,它们在酶催化下发出荧光^[2,3].BLT 的研究包括正向问题和逆向问题两个方面,正向问题是已知荧光光源和区域光学特征参数,求得生物体表面光强分布的过程^[1,4];逆向问题是通过生物体体表的荧光信号,反演出荧光分子探针的位置及强度^[5].随着生物学的发展,BLT 将会在疾病早期诊断和医药研制开发中扮演愈加重要的角色^[2].

BLT 的前向问题实质上是粒子输运问题^[1],主要研究光子在生物组织中的传播过程和传播机理,在数学上建模为一个二阶偏微分方程.有限元、自适应有限元等算法已应用于对 BLT 的研究^[3,6],它们的共同基础是传统有限元.传统有限元采用多项式作为形函数,对未知函数的逼近精度与网格剖分的粗细和多项式的阶数有关^[7].当需要对一个方程的解作精确逼近时,未知系数大量增加,增大了算法的复杂度.小波有限元(wavelet finite element,简称 WFE)以小波作为基函数,小波基具有多尺度、多分辨和紧支撑特性,可以在剖分单元数较少的情况下获得较好的逼近效果^[8,9].

但是,目前的小波有限元采用单元间截断的小波基来逼近未知函数^[8,9],导致其工程应用局限于一维模型和二维简单形状体问题^[10].本文提出了一种非截断小波有限元算法.该算法采用了单元间非截断的小波基,成功地应用于圆柱和圆球形状仿体的 BLT 正向问题研究中.理论分析和数值仿真结果表明,该算法在与传统有限元取得相当精度的情况下降低了计算复杂度.

1 基于三维形状体剖分的非截断小波有限元理论

小波有限元在发展过程中产生了多种算法^[9,11,12],其中,何正嘉等人提出的小波有限元在机械力学分析和材料质量诊断领域得到了应用^[9],但是该算法不能处理二维和三维下形状比较复杂的模型问题^[10].本文提出的非截断小波有限元改进了该算法,解决了这个难题,同时改善了被逼近函数在单元间的连续性.本节中提到的小波有限元专指文献[9]中的算法.

1.1 B样条小波

至今,人们已经构造出了大量的小波函数,其中 Meyer 小波、Daubechies 小波及 B 样条小波等得到了广泛应用.本文选择了 B 样条小波,它有解析表达式,算法实现比较简单.

m 阶 B 样条尺度函数定义为^[13]

$$N_m(x) = N_{m-1} * N_1 = \int_0^1 N_{m-1}(x-t)dt, \quad m \geq 2 \quad (1)$$

其中,*表示卷积运算, N_1 是区间[0,1]的特征函数,且 $N_m \in C^{m-2}$.

由以上定义可以得到 B 样条尺度函数的另一种表达式^[13]:

$$N_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (x-k)_+^{m-1} \quad (2)$$

其中,

$$\begin{cases} x_+ = \max(0, x) \\ x_+^{m-1} = (x_+)^{m-1}, \quad m \geq 2 \end{cases} \quad (3)$$

图 1 给出了零尺度空间中的 2 阶和 4 阶 B 样条尺度函数.

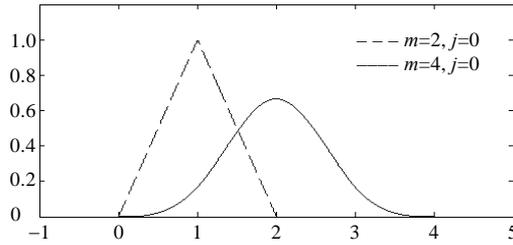
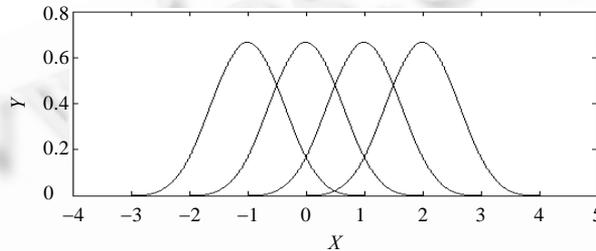


Fig.1 Scale functions of B-spline

图1 B样条尺度函数

1.2 小波有限元

图2为所有在区间 $[0,1]$ 上有支撑的 $m=4, j=0$ (4阶尺度函数,零尺度空间)的B样条尺度函数.下面对构造一维小波有限元的思路作一简介,具体过程参见文献[8,9].

Fig.2 Scale functions of $m=4, j=0$, which have support on $[0,1]$ 图2 在 $[0,1]$ 区间上有支撑的 $m=4, j=0$ 的B样条尺度函数

记支撑在 $[0,4]$ 区间上的尺度函数为 $\phi(x)$,集合 $\{\phi(x), \phi(x+1), \phi(x+2), \phi(x+3)\}$ 就构成了零尺度空间中在 $[0,1]$ 区间上的一组完备基,利用这组基可以逼近区间 $[0,1]$ 上的所有函数.构造单元刚度矩阵和单元荷载矩阵及其总体合成时与传统有限元是一致的.值得注意的是,与传统有限元不同,这里的未知值不是实际物理取值,而是尺度函数空间中的坐标值.马军星引入了单元转换矩阵的概念^[8],将尺度函数空间变换到物理空间,实现了单元之间的连接.

定义在区间 $[l_1, l_2]$ 上的问题,可以通过 $\frac{l-l_1}{l_2-l_1}$ 变换到 $[0,1]$ 上进行求解.二维情况下,文献[9]通过小波函数的张量积构造了区间 $[0,1] \times [0,1]$ 上的完备基.

1.3 非截断小波有限元

小波有限元对单元之间严格划分,对跨单元支撑的函数基采取截断处理^[8,9],导致未知系数随着单元个数和维数的增加而急剧增多,在处理二维和三维复杂形状时难以应付形状的变化.非截断小波有限元采用了非截断基方式,在研究域内小波基自由延伸,未知系数不会随着维数和单元个数的增加而急剧增加.理论上,我们可以对形状复杂的研究域剖分足够的单元数来逼近其形状变化,而不致引起未知数的大量增加.

与传统有限元相比,小波基属于平方可积函数空间 $L^2(R)$ 且具有紧支撑,而多项式函数不属于 $L^2(R)$,而且在整个实域空间取值,因此,当采用小波基作为逼近函数时,被逼近函数上一个突变的产生仅仅会改变小波逼近的局部系数值,这使得在逼近待求函数时可以采用较少量的逼近系数达到较优的逼近效果^[9].

非截断小波有限元优势是显然的.它把研究域作为一个整体处理,当我们使用 m 阶B样条时,其构造的函数在整个研究域上是 $m-2$ 阶可导的,逼近效果要优于小波有限元和传统有限元.在需要对逼近函数的连续度进行提升时,传统有限元的单元节点数急剧增多,整体未知系数将大量增加^[7];而非截断小波有限元仅需采用相应连续度的B样条小波,整体未知数个数增加很少.

现在,假设一个偏微分方程的变分形式为

$$D(u,v)-F(v)=0, \forall v \in S_0^1 \tag{4}$$

其中, $S_0^1 = \{v | v \in C^1(\Omega), v(x)=0, \text{当 } x \in \partial\Omega\}$, D 为 $S_0^1 \times S_0^1$ 上的一个对称双线性泛函, F 为 S_0^1 上的一个线性泛函. 假设以上问题定义在 $[0,2]$ 区间上, 图 3 给出了所有在区间 $[0,2]$ 上存在支撑的 $m=4, j=0$ 的 B 样条尺度函数.

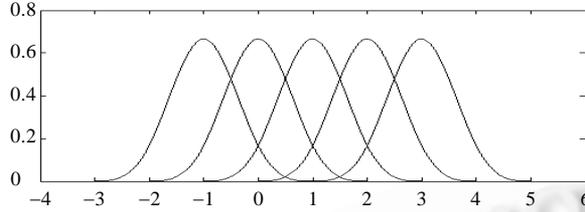


Fig.3 B-Spline scale functions of $m=4, j=0$, which have support on $[0,2]$

图 3 在 $[0,2]$ 区间上有支撑的 $m=4, j=0$ 的 B 样条尺度函数

非截断小波有限元算法如下:

(1) 选择分辨率大小, 即尺度函数的一个单位长度所代表的实际尺寸, 如 1mm 或 2m 等.

(2) 根据分辨率大小, 对研究域剖分网格. 一维的基本单元是分辨率大小的线段; 二维区域可以对长和宽分别确定分辨率, 然后以分辨率确定的长方形为基本单元对研究区域进行剖分; 同样, 三维情况下可以分别确定 3 个方向上的分辨率, 然后以相应的长方体为基本单元进行剖分. 此时得到原研究区域的一个近似区域.

(3) 将待求函数在剖分区域上近似并求解. 二维和三维时的函数基由一维尺度函数张量生成.

我们把整个剖分区域作为一个整体来处理. 设所有在剖分区域上有支撑的尺度函数为 $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$, 则未知函数可以近似为

$$u = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i \tag{5}$$

$$v = \sum_{i=1}^n d_i \phi_i \tag{6}$$

将上面的表达式代入到公式(4)中进行整理, 有

$$\sum_{i=1}^n c_i D(\phi_i, \phi_j) = F(\phi_j), j = 1, 2, \dots, n \tag{7}$$

这样就得到了含有 n 个未知数的 n 个方程, 求解得到 c_i . 为加以对比, 以公式(4)给出的问题为例, 给出了小波有限元和非截断组合基的小波有限元算法.

(a) 小波有限元与传统有限元类似, 该算法对两个单元上的未知函数分别进行近似, 然后形成每个单元上的刚度矩阵, 最后组合成总刚度矩阵.

将 $[0,2]$ 区间剖分为 $[0,1]$ 和 $[1,2]$ 两个单元, 把区间 $[1,2]$ 映射到 $[0,1]$, 在前处理阶段对两者作统一处理; 对 $[0,1]$ 区间上未知函数进行近似:

$$u = \sum_{i=-3}^0 c_i \phi(x-i), 0 \leq x < 1 \tag{8}$$

$$v = \sum_{i=-3}^0 d_i \phi(x-i), 0 \leq x < 1 \tag{9}$$

代入到公式(4)中, 整理得到子单元 $[0,1]$ 上的一组方程:

$$\begin{pmatrix} D(\phi_{-3}, \phi_{-3}) & D(\phi_{-3}, \phi_{-2}) & D(\phi_{-3}, \phi_{-1}) & D(\phi_{-3}, \phi_0) \\ D(\phi_{-2}, \phi_{-3}) & D(\phi_{-2}, \phi_{-2}) & D(\phi_{-2}, \phi_{-1}) & D(\phi_{-2}, \phi_0) \\ D(\phi_{-1}, \phi_{-3}) & D(\phi_{-1}, \phi_{-2}) & D(\phi_{-1}, \phi_{-1}) & D(\phi_{-1}, \phi_0) \\ D(\phi_0, \phi_{-3}) & D(\phi_0, \phi_{-2}) & D(\phi_0, \phi_{-1}) & D(\phi_0, \phi_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-3} \\ c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(\phi_{-3}) \\ F(\phi_{-2}) \\ F(\phi_{-1}) \\ F(\phi_0) \end{pmatrix} \tag{10}$$

知系数.随着单元数和维数的增加,非截断小波有限元的优势是明显的.例如,在二维情况下,研究域是一个 4×4 大小的区域,并且长和宽的分辨率均取 1,用参数为 $m=4, j=0$ 的 B 样条小波时,可以计算出小波有限元需要 169 个未知系数,而非截断小波有限元仅需要 49 个未知系数.

(4) 在第(3)步中,我们已经解出的未知系数 c_i 并非是节点取值大小,而是在尺度函数空间中以相应尺度函数为基的系数值.为得到函数在某一点处的取值,可以利用公式(19).

对于只存在自然边界条件的问题(如 BLT),以上几步就得到了结果.但实际遇到的多数工程问题存在约束边界条件,这时需要引入单元转换矩阵,单元转换矩阵的求解方法参见文献[8,9].与小波有限元的不同之处在于,这里的单元转换矩阵不是在一个单元内进行配点,而是在整个研究域内配点.利用单元转换矩阵把小波空间转换到了物理空间,相应自由度从小波系数转化到了未知场函数^[9].然后再加入约束边界条件进行求解,该过程完全类似于传统有限元.

2 基于非截断小波有限元的自发荧光断层成像正向问题算法

自发荧光断层成像是分子影像技术的一个分支,具有低成本、高灵敏度、高信噪比的优势^[3,6,14].在自发荧光断层成像真实实验中,转基因小鼠体内含有可以表达合成荧光素酶的报告基因(reporter gene).报告基因在预设事件(如癌变)的触发下,可以表达生成荧光素酶^[15].在对预设事件成像时,首先将实验小鼠体内注入荧光素,在发生预设事件的细胞内,由三磷酸腺苷(adenosine-triphosphate,简称 ATP)和氧气提供能量,荧光素在荧光素酶的催化作用下发出荧光.荧光在生物组织中经历散射和吸收过程,其中一部分荧光可以穿透小鼠身体,被 CCD(charge coupled device)探测到.由于透射的荧光十分微弱,所以实验需要在黑暗环境下进行操作,并且需要足够的曝光时间^[14].

自发荧光断层成像以重建荧光光源为目的,以达到对预设事件进行成像的目的.其包括前向和逆向问题两个方面:前向问题主要研究从组织内光源强度分布到生物组织表面光强分布的过程;与之相反,逆向问题研究从生物组织表面光强分布到组织内光源强度分布的过程.前向问题是建模和求解的过程,逆向问题则以前向问题为基础进行光源重建.光子的传播过程可以通过 Monte Carlo 方法模拟^[16],也可以在数学上建模为 Boltzmann 方程(又称为辐射传输方程)^[17].Boltzmann 方程中含有 6 个未知变量,难以求解,由于生物组织对光子的散射作用远远强于吸收,故可以进行漫射,近似得到易于求解的漫射方程^[17].

本节给出了应用非截断小波有限元求解以漫射方程为基本数学模型的 BLT 前向问题算法.

2.1 自发荧光断层成像的数学模型

生物组织中光子的传播规律可以用 Boltzmann 方程来描述^[17,18]:

$$\frac{\partial L(\mathbf{r}, \hat{s}, t) / c}{\partial t} = -\hat{s} \cdot \nabla L(\mathbf{r}, \hat{s}, t) - \mu_t L(\mathbf{r}, \hat{s}, t) + \mu_s \int_{4\pi} L(\mathbf{r}, \hat{s}', t) P(\hat{s}' \cdot \hat{s}) d\Omega' + S(\mathbf{r}, \hat{s}, t) \quad (22)$$

其中: \hat{s} 和 \hat{s}' 是表示方向的单位向量; \mathbf{r} 是研究域内任意一点; t 是时间($t \geq 0$); L 是亮度; c 是光子在生物组织中的传输速度; $\mu_t = \mu_a + \mu_s$ 是总衰减系数,其中, μ_a 和 μ_s 分别是生物组织的吸收系数和散射系数; $P(\hat{s}' \cdot \hat{s})$ 是光子从 \hat{s}' 方向上散射到 \hat{s} 上的光子相位函数,它满足 $\int_{4\pi} P(\hat{s}' \cdot \hat{s}) d\Omega = 1$, $d\Omega$ 为立体角微分元; $S(\mathbf{r}, \hat{s}, t)$ 描述荧光光源的空间角度分布.

然而公式(22)不易求解^[17].生物组织的强散射特性以及在光源为各向同性的情况下,通过对 Boltzmann 方程进行一阶球谐波近似展开,得到著名的漫射方程^[17,18]:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - D \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) + \mu_a \Phi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \quad (23)$$

$$D = 1 / (3(\mu_a + \mu_s')) \quad (24)$$

式中 $\Phi(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} L(\mathbf{r}, \hat{s}, t) d\Omega$, 称为流量率或光子密度^[18]; $\mu_s' = (1-g)\mu_s$, 称为约化散射系数, $g = \int_{4\pi} (\hat{s} \cdot \hat{s}') P(\hat{s} \cdot \hat{s}') d\Omega$ 为生物组织的各向异性系数.稳态情况下得到^[1,4]:

$$-\nabla \cdot (D(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r})) + \mu_a(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Omega \quad (25)$$

公式(25)是 BLT 的控制方程,是我们研究 BLT 的数学模型.下面给出该方程的边界条件.

假设周围是理想的黑暗环境,可以推得边界条件^[17,18]:

$$\Phi(\mathbf{r}) + 2A_n(\mathbf{r})D(\mathbf{r})(\hat{\nu} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r})) = 0, \mathbf{r} \in \partial\Omega \quad (26)$$

其中, $\hat{\nu}$ 是边界上的单位法向量, $A_n = (1+R(\mathbf{r})) / (1-R(\mathbf{r}))$, R 是介质折射率的函数,近似为^[17]

$$R \approx -1.4399n^{-2} + 0.7099n^{-1} + 0.6681 + 0.0636n \quad (27)$$

其中, n 是组织折射率与环境折射率的比值.对方程(25)进行变分,得到^[19]:

$$\int_{\Omega} (D(\mathbf{r})(\nabla u(\mathbf{r})) \cdot (\nabla v(\mathbf{r}) + \mu_a(\mathbf{r})u(\mathbf{r})v(\mathbf{r}))d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2A_n(\mathbf{r})} u(\mathbf{r})v(\mathbf{r})dA = \int_{\Omega} S(\mathbf{r})v(\mathbf{r})d\Omega \quad (28)$$

公式(28)是 BLT 问题的控制方程(25)的弱解形式.非截断小波有限元以公式(28)作为数学模型,对 BLT 进行求解.BLT 包括正问题研究和逆问题研究两个方面:正问题是已知光源分布和生物组织光学特性参数,求得表面光强分布;逆问题是已知体表光强和生物组织光学特性参数,反演出光源在生物体内的强度分布.本文仅限于讨论 BLT 正向问题.

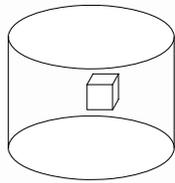
2.2 非截断小波有限元应用于BLT正向问题

为了对定义在一个三维区域上的函数进行逼近,首先必须构造一个三维小波函数.在此,我们采用一维小波的张量积来实现,基中三维母小波如下:

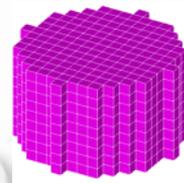
$$\phi_{3D}(x,y,z) = \phi(x)\phi(y)\phi(z) \quad (29)$$

通过对三维母小波分别在 x,y,z 轴上进行平移,就可以构成三维空间上相应小波空间中的一组完备基,然后使用这组基对未知函数进行逼近.

为了解漫射方程,首先确定单元分辨率.单元分辨率直接决定了网格剖分的粗细和逼近的精度,比如,图 4(a)是一个底面半径为 7.5mm,高为 9mm 的圆柱,其中接近圆柱中心的方块为光源,若选择剖分单元的长、宽、高分辨率均为 1mm,即以 1mm×1mm×1mm 的长方体为基本单元对该圆柱进行剖分,可以得到图 4(b)所示的剖分结果.



(a) Cylinder phantom where the cubic is the light source
(a) 圆柱仿体,其中的正方体表示光源



(b) Mesh of the phantom in wavelet finite element
(b) 小波有限元中仿体剖分情况

Fig.4

图 4

设在图 4(b)中所有有支撑的小波基为 $\{\phi_1(\mathbf{r}), \phi_2(\mathbf{r}), \dots, \phi_n(\mathbf{r})\}$, 其中, \mathbf{r} 是起始点为坐标原点、终点为 (x,y,z) 的向量,代表剖分区域内的一点.将未知函数近似为

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Omega \quad (30)$$

$$v(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n d_i \phi_i(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Omega \quad (31)$$

Ω 表示柱形区域.将公式(30)和公式(31)代入公式(28),得到:

$$\sum_{i=1}^n c_i \left(\int_{\Omega} D(\mathbf{r}) \nabla \phi_i(\mathbf{r}) \nabla \phi_j(\mathbf{r}) d\Omega + \int_{\Omega} \mu_a(\mathbf{r}) \phi_i(\mathbf{r}) \phi_j(\mathbf{r}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2A_n(\mathbf{r})} \phi_i(\mathbf{r}) \phi_j(\mathbf{r}) dA \right) = \int_{\Omega} S(\mathbf{r}) \phi_j(\mathbf{r}) d\Omega, j = 1, 2, \dots, n \quad (32)$$

这样就得到了含有 n 个未知数的 n 个方程,解方程可以得到 c_i 的值.再利用公式(30)可以得到任意点处的函数取值,具体仿真结果将在第 3 节中给出.

3 仿真结果与分析

我们编写了非截断小波有限的仿真程序并应用于 BLT 正向问题的研究中.下面给出仿真结果,并与传统有限元进行对比.仿真实验的光学参数见表 1^[1].

Table 1 Optical parameters used in simulations

表 1 仿真中用的光学参数

$\mu_a[\text{mm}^{-1}]$	$\mu_s[\text{mm}^{-1}]$	n	g
0.082	10.27	1.37	0.90

3.1 圆柱仿体

我们用高为 9mm,半径为 7.5mm 的圆柱仿体进行了仿真,光源是 3mm×3mm×3mm 的正方体,其中心沿 X 轴偏离仿体中心 2mm,强度是 1W/m³,如图 4(a)所示.小波有限元对仿体的剖分结果如图 4(b)所示,共 1 341 个单元,每个单元代表的实际大小为 1mm×1mm×1mm 的正方体.分别使用二阶小波有限元、四阶小波有限元、细剖有限元(在较细的剖分网格上进行有限元求解)和粗剖有限元(在较粗的剖分网格上进行有限元求解)进行了求解,图 5 给出了四阶小波有限元的求解结果和细剖有限元法的求解结果,其中,细剖有限元的结果使用含有 15 882 个四面体单元的剖分网格求得.

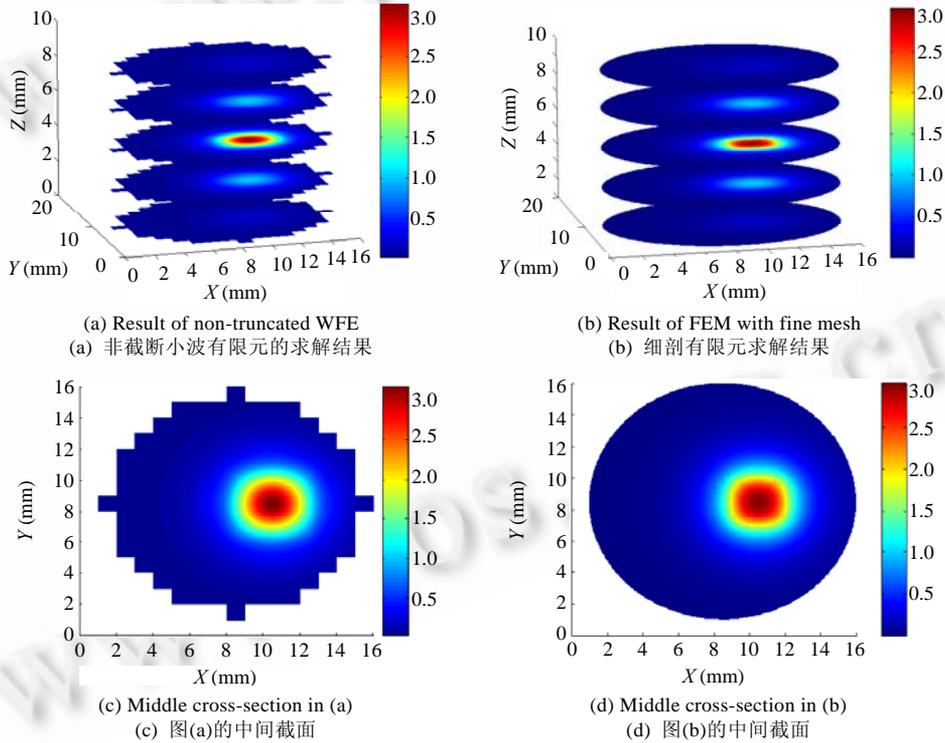


Fig.5

图 5

从图 5 可以看出,四阶小波有限元的求解结果与有限元剖分很细时的求解结果相吻合.为了进一步对比,我们作一条过光源中心、平行于 Z 轴的线段,对比各种方法求解的结果在这条线上的光强分布,结果如图 6 所示,其中,粗剖有限元法的结果使用含有 1 456 个四面体单元的剖分网格解得.从图 6 可以看出,在剖分单元数相当的情况下,小波有限元的求解结果好于传统有限元,四阶小波有限元法求解结果好于二阶小波有限元.仿真结果表明小波有限元应用于三维圆柱模型时的精确性,也表明小波有限元应用于圆柱形仿体的 BLT 正向问题中

的有效性.

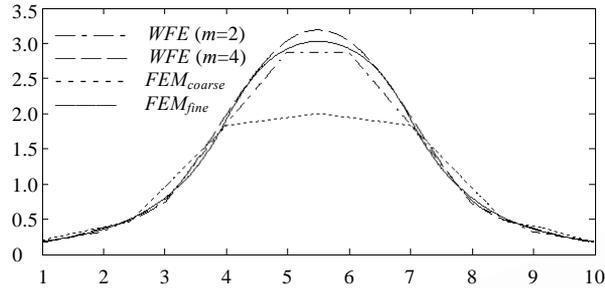
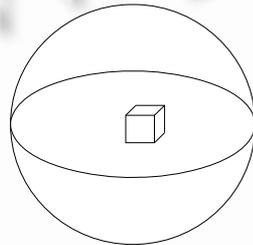


Fig.6 Distribution of Φ along the line, which paralleled with Z axis and pass through the phantom's center

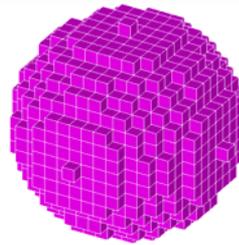
图 6 过仿体中心且平行于 Z 轴的直线上 Φ 的分布

3.2 圆球仿体

我们对半径为 5.5mm 的圆球仿体进行了仿真,光源大小为 3mm×3mm×3mm,中心沿 X 轴偏离仿体中心位置 1mm.光源强度为 $1\text{W}/\text{m}^3$.图 7 给出的是仿体模型及其使用小波有限元时的剖分示意图.本例中使用含有 515 个单元的剖分.



(a) Sphere phantom where the cubic is the light source
(a) 球形仿体模型,其中正方形为光源



(b) Mesh in wavelet finite element
(b) 小波有限元中的剖分情况

Fig.7

图 7

二阶小波有限元、四阶小波有限元、粗剖有限元及细剖有限元法分别被应用于该模型的仿真.四阶小波有限元求解的结果和细剖有限元法求解结果在图 8 中给出,其中,细剖有限元的剖分网格中含有 17 349 个四面体.从图 8 中可以看出,四阶小波有限元的求解结果与细剖有限元法相一致.图 9 给出了在过光源中心点且平行于 X 轴的直线上,二阶小波有限元、四阶小波有限元、细剖有限元和粗剖有限元求解结果的光强分布,其中,粗剖有限元结果由含有 726 个四面体单元的剖分网格求得.由图 9 可以看出,在剖分单元数相同的情况下,小波有限元的求解结果好于有限元法,四阶小波有限元结果好于二阶小波有限元的结果.

以上分析说明了小波有限元在剖分单元数较少的情况下可以获得较高的求解精度,也说明了小波有限元适用于圆球状仿体的 BLT 正向问题求解.

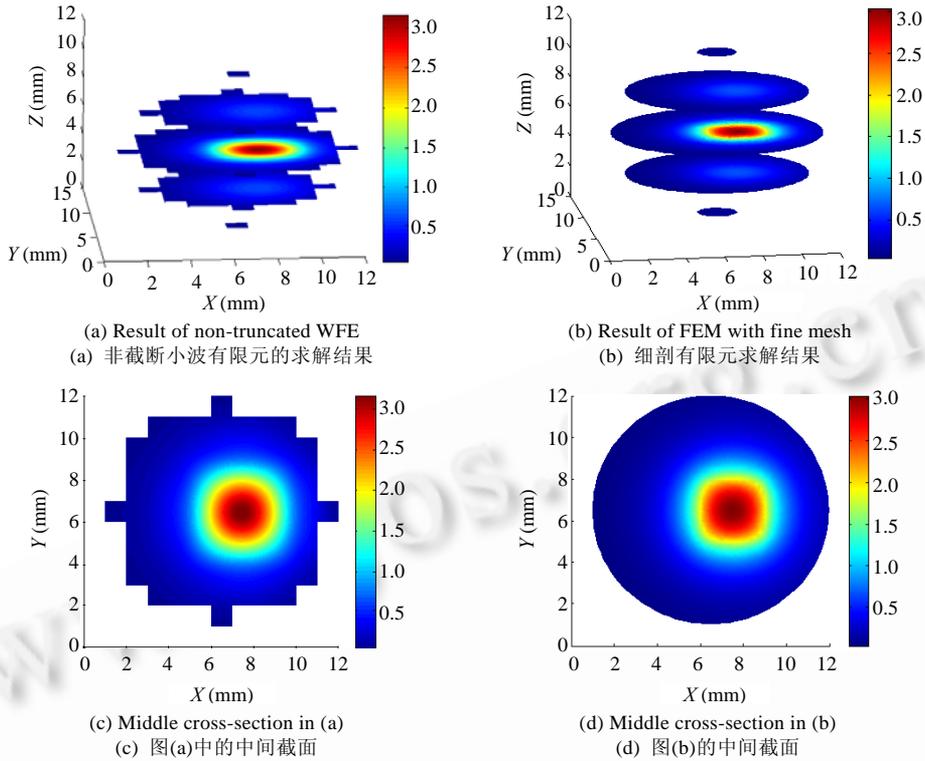


Fig.8

图 8

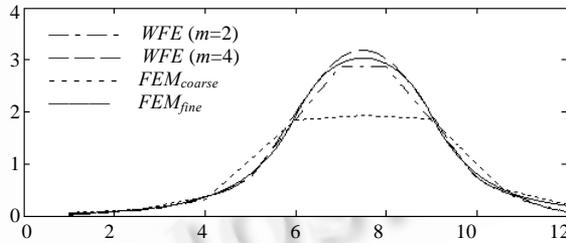


Fig.9 Distribution of ϕ along the line, which paralleled with X axis and pass through the phantom's center

图 9 过仿体中心且平行于 X 轴的直线上 ϕ 的分布

3.3 正方体仿体

前两组结果显示了非截断小波有限元可用于圆柱和圆球仿体的 BLT 正向问题求解.然而,非截断小波有限元的剖分结果在形状近似上要差于有限单元法.本节对图 10 所示的正方体模型进行了仿真,目的在于,在没有几何近似误差存在的情况下比较基的近似误差.仿体是长、宽、高均为 10mm 的正方体,光源中心位于沿 X,Y,Z 轴分别偏离仿体中心点 0.5mm 的位置,其中光源是长、宽、高均为 1mm 的正方体,光源强度为 $1W/m^3$.

图 11 给出了仿真结果的表面分布数据,其为从 X 轴负半轴看进去的结果.其中,图 11(a)是剖分后含有 17 235 个单元的有限单元法的求解结果;图 11(b)由含有 1 028 个单元的一阶有限单元法得到;图 11(c)和图 11(d)分别由含有 1 000 个单元的四阶和二阶小波有限元的仿真结果得到.从图 11 可以看出,在单元数相当的情况下,从整体上的逼近效果来看,小波有限元要优于有限单元法,并且表面图像要细腻得多,这也体现了小波基的优势.表 2 给

出了该表面上数据分布的最大、最小值,其中粗剖有限元结果出现负值,这是由基近似存在误差造成的.从表 2 可以再次看出,在剖分单元数相当的情况下,小波有限元的逼近效果优于有限单元法,而四阶小波有限元精度要优于二阶小波有限元.

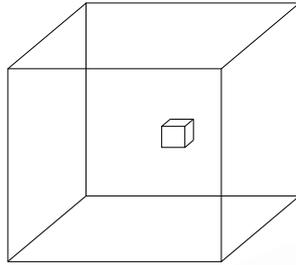


Fig.10 Cubic phantom where the smaller cubic is the light source

图 10 正方体仿体,其中小正方体为光源

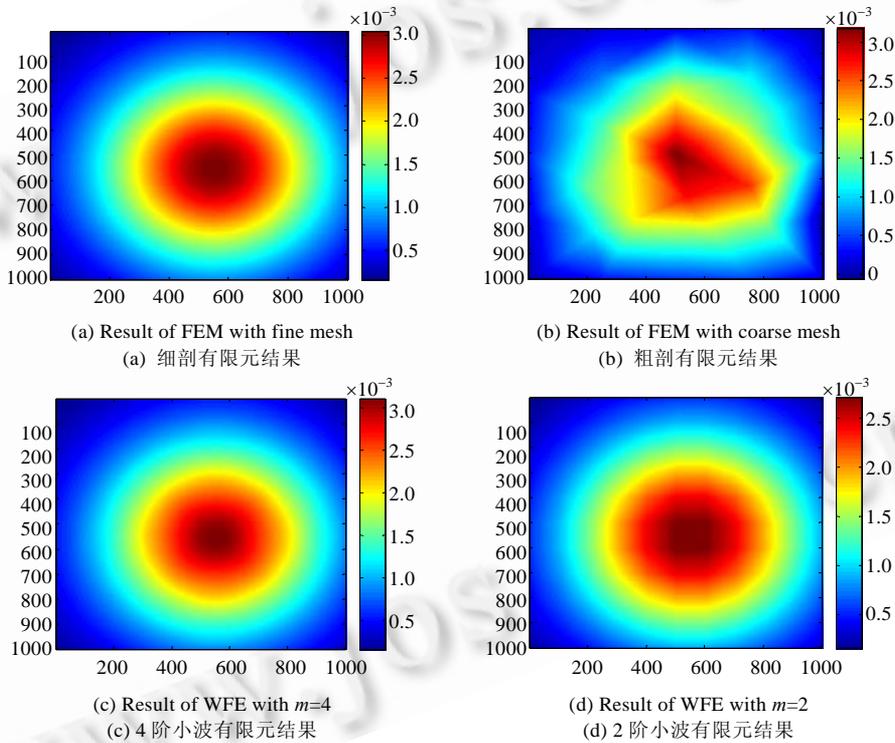


Fig.11 Simulation results of the cubic phantom, the graphs is screened from the negative direction of the X-axis

图 11 正方体模型的仿真结果,图中给出了从 X 轴负半轴看进去的结果

Table 2 Maximum and minimum value in Fig.11

表 2 图 11 结果的最大最小值

	Fig.11(a)	Fig.11(b)	Fig.11(c)	Fig.11(d)
Max	0.003 06	0.002 97	0.003 13	0.002 73
Min	1.35e-4	-1.28e-004	1.35e-4	1.41e-4

从以上仿真结果可以看出,在非截断小波有限元应用于三维形状体时,以较少的单元个数获得了与传统有限元相当的精度,降低了计算复杂度.

4 结束语

本文提出了一种非截断小波有限元算法,并将其应用于 BLT 正向问题的研究中.仿真结果显示了该算法的准确性和高效性.小波以紧支撑、多分辨和多尺度的特性在逼近函数方面优于传统有限元中的多项式.将小波应用于有限元领域是小波在应用方面的一大进展,也是有限元理论的一个进步.小波有限元的实际应用为工程中提供了一种新的工具,为奇异性检测和大梯度问题提供了一种新的解决思路.相信本文的算法将会使小波有限元在工程应用方面迈进一步.然而,本文的算法在对研究域的逼近方面与传统有限元还存在一些差距,我们下一步的工作将放在改善这一点以及进行自适应小波有限元算法的研究上,最终将小波有限元应用于 BLT 逆向问题方面的研究中.

致谢 在此,我们向对本文做出贡献的西安电子科技大学电子工程学院智能生物信息研究中心的老师和同学们,尤其是屈晓超老师表示感谢.

References:

- [1] Li H. Studies on forward and inverse problems in vivo bioluminescent tomography imaging [Ph.D. Thesis]. Beijing: Institute of Automation, the Chinese Academy of Sciences, 2005 (in Chinese with English abstract).
- [2] Hengerer A, Wunder A, Wagenaar DJ, Vija AH, Shah M, Grimm J. From genomics to clinical molecular imaging. Proc. of the IEEE, 2005,93(4):819–828.
- [3] Cong WX, Wang G, Kumar D, Liu Y, Jiang M, Wang LH, Hoffman EA, McLennan G, McCray PB, Zabner J, Cong A. Practical reconstruction method for bioluminescence tomography. Optics Express, 2005,13(8):6756–6771.
- [4] Lü YJ. Research of inverse problems in bioluminescence tomography (BLT) [Ph.D. Thesis]. Beijing: Institute of Automation, the Chinese Academy of Sciences, 2007 (in Chinese with English abstract).
- [5] Wang G, Li Y, Jiang M. Uniqueness theorems in bioluminescence tomography. Medical Physics, 2004,31(8):2289–2299.
- [6] Lü YJ, Tian J, Cong WX, Wang G, Luo J, Yang W, Li H. A multilevel adaptive finite element algorithm for bioluminescence tomography. Optics Express, 2006,14(8):8211–8223.
- [7] Li KT, Huang AX, Huang QH. Finite Element Method and Its Applications. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1984 (in Chinese).
- [8] Ma JX. Theory of daubechies wavelet finite element method and its engineering application [Ph.D. Thesis]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2003 (in Chinese with English abstract).
- [9] He ZJ, Chen XF, Li B, Xiang JW. The Theory of Wavelet Finite Element and Its Applications in Engineering. Beijing: Science Press, 2006 (in Chinese).
- [10] He ZJ, Chen XF. Advances in theory study and engineering application of wavelet finite element. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005,41(3):2–11 (in Chinese with English abstract).
- [11] Xiang JW, Chen XF, He ZJ, Dong HB. The construction of 1D wavelet finite elements for structural analysis. Computational Mechanics, 2007,40(2):325–339.
- [12] Jin JM, Xue PX, Xu YX, Zhu YL. Compactly supported non-tensor product form two dimension wavelet finite element. Applied Mathematics and Mechanics, 2006,27(12):1464–1476 (in Chinese with English abstract).
- [13] Chui CK. An Introduction to Wavelets. New York: Academic Press, 1992.
- [14] Wang G, Cong WX, Durairaj K, Qian X, Shen HO, Sinn P, Hoffman E, McLennan G, Henry M. In vivo mouse studies with bioluminescence tomography. Optics Express, 2006,14(17):7801–7809.
- [15] Cherry SR. In vivo molecular and genomic imaging: New challenges for imaging physics. Physics in Medicine and Biology, 2004, 49(3):R13–R48.
- [16] Li H, Tian J, Wang G. Photon propagation model of in vivo bioluminescent imaging based on Monte Carlo. Journal of Software, 2004,15(11):1709–1719 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/1709.htm>
- [17] Wang LHV, Wu HI. Biomedical Optics Principles and Imaging. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [18] Xu KX, Gao F, Zhao HJ. Biomedical Photonics. Beijing: Science Press, 2007 (in Chinese).

- [19] Lu JF, Guan Z. The Numerical Solution of Partial Differential Equations. 2nd ed., Beijing: Tsinghua University Press, 2004 (in Chinese).

附中文参考文献:

- [1] 李慧.在体生物光学成像前向及逆向问题研究[博士学位论文].北京:中国科学院自动化研究所,2005.
 [4] 吕玉杰.自发荧光断层成像逆向问题研究[博士学位论文].北京:中国科学院自动化研究所,2007.
 [7] 李开泰,黄艾香,黄庆怀.有限元方法及其应用.西安:西安交通大学出版社,1984.
 [8] 马军星.Daubechies 小波有限元理论及工程应用研究[博士学位论文].西安:西安交通大学,2003.
 [9] 何正嘉,陈雪峰,李兵,向家伟.小波有限元理论及其工程应用.北京:科学出版社,2006.
 [10] 何正嘉,陈雪峰.小波有限元理论研究及其工程进展.机械工程学报,2005,41(3):2-11.
 [12] 金坚明,薛鹏翔,徐应祥,朱亚莉.具有紧支撑的非张量积形式二维小波有限元.应用数学和力学,2006,27(12):1464-1476.
 [16] 李慧,田捷,王革.基于 Monte Carlo 在体生物光学成像的光子传输模型.软件学报,2004,15(11):1709-1719. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/1709.htm>
 [18] 徐可欣,高峰,赵会娟.生物医学光子学.北京:科学出版社,2007.
 [19] 陆金甫,关治.偏微分方程的数值解法.第2版,北京:清华大学出版社,2004.



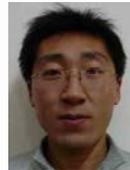
靳露冬(1984-),男,山西长治人,硕士,主要研究领域为分子影像学,医学图像处理.



黄鹤羽(1985-),女,硕士生,主要研究领域为分子影像学,医学图像处理.



吴艳(1964-),女,博士,教授,主要研究领域为信息融合,图像融合,智能生物信息处理.



陈雪利(1984-),男,博士生,主要研究领域为分子影像学,医学图像处理.



王卫卫(1970-),女,博士,副教授,主要研究领域为小波理论及其应用,图像处理,数字水印.



韩润强(1983-),男,硕士生,主要研究领域为分子影像学,医学图像处理.



任努努(1984-),男,博士生,主要研究领域为分子影像学,医学图像处理.