

梯度向量流各向异性扩散分析*

宁纪锋^{1,2+}, 吴成柯¹, 姜光¹, 刘侍刚³

¹(西安电子科技大学 综合业务网国家重点实验室, 陕西 西安 710071)

²(西北农林科技大学 信息工程学院, 陕西 杨凌 712100)

³(西安交通大学 电子与信息工程学院, 陕西 西安 710049)

Anisotropic Diffusion Analysis of Gradient Vector Flow

NING Ji-Feng^{1,2+}, WU Cheng-Ke¹, JIANG Guang¹, LIU Shi-Gang³

¹(State Key Laboratory of Integrated Services Networks, Xidian University, Xi'an 710071, China)

²(College of Information Engineering, Northwest A&F University, Yangling 712100, China)

³(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

+ Corresponding author: E-mail: jifeng_ning@hotmail.com

Ning JF, Wu CK, Jiang G, Liu SG. Anisotropic diffusion analysis of gradient vector flow. Journal of Software, 2010,21(4):612-619. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3523.htm>

Abstract: A new external force field for active contour model, called anisotropic gradient vector flow, is presented to solve the problem that gradient vector flow (GVF) is difficult to enter the indentation. The diffusion term of GVF is the isotropic and highly smooth Laplacian operator with the same diffusion speed along tangent and normal directions. The diffusion of Laplacian operator is actually decomposed into the tangent and normal directions by the local image structures. Diffusion along the tangent direction enhances the edge, while diffusion along the normal direction removes noise and propagates the force field. This paper develops an anisotropic gradient vector flow based on the analysis of diffusion process of GVF along tangent and normal directions. In the proposed method, the diffusion speeds along the normal and tangent directions are adaptively obtained by the local structure of the image. The experimental results show that compared with GVF, the proposed method considering these two diffusion actions can enter long, thin indentation and improve the segmentation.

Key words: gradient vector flow; anisotropic diffusion; Laplacian operator; active contour model; image segmentation

摘要: 为了解决梯度向量流场 (gradient vector flow, 简称 GVF) 难以进入目标凹部的问题, 提出了一种新的主动轮廓模型外力场——各向异性梯度向量流. GVF 的扩散项是各向同性且光滑性强的拉普拉斯算子, 它在各个方向的扩散速度相同. 拉普拉斯算子根据图像的局部结构可分为沿边界法线和切线方向的扩散, 沿切线方向的扩散具有增

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60532060, 60775020, 60805016 (国家自然科学基金); the "111 Project" of China under Grant No.B08038 (高等学校学科创新引智计划); the China Postdoctoral Science Foundation under Grant No.20080430201 (中国博士后基金); the Chinese University Scientific Fund under Grant No.QN2009091 (中央高校基本科研业务费专项资金)

Received 2008-04-07; Revised 2008-08-07; Accepted 2008-11-10

强边界的作用,而法线方向扩散具有去除噪音、扩散力场的作用.基于分析二者在扩散过程中的作用,提出了一种各向异性梯度向量流扩散方法,切线和法线方向的扩散速度可以根据图像的局部结构自适应地选择.实验结果表明,与GVF相比,所提出的方法考虑了扩散过程中法线和切线方向的不同作用,能够进入细长的凹部,并改进了分割结果.

关键词: 梯度向量流;各向异性扩散;拉普拉斯算子;主动轮廓模型;图像分割

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

在基于变分法的图像处理中,主动轮廓模型(active contour model),又称为“蛇”,被广泛应用于边界检测、图像分割和运动跟踪^[1-4]中.“蛇”模型 1988 年由 Kass 等人^[1]首次引入,它是由参数方程表示的曲线或曲面.“蛇”将一个能量函数和曲线相联系,在内力和外力的共同作用下,把寻找目标转换为曲线能量最小化的过程.内力由曲线决定,外力由图像导出.因此,外力也称为图像力.传统的外力场有小的捕获范围,对噪音和初始曲线敏感,难以进入目标的凹部.为了使曲线更好地向目标收敛,许多改进的外力场模型被提了出来,如气球模型和基于距离变换的外力场模型等^[5,6],但是它们仍然存在难以进入目标凹部的缺点.

梯度向量流(gradient vector flow,简称 GVF)是 Xu 等人^[7]提出的一个外力场,它通过一组偏微分方程对幅值图像的梯度向量进行扩散,有效解决了传统外力场捕获范围小、对噪音敏感和难以进入凹部的缺点,成为主动轮廓模型中经典的外力场,被广泛地加以研究^[8-10].在文献[11]中,GVF 被推广为 GGVF(generalized gradient vector flow),它克服了 GVF 难以进入细长凹部的缺点.文献[8]在极坐标下分析了梯度向量流的性能,但是实现过程较为复杂.文献[10]将其应用于生物医学图像分割.GVF 最早应用于参数主动轮廓模型,但是它对几何主动轮廓模型(geometric active contour)^[12,13]也同样适用.在文献[14,15]中,外力场在两种主动轮廓模型中的关系被进一步加以探讨.

在文献[9]中,基于分析 GVF 沿拉普拉斯算子法线方向扩散形成的力场性能,提出了一种力场 NGVF(GVF in the normal direction).NGVF 能够进入目标的细长凹部,但其缺乏切线方向的扩散,因而造成在边界缺口处的力场性能并不好.本文进一步分析拉普拉斯算子的切线和法线方向扩散在形成 GVF 中所起的不同作用,提出了一个各向异性的梯度向量流(anisotropic GVF),它能够根据图像的局部结构自适应地选择切线和法线方向的扩散速度.在保持 NGVF 优点的同时,克服了其在边界缺口处的不足.同时,与 GVF,GGVF 的性能相比,本文所提出的算法在边界保护方面也有一定的改进.

1 主动轮廓模型和传统外力场

蛇是一条曲线 $c(s)=(x(s),y(s),s \in [0,1])$,它在图像域中运动,使得如下能量泛函最小:

$$E_{snakes} = \int_0^1 \frac{1}{2} [\alpha |c'(s)|^2 + \beta |c''(s)|^2] + E_{ext}(c(s)) ds \quad (1)$$

式中, α 和 β 是调节曲线光滑性的权因子; $c'(s)$ 和 $c''(s)$ 分别表示曲线的一阶和二阶导数;外部能量 E_{ext} 由图像导出,它在感兴趣区域,如目标边界值呈现较小的值.

最小化公式(1),得到相应的欧拉方程:

$$\alpha c''(s) - \beta c'''(s) - \nabla E_{ext} = 0 \quad (2)$$

公式(2)可以看作是一个力平衡方程.

$$F_{int} + F_{ext} = 0 \quad (3)$$

式中,内力 $F_{int} = \alpha c''(s) - \beta c'''(s)$,外力 $F_{ext} = -\nabla E_{ext}$.

传统的外力一般从原始图像的梯度幅值图像直接导出.为了降低力场对噪音的敏感性,一般先对图像作高斯滤波,公式如下:

$$f(x,y) = G_{\sigma}(x,y) \times f(x,y) \quad (4)$$

$$f(x,y) = \|\nabla G_{\sigma}(x,y) \times f(x,y)\|^2 \quad (5)$$

式中, $G_{\sigma}(x,y)$ 是方差为 σ 的高斯函数.如果原始图像是一幅带有噪音的梯度幅值图像,则用公式(4)处理;如果是一

般灰度图像,则用公式(5)处理.然后对梯度幅值图像求负梯度,得到外力场 F_{ext} .较大的方差 σ 有助于增加力场的捕获范围,但同时也会造成边界偏移.同时,传统外力场存在着对噪音和初始曲线敏感、难以进入目标凹部等缺点.

2 GVF 和 GGVF 简介

2.1 Gradient vector flow

GVF 是一个矢量场 $V(x,y)=[u(x,y),v(x,y)]$,使得如下能量泛函最小化:

$$Q = \iint \mu(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + |\nabla f|^2 |V - \nabla f|^2 dx dy \quad (6)$$

式中 f 是梯度幅值图像,可以根据图像特点由公式(4)或公式(5)计算得到, μ 是调节第 1 项和第 2 项的权因子.

使用变分法,通过解下面欧拉方程可得 GVF:

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 u - (u - f_x)(f_x^2 + f_y^2) = 0 \\ \mu \nabla^2 v - (v - f_y)(f_x^2 + f_y^2) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中, ∇^2 是拉普拉斯(Laplacian)算子.

GVF 是一个动态力场,它沿着梯度的 x 和 y 方向同时进行扩散,在多次迭代后仍能保护图像的边界信息,有着非常好的收敛性,并且能够进入一般目标的凹部,成为应用最广泛的一个主动轮廓外力场模型.

2.2 Generalized gradient vector flow

然而,正如文献[11]所指出的,当目标边界是细长的凹腔时,GVF 仍难以进入.为了解决这个问题,一种新的外力场 GGVF——推广化的 GVF 被提了出来^[11],它的基本思想是在 GVF 中引入两个权值函数:

$$\begin{cases} g(\|\nabla f\|) \nabla^2 u - h(\|\nabla f\|)(u - f_x) = 0 \\ g(\|\nabla f\|) \nabla^2 v - h(\|\nabla f\|)(v - f_y) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

式中,

$$g(\|\nabla f\|) = e^{-(\|\nabla f\|/K)}, h(\|\nabla f\|) = 1 - g(\|\nabla f\|) \quad (9)$$

GVF 难以进入凹部是因为力场在边界附近被过度光滑,即在边界处的扩散速度过快,因此引入权值 $g(\|\nabla f\|)$ 和 $h(\|\nabla f\|)$.函数 $g(\cdot)$ 是关于梯度幅值的单调减函数,减小力场在强边界附近的扩散速度,使得力场能够进入细长的凹部, K 是调节力场光滑性和准确性的权值;而 $h(\cdot)$ 是梯度幅值的单调增函数,在强边界处,增加 $(u - f_x)$ 和 $(v - f_y)$ 的权重.但是,实验中发现 GGVF 的一个缺点是,随着迭代次数的增加,力场性能经常会发散,导致 Snake 方法分割失败.

3 GVF 的各向异性扩散分析

3.1 GVF 的扩散过程分析

在 GVF 扩散方程式(7)中, $\nabla^2 u, \nabla^2 v$ 是拉普拉斯扩散项, $(u - f_x)(f_x^2 + f_y^2), (v - f_y)(f_x^2 + f_y^2)$ 是数据项.拉普拉斯算子是非常强的光滑算子,不能保护边界;而数据项具有保护边界的作用. μ 是调节二者的权值因子.GVF 偏微分方程的作用结果是从力场边界开始向光滑区域扩散逐渐形成一个全局的向量场.以上分析表明,数据项只起到约束作用,而 GVF 的性能与拉普拉斯算子有着密切的关系.也就是说,GVF 的扩散过程依赖于拉普拉斯算子.同理,GGVF 作为 GVF 的一种推广,其扩散算子仍是拉普拉斯算子.因此,我们下面重点分析拉普拉斯算子.

拉普拉斯算子可以根据图像局部结构分解为沿切线方向和法线方向的扩散^[16],如图 1 所示.

进一步地,我们将拉普拉斯算子重写为

$$\nabla^2 f = f_{TT} + f_{NN} \quad (10)$$

式中, f_{TT} 和 f_{NN} 分别表示沿法线和切线方向的二阶导数:

$$f_{TT} = (f_x^2 f_{yy} + f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy}) / |\nabla f|^2 \tag{11}$$

$$f_{NN} = (f_x^2 f_{xx} + f_y^2 f_{yy} + 2f_x f_y f_{xy}) / |\nabla f|^2 \tag{12}$$

事实上,可分解为切线和法线方向加权求和的拉普拉斯算子是最经典的扩散算子.通过分析切线和法线方向的扩散,有助于我们更清晰地研究 GVF 的形成机理.因此,我们将 GVF 扩散方程重写为

$$\begin{cases} \mu(\alpha u_{TT} + \beta u_{NN}) - (u - f_x)(f_x^2 + f_y^2) = 0 \\ \mu(\alpha v_{TT} + \beta v_{NN}) - (v - f_y)(f_x^2 + f_y^2) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

式中, α 和 β 分别表示切线和法线方向的扩散权值.

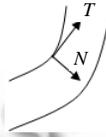


Fig.1 Tangent and normal directions of an image edge

图 1 图像边界的切线和法线方向

Caselles 等人^[2]提出了一套公理化的图像插值方法,方程(10)~方程(12)作为 3 个插值函数被加以分析.拉普拉斯算子是标准而经典的插值算子,沿法线方向的插值算子是一个新的插值算子,具有最好的插值效果;而沿切线方向的插值算子效果最差.事实上,图像插值和 GVF 扩散的基本思想是相同的,都是将边界信息逐渐向光滑区域扩散或插值的过程.我们首先单独分析切线方向和法线方向扩散在力场性能中所起的作用,得到如下两组偏微分方程:

$$\begin{cases} \mu u_{NN} - (u - f_x)(f_x^2 + f_y^2) = 0 \\ \mu v_{NN} - (v - f_y)(f_x^2 + f_y^2) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} \mu u_{TT} - (u - f_x)(f_x^2 + f_y^2) = 0 \\ \mu v_{TT} - (v - f_y)(f_x^2 + f_y^2) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

图 2 是 GVF 及其在切线(公式(14))和法线(公式(15))方向扩散的力场向量图($\mu=0.2, iterations=80$).可以看出,GVF(如图 2(b)所示)在力场边界缺口处不泄露,但在凹腔的中部力场分别指向两个方向,导致力场不能进入凹部.同时,只包含沿法线方向扩散的 GVF(如图 2(c)所示)也是一个全局的力场,说明法线方向的扩散是构成 GVF 的主要扩散因素,它能够进入细长的凹部.文献[9]研究了 GVF 沿法线方向的扩散,提出了改进的向量场 NGVF.我们注意到,它的力场在边界缺口处存在一定的泄露现象.

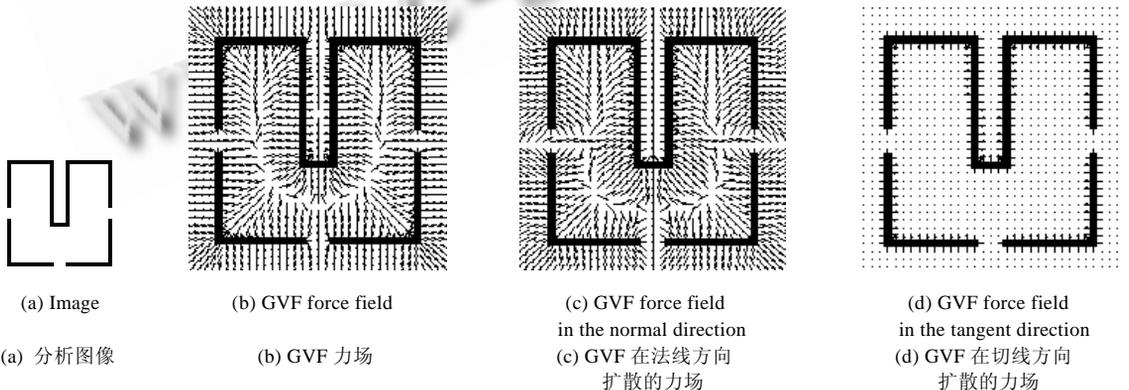


Fig.2 Diffusion analysis of GVF

图 2 GVF 扩散过程分析

从图 2(d)可以看出,沿切线方向的扩散仅在边界周围构成一个力场,起着增强边界的作用^[16],保证了力场在边界的缺口处不泄露.在 GVF 和 GGVF 的扩散过程中,拉普拉斯算子沿切线方向和法线方向的扩散速度相同.其区别在于,在 GVF 中,图像中每个点的扩散速度都是相同的;而在 GGVF 中,各点的扩散速度取决于该点的梯度幅值.本质上它们都是一种各向同性的外力场模型.

3.2 提出的方法

边界处的扩散速度决定着力场能否成功地进入凹部^[11].GVF 在每个点处的扩散速度相同,在边界处的扩散速度太快,导致力场难以进入凹部.GGVF 在边界处的扩散速度小于其在光滑区域的扩散速度,使其能够轻易进入凹部.但是,GGVF 是一个非线性的各向同性扩散方程,边界处的扩散速度小,意味着此处沿切线方向的扩散速度也被减弱,降低了 GGVF 对边界的增强能力.沿法线方向的扩散是形成梯度向量流的主要因素,只有满足边界处的扩散权值尽可能地小,光滑处扩散速度更快,力场才更容易进入凹部.

综上所述,我们提出一个各向异性扩散的梯度向量流(anisotropic gradient vector flow).

$$\begin{cases} \mu(\alpha u_{TT} + \beta u_{NN}) - (u - f_x)(f_x^2 + f_y^2) = 0 \\ \mu(\alpha v_{TT} + \beta v_{NN}) - (v - f_y)(f_x^2 + f_y^2) = 0 \\ \alpha = \exp(-(1 - f) / K^2) \\ \beta = 1 - \alpha \end{cases} \quad (16)$$

式中, f 是图像的梯度幅值图像.为了避免对绝对数值的依赖, f 被规范化为 $[0, 1]$.可见,沿切线方向的扩散速度 α 是关于边界强度的单调增函数,用于增强边界.而沿法线方向的扩散速度 β 是关于边界强度的单调减函数,在强边界处具有更小的扩散速度,使得力场能够更快地进入凹部, K 是对边界强度响应的参数.因此,各向异性扩散的梯度向量流能够实现切线方向和法线方向的扩散速度依据图像局部结构自适应地选择.另外,其离散化实现方案与原始的 GVF 基本过程类似,只需将拉普拉斯项分成沿切线和法线方向的两个正交项,它们分别可以利用公式(10)~公式(12)来实现.详细的差分实现参见文献[7].

本文所提出的 Anisotropic GVF 沿法线方向的扩散与 GGVF 的基本思想相一致,都是为了使力场容易进入凹部.与 GGVF 不同之处在于沿切线方向的扩散,GGVF 在强边界处沿切线方向的扩散速度较小,故保护边界的能力较弱,随着迭代次数的增多,边界将会造成一定的损失.本文提出的各向异性 GVF 在边界处沿切线方向的扩散速度仍较强,因此能够更好地增强边界.

在图 3 中,我们比较 GGVF 和 Anisotropic GVF 两个力场在细长凹部和边界缺口处的性能.图 3 显示,在细长凹部,GGVF 和 GVF 的力场方向都指向凹腔的底部,因此它们都能进入目标的凹部,克服了 GVF 难以进入目标凹部的缺点.在边界缺口处,二者的力场向量分别指向两边的边界,使得力场不泄露.

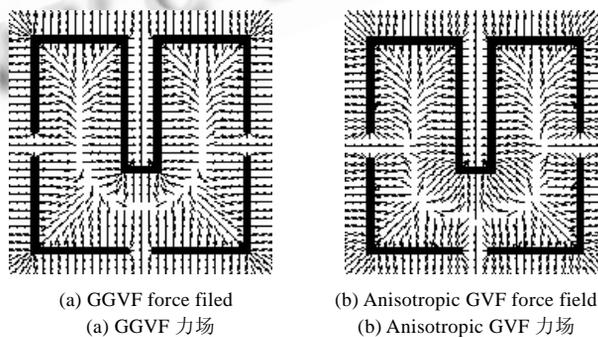


Fig.3 GGVF and Anisotropic GVF force fields

图 3 GGVF 和 Anisotropic GVF 力场

4 实验结果

进入凹部的能力、抑制噪音的能力和保护边界的能力是衡量力场分割性能的重要指标.在本节,我们将通过 3 个例子分别比较 GVF,GGVF,NGVF 和提出的 Anisotropic GVF 这 4 种力场在以上各方面的分割性能.

图 4(a)的图像含有细长的凹部,并且边界有若干缺口.4 个力场分别迭代 80 次时,它们的分割结果如图 4(b)~图 4(e)所示.可见,在细长凹部处,GGVF,NGVF 和 Anisotropic GVF 均能较好收敛,而 GVF 则不能进入.另外,由于 NGVF 缺乏切线方向的扩散,造成其在边界缺口处分割错误.显然,提出的 Anisotropic GVF 既保持了 NGVF 能够进入凹部的优点,又克服了其在边界缺口处分割效果差的缺点.

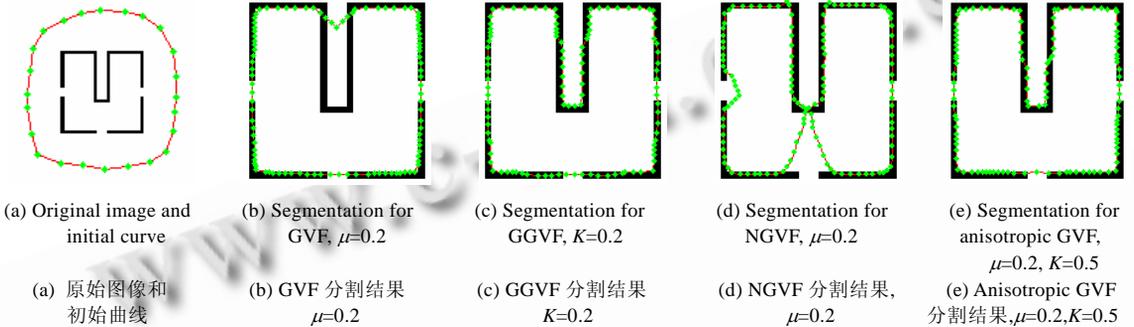


Fig.4 Segmentation comparisons of four force fields
图 4 4 种力场的分割比较

图 5(a)的图像含有脉冲噪音,使用双尺度高斯滤波器预处理之后,4 种力场分别迭代了 150 次,分割结果如图 5(c)~图 5(f)所示.可见,GVF,NGVF 和 Anisotropic GVF 对噪音不敏感,在图像凹部都得到了很好的分割效果,力场性能稳定;而 GGVF 却有一部分远离边界的力场背向边界,因而导致分割失败.

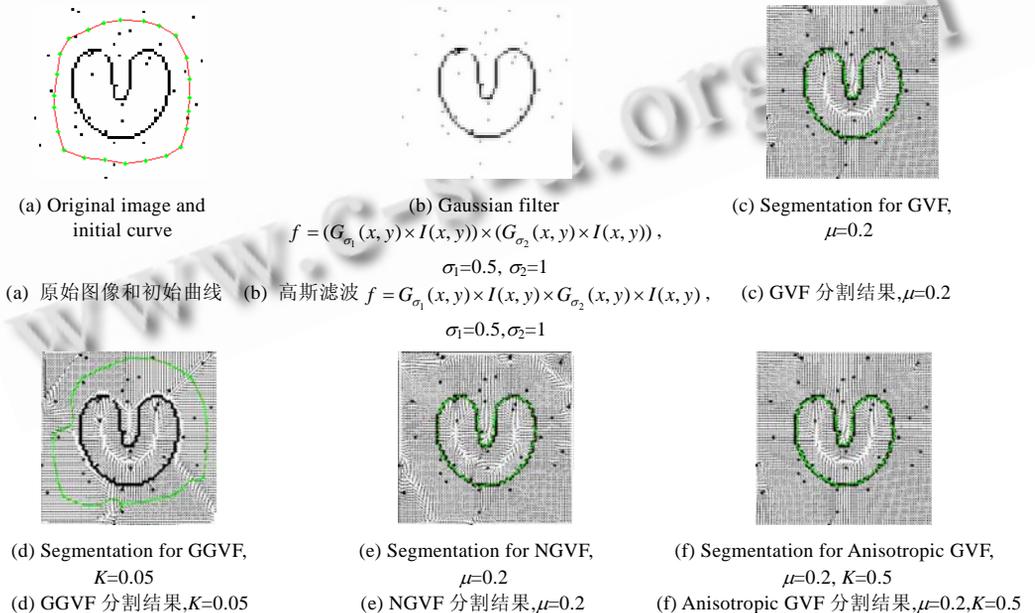


Fig.5 Segmentation comparisons for four force fields for the noisy image
图 5 对于噪音图像,4 种力场的分割比较

GVF 的扩散过程属于正扩散,其特点是随着扩散时间(即迭代次数)的增加,在去除噪音的同时,边界信息会有一些的损失.图 6 比较了 4 种方法对边界的保护作用.图 6(a)是一幅背景复杂的图像,初始曲线远离目标边界.NGVF 与 Anisotropic GVF 有类似的分割结果,为了节省空间,这里省略.从实验结果可以看出,在力场迭代次数较少时(30 次),Anisotropic GVF(包括 NGVF)的分割结果略优于 GVF 和 GGVF.而随着力场迭代次数的增加,GVF 和 GGVF 对边界的保护明显不如 Anisotropic GVF:当迭代次数为 100 时,图 6(e)显示,GVF 中目标边界几乎完全被光滑掉,分割结果近似成为一条曲线;图 6(g)和图 6(h)表明,GGVF 力场性能逐渐发散,得到了奇异的分割结果;而在图 6(j)和图 6(k)中,对于 Anisotropic GVF,虽然边界有一定的损失,但仍得到了相对较好的分割结果.可见:随着扩散时间(即迭代次数)的增加,GVF 力场中边界损失得较快,GGVF 的力场性能将变得不稳定;而 Anisotropic GVF 虽在边界处有一定损失,但在相同的迭代次数下仍优于 GVF 和 GGVF.

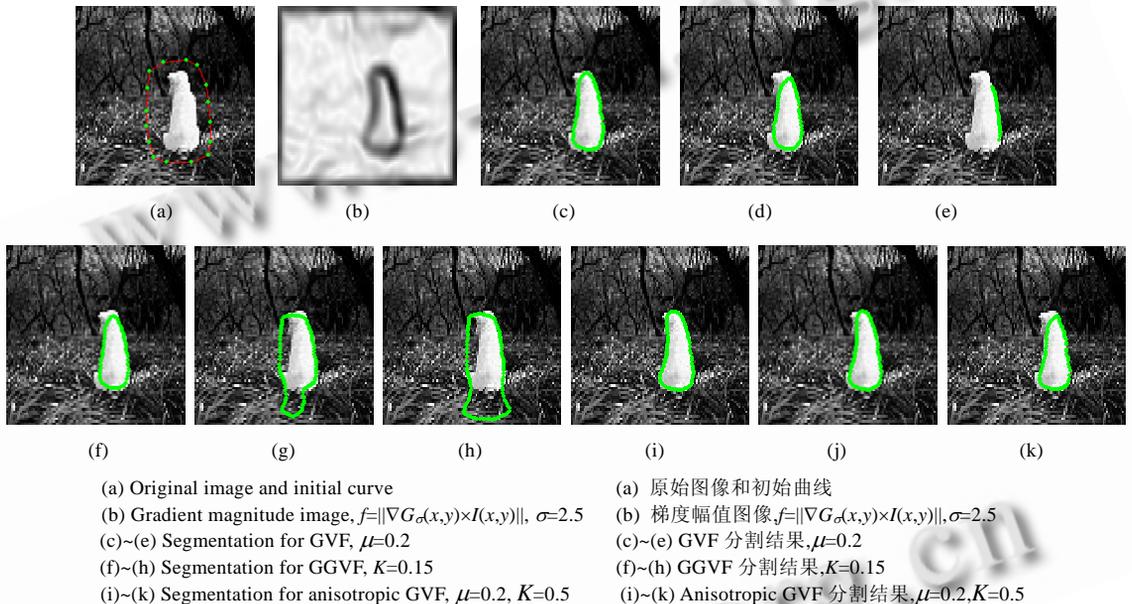


Fig.6 Segmentation of three force fields with iterations numbers 30, 60, 100 respectively

图 6 力场迭代次数分别为 30,60,100 时,3 种力场的分割结果

5 结论

基于分析 GVF 的扩散机理,本文提出了一种 Anisotropic GVF.该方法根据拉普拉斯算子的切线和法线方向在扩散中所起的不同作用,对 GVF,GGVF 和 NGVF 的扩散过程作了深入的讨论.沿法线方向的扩散是 GVF 形成的主要因素,沿切线方向的扩散对于保护边界、防止力场在边界缺口处泄露起着重要的作用.根据二者在 GVF 形成中所起作用的不同,我们设计了一种各向异性的梯度向量流扩散方法,法线和切线方向的扩散速度根据图像的局部特征自适应地选取.本文所提出的方法与经典的 GVF 及 GGVF 和 NGVF 类似,是一个全局的力场,对噪音和初始曲线相对不敏感.理论分析和实验结果表明,Anisotropic GVF 能够进入细长目标的凹部,克服了 NGVF 在边界缺口处收敛结果差的不足,同时也保持了 GVF 和 GGVF 两种力场的优点.

References:

- [1] Kass M, Withkin A, Terzopoulos D. Snakes: Active contour models. Int'l Journal of Computer Vision, 1988,1(4):321-331. [doi: 10.1007/BF00133570]
- [2] Caselles V, Morel J, Sbert C. An axiomatic approach to image interpolation. IEEE Trans. on Image Processing, 1998,7(3):376-386. [doi: 10.1109/83.661188]

- [3] Zhong Y, Jain AK, Dubuisson-Jolly M. Object tracking using deformable templates. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000,22(5):544–549. [doi: 10.1109/34.857008]
- [4] Hou ZQ, Han CZ. Active contour models based on force field analysis. *Chinese Journal of Computers*, 2004,37(6):743–749 (in Chinese with English abstract).
- [5] Cohen LD. On active contour models and balloons. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing (Image Understanding)*, 1991,53(2):211–218.
- [6] Cohen LD, Cohen I. Finite-Element methods for active contour models and balloons for 2-D and 3-D images. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1993,15(11):1131–1147. [doi: 10.1109/34.244675]
- [7] Xu C, Prince JL. Snakes, shapes, and gradient vector flow. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1998,7(3):359–369. [doi: 10.1109/83.661186]
- [8] Yu Z, Bajaj C. Image segmentation using gradient vector diffusion and region merging. In: *Proc. of the IEEE Int'l Conf. on Pattern Recognition*. Quebec: IEEE Press, 2002. 828–831. [doi: 10.1109/ICPR.2002.1048460]
- [9] Ning JF, Wu CK, Liu SG, Yang SQ. NGVF: An improved external force field for active contour model. *Pattern Recognition Letters*, 2007,28(1):58–63. [doi: 10.1016/j.patrec.2006.06.014]
- [10] Wang YQ, Jia YD. A novel approach for segmentation of cardiac magnetic resonance images. *Chinese Journal of Computers*, 2007, 30(1):129–136 (in Chinese with English abstract).
- [11] Xu C, Prince JL. Generalized gradient vector flow external forces for active contours. *Signal Processing*, 1998,71(2):131–139. [doi: 10.1016/S0165-1684(98)00140-6]
- [12] Malladi R, Sethian JA, Vermuri BC. Shape modeling with front propagation: A level set approach. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1995,17(2):158–175. [doi: 10.1109/34.368173]
- [13] Caselles V, Kimmel R, Sapiro G. Geodesic active contours. *Int'l Journal of Computer Vision*, 1997,10(1):61–79. [doi: 10.1023/A:1007979827043]
- [14] Xu C, Yezzi AJ, Prince JL. On the relationship between parametric and geometric active contours. In: *Proc. of the IEEE Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers*. California: IEEE Press, 2000. 483–489. [doi: 10.1109/ACSSC.2000.911003]
- [15] Sumengen B. Variational image segmentation and curve evolution on natural images [PH.D. Thesis]. Berkeley: University of California, 2004.
- [16] Aubert G, Pierre K. *Mathematical Problems in Image Processing (Partial Differential Equations and the Calculus of Variations)*. 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 2006. 69–72.

附中文参考文献:

- [4] 侯志强,韩崇昭.基于力场分析的主动轮廓模型. *计算机学报*,2004,27(6):743–749.
- [10] 王元全,贾云得.一种新的心脏核磁共振图像分割方法. *计算机学报*,2007,30(1):129–136.



宁纪锋(1975—),男,陕西韩城人,博士生,讲师,主要研究领域为计算机视觉,模式识别,图像分割.



吴成柯(1938—),男,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机视觉,深空通信,图像传输与处理.



姜光(1971—),男,博士,副教授,主要研究领域为计算机视觉,模式识别,三维重建.



刘侍刚(1973—),男,博士,讲师,主要研究领域为计算机视觉,图像处理.