ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.20, No.3, March 2009, pp.515−523
doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03381

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

逻辑系统 NMG 的满足性和紧致性*

周红军[1+], 王国俊[1,2]

[1](陕西师范大学 数学与信息科学学院,陕西 西安 710062)
[2](西安交通大学 基础科学研究中心,陕西 西安 710049)

Satisfiability and Compactness of NMG-Logic System

ZHOU Hong-Jun[1+], WANG Guo-Jun[1,2]

[1](College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)
[2](Research Center for Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710062, China)
+ Corresponding author: E-mail: hjzhou@stu.snnu.edu.cn

Zhou HJ, Wang GJ. Satisfiability and compactness of NMG-logic system. *Journal of Software*, 2009,20(3): 515−523. http://www.jos.org.cn/1000-9825/3381.htm

Abstract: Compactness is an important property of fuzzy logic systems. It was proved that Łukasiewicz propositional logic, Gödel propositional logic, Product propositional logic and the formal deductive system L* are all compact. The aim of the present paper is to prove the compactness of the fuzzy logic system NMG by characterizing maximally consistent theories and by proving the satisfiability of consistent theories over NMG.
Key words: fuzzy logic; logic system NMG; maximally consistent theory; satisifiability; compactness; Cantor space

摘 要: 紧致性是模糊逻辑的一个重要性质.现已经证明 Łukasiewicz 命题逻辑、Gödel 命题逻辑、乘积命题逻辑和形式系统 L*都是紧的.通过刻画逻辑系统 NMG 中的极大相容理论和证明 NMG 的满足性,进而证明了 NMG 也是紧的.
关键词: 模糊逻辑;逻辑系统 NMG;极大相容理论;满足性;紧致性;Cantor 空间
中图法分类号: TP18 **文献标识码**: A

模糊逻辑已经在智能控制等领域获得了成功的应用,有些技术甚至产业化,但其理论研究相对来说显得极为贫乏,以至于 Elkan 在第 11 届美国人工智能年会上的报告[1]引发了一场有关模糊逻辑的激烈争论[2].虽然 Elkan 的许多观点是错误的,但模糊逻辑缺乏系统深入的理论研究是不争的事实.我国学者在这方面作了一些有意义的研究工作[3−11].特别是建立了一种新型的模糊命题演算系统 L*[5]并将其成功地应用于模糊推理的研究,提出了模糊推理的全蕴涵三 I 算法[6],有效地改进了 Zadeh 的 CRI 算法[12],并利用部分重言式理论[7]将模糊推理纳入逻辑框架中[8,9].王三民教授等人又基于王国俊在文献[13]中提出的左连续三角模建立了另一种新的模糊逻辑系统 NMG[14],并证明了 NMG 的标准完备性.与此同时,欧洲学者也做了诸多研究工作[15−20].其中比较有影

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10771129 (国家自然科学基金); the Superior Dissertation Foundation of Shaanxi Normal University of China under Grant No.S2006YB06 (陕西师范大学优秀博士学位论文基金)
Received 2007-08-29; Accepted 2008-05-05

响的研究成果有 Hájek 的基本逻辑 BL[15],Esteva 和 Godo 的 Monoidal 三角模基逻辑 MTL[16]以及 Höhle 的 Monoidal 逻辑 ML[17].值得注意的是,几种重要的模糊逻辑系统,如 Łukasiewicz 命题逻辑、Gödel 命题逻辑、乘积命题逻辑都是 BL 和 MTL 的模式扩张[15,16].现已证明 L*和 NMG 也是 BL 和 MTL 的模式扩张[14,21].

紧致性是模糊逻辑的一个重要性质[22].所谓紧致性是指一组逻辑公式之集(称为理论)有模型当且仅当它的每个有限子理论有模型.文献[23]利用 Łukasiewicz 蕴涵算子的连续性证明了 Łukasiewicz 命题逻辑是紧致的;文献[24,25]通过对 Gödel 非运算的归纳讨论证明了 Gödel 命题逻辑和乘积命题逻辑也都是紧致的.由于上述 3 个逻辑系统的代数语义中的三角模都是连续的,而系统 L*和 NMG 中的三角模却不是连续的,所以文献[23–25]中的方法不适用于 L*和 NMG.我们在文献[26]中利用 L*的强完备性定理给出了 L*中极大相容理论的结构刻画,证明了每个极大相容理论必具有形式:$D(\{\varphi_1,\varphi_2,\dots\})$,这里 $\varphi_i\in\{p_i,\neg p_i,(\neg(p_i)^2)\,\&\,(\neg(\neg p_i)^2)\}$ $(i=1,2,\dots)$, $p_1,p_2,\dots$是系统 L*中的全体命题变元,进而证明了 L*是紧的.由于 NMG 系统的强完备性定理尚未得到证明[14],所以文献[26]中的方法也不适用于 NMG.本文采用关于公式复杂度的归纳法证明 NMG 中的极大相容理论也具有上述形式,进而证明 NMG 是紧的.本文的方法也适用于系统 L*(在本文的审稿期间,作者们把本文的方法用到了系统 L*中,给出了系统 L*中极大相容理论结构刻画的归纳证明[27]).

1 预备知识

文献[13]引入了一种新的左连续三角模及与其相伴随的剩余蕴涵:

$$x*y=\begin{cases}0, x+y\le\dfrac{1}{2},\\ x\wedge y, x+y>\dfrac{1}{2},\end{cases}\quad x\to y=\begin{cases}1, x\le y,\\ \left(\dfrac{1}{2}-x\right)\vee y, x>y,\end{cases}\quad x,y\in[0,1] \tag{1}$$

王三民教授等人在文献[14]中给出了上述三角模和蕴涵算子的公理化,引入了一种新的模糊逻辑系统 NMG.

定义 1[14]. 设 $S=\{p_1,p_2,\dots\}$,$F(S)$是由 $S\cup(\bar{0})$生成的$(\&,\to,\wedge)$型自由代数,称 $F(S)$中的元为系统 NMG 的公式(或命题),称 S 中的元为 NMG 的命题变元.在 $F(S)$中可以引入非运算$(\neg)$和析取运算$(\vee)$,如下:

$$\neg\varphi=\varphi\to\bar{0},\varphi\vee\psi=((\varphi\to\psi)\to\psi)\wedge((\psi\to\varphi)\to\varphi).$$

定义 2[14]. 系统 NMG 的公理包括:

(A_1) $(\varphi\to\psi)\to((\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi))$,

(A_2) $\varphi\,\&\,\psi\to\varphi$,

(A_3) $\varphi\&\psi\to\psi\&\varphi$,

(A_4) $\varphi\wedge\psi\to\varphi$,

(A_5) $\varphi\wedge\psi\to\psi\wedge\varphi$,

(A_6) $\varphi\&(\varphi\to\psi)\to\varphi\wedge\psi$,

(A_{7a}) $(\varphi\to(\psi\to\chi))\to(\varphi\&\psi\to\chi)$,

(A_{7b}) $(\varphi\&\psi\to\chi)\to(\varphi\to(\psi\to\chi))$,

(A_8) $((\varphi\to\psi)\to\chi)\to(((\psi\to\varphi)\to\chi)\to\chi)$,

(A9) $\bar{0}\to\varphi$,

(WNM) $(\varphi\&\psi\to\bar{0})\vee(\varphi\wedge\psi\to\varphi\&\psi)$,

(NMG) $(\neg\neg\varphi\to\varphi)\vee(\varphi\wedge\psi\to\varphi\&\psi)$.

系统 NMG 的推理规则是 MP 规则:由φ和$\varphi\to\psi$得ψ.

定义 3[14]. (i) $F(S)$的一个子集Γ称为系统 NMG 的一个逻辑理论,简称为理论.

(ii) 设Γ是一个理论,$\varphi\in F(S)$.从Γ到φ的推演是一个公式的有限序列$\varphi_1,\dots,\varphi_n$ 满足条件$\varphi_n=\varphi$,且对每一公式$\varphi_i(1\le i\le n)$,φ_i是系统 NMG 的公理,或$\varphi_i\in\Gamma$,或存在 $j,k\in\{1,\dots,i-1\}$使得φ_i是由φ_j和φ_k使用 MP 规则推得的结果.φ

称为Γ的结论,记为$\Gamma\vdash\varphi$.Γ的所有结论之集记为 $D(\Gamma)$.当$\Gamma=\varnothing$时,$\Gamma\vdash\varphi$简记为$\vdash\varphi$,并称φ为定理.

(iii) 设$\varphi,\psi\in F(S)$.如果$\vdash\varphi\to\psi$和$\vdash\psi\to\varphi$都成立,则称φ和ψ可证等价,记为$\varphi\sim\psi$.

(iv) 称系统NMG的一个理论Γ为不相容的,如果$\Gamma\vdash\bar{0}$成立,否则,称为相容的.

命题 1. 设$\varphi,\psi,\chi\in F(S)$,规定$\varphi^2=\varphi\&\varphi,\varphi^n=\varphi^{n-1}\&\varphi,n=3,4,\ldots$,则

(1) $\varphi\to(\psi\to\chi)\sim\varphi\&\psi\to\chi$,

(2) $\varphi\&\psi\sim\psi\&\varphi$,

(3) $\varphi^n\sim\varphi^2,n\geq 2$,

(4) $(\varphi\vee\psi)^2\sim\varphi^2\vee\psi^2$,

(5) $\neg(\varphi\vee\psi)\sim\neg\varphi\wedge\neg\psi$,

(6) $\neg(\varphi\wedge\psi)\sim\neg\varphi\vee\neg\psi$.

作为系统 NMG 的代数语义,文献[14]还引入了 NMG-代数的概念.

定义 4[14]. 一个 NMG-代数是一个满足下列条件的有界剩余格 $M=(M,\wedge,\vee,*,\to,0,1)$,这里$\wedge,\vee$分别是上下确界运算,$(*,\to)$是剩余伴随对:$x,y\in M$,

(1) $(x\to y)\vee(y\to x)=1$,

(2) $(x*y\to 0)\vee(x\wedge y\to x*y)=1$,

(3) $(\neg\neg x\to x)\vee(x\wedge y\to x*y)=1$, 其中 $\neg x=x\to 0$.

$W=([0,1],\wedge,\vee,*,\to,0,1)$ 是一个 NMG-代数,称此代数为标准 NMG 代数,又,$W_3=\left(\left\{0,\frac{1}{4},1\right\}\wedge,\vee,*,\to,0,1\right)$也是一个 NMG-代数,其中 $x\wedge y=\min\{x,y\}$, $x\vee y=\max\{x,y\}$,+和$\to$运算分别由式(1)定义.

定义 5. 设 W 是标准 NMG-代数,$\varphi,\psi\in F(S)$.

(i) 从 $F(S)$到 W 的同态 $e:F(S)\to W$,即, $e(\bar{0})=0$, $e(\varphi\&\psi)=e(\varphi)\times e(\psi)$,$e(\varphi\to\psi)=e(\varphi)\to e(\psi)$,$e(\varphi\wedge\psi)=e(\varphi)\wedge e(\psi)$,称为 $F(S)$的一个赋值.$F(S)$的全体赋值之集记为Ω.

(ii) 称公式φ为重言式,如果$\forall e\in\Omega,e(\varphi)=1$,记为$\models\varphi$;称$\varphi$为矛盾式,如果 $\forall e\in\Omega$,$e(\varphi)=0$.

(iii) 称赋值 e 为理论Γ的一个模型,如果$\forall\varphi\in\Gamma,e(\varphi)=1$;称公式$\varphi$为$\Gamma$的语义结论,记为$\Gamma\models\varphi$,如果对$\Gamma$的任意模型 $e,e(\varphi)=1$.

文献[14]已经证明了 NMG 的标准完备性定理,这表明系统 NMG 的语义和语构是和谐而统一的.

定理 1(标准完备性定理)[14]. 设$\varphi\in F(S)$,则$\vdash\varphi$当且仅当$\models\varphi$.

有了标准完备性定理,为验证一个公式是否为定理,可以验证它是否为重言式即可.

命题 2. 以下公式都是定理(重言式):

(1) $\varphi\to(\psi\to\varphi)$,

(2) $(\varphi\to\psi)\vee(\psi\to\varphi)$,

(3) $\varphi\&(\varphi\to\psi)\to\psi$,

(4) $(\varphi\to\psi)\&(\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi)$,

(5) $\varphi\to\neg\neg\varphi$,

(6) $(\varphi\to\psi)\to(\neg\psi\to\neg\varphi)$,

(7) $(\varphi\to\psi)\to((\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi))$,

(8) $(\varphi^2\to(\psi\to\chi))\to((\varphi^2\to\psi)\to(\varphi^2\to\chi))$.

证明:我们以式(8)为例进行证明.任取 $e\in\Omega$, 令 $x=e(\varphi), y=e(\psi), z=e(\chi)$,则 $x,y,z\in[0,1]$, 且 $e(\varphi^2)=e(\varphi)*e(\varphi)=e(\varphi)^2$.下面只需证明 $x^2\to(y\to z)\leq(x^2\to y)\to(x^2\to z)$.

在标准 NMG 代数$W=([0,1],\wedge,\vee,*,\to,0,1)$易验证$b\to c\leq(a\to b)\to(a\to c)$ $(a,b,c\in[0,1])$且$\to$关于第 2 变元是递增的,所以有

$$\begin{aligned} x^2 \to (y \to z) &\le x^2 \to ((x^2 \to y) \to (x^2 \to z)) \\ &= (x^2 \to y) \to (x^2 \to (x^2 \to z)) \\ &= (x^2 \to y) \to (x^4 \to z) \\ &= (x^2 \to y) \to (x^2 \to z). \end{aligned}$$

所以式(8)是一重言式,从而是定理. □

由命题 2 中的式(8)我们可以证明系统 NMG 中有如下形式的演绎定理,其证明类似于系统 L*中演绎定理的证明,请参见文献[28].

定理 2(演绎定理). 设$\varphi,\psi\in F(S)$,Γ是系统 NMG 的一个理论,则

$$\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\psi \text{当且仅当} \Gamma\vdash\varphi^2\to\psi.$$

2 极大相容理论的刻画及紧致性定理

由于系统 NMG 中的推理都是在有限步之内完成的,所以有

命题 3. 设Γ是一个理论,则Γ相容当且仅当Γ的每个有限子理论相容.

例 1:$S=\{p_1,p_2,\ldots\}$是相容理论因为 S 的每个子集$\{p_1,\ldots,p_n\}$都是相容的,$n\in N$.

定义 6. 一个相容理论是极大的,如果它不能真包含于某个相容理论.

容易看出,一个相容理论Γ是极大的当且仅当对任一公式$\varphi\in F(S)$,若$\varphi\notin\Gamma$,则 $\Gamma\cup\{\varphi\}$ 不相容.

命题 4. 每个相容理论都包含于一个极大相容理论中.

证明:设Γ是一个相容理论.因为$F(S)$是可数的,所以,所有公式是可列的.假设$\varphi_1,\varphi_2,\ldots$是系统 NMG 中所有的公式,构造相容理论序列如下:

$$\Gamma_0=\Gamma,$$

$$\Gamma_{i+1}=\begin{cases}\Gamma_i\cup\{\varphi_{i+1}\}, & \Gamma_i\cup\{\varphi_{i+1}\}\text{相容}\\ \Gamma_i, & \text{否}\end{cases}, i\ge 0.$$

令 $\Gamma^*=\bigcup_{i=0}^{\infty}\Gamma_i$,则$\Gamma^*$便是包含$\Gamma$的极大相容理论.

系统 NMG 中的极大相容理论有下述性质:

命题 5. 设Γ是极大相容理论,$\varphi,\psi\in F(S)$,则

(1) $\Gamma=D(\Gamma)$.

(2) $\varphi\&\psi\in\Gamma$当且仅当$\varphi\in\Gamma$且$\psi\in\Gamma$,特别地,$\varphi^2\in\Gamma$当且仅当$\varphi\in\Gamma$.

(3) $\varphi\wedge\psi\in\Gamma$当且仅当$\varphi\in\Gamma$且$\psi\in\Gamma$.

(4) $\varphi\wedge\psi\in\Gamma$当且仅当$\varphi\in\Gamma$或$\psi\in\Gamma$.

(5) 对任意$\varphi,\psi\in F(S)$,$\varphi\to\psi\in\Gamma$或$\psi\to\varphi\in\Gamma$.

(6) 对任意$\varphi\in F(S)$,φ和$(\neg\varphi^2)$有且仅有一个属于Γ.

(7) 对任意$\varphi\in F(S)$,φ,$\neg\varphi$和$(\neg\varphi^2)\&(\neg(\neg\varphi)^2)$有且仅有一个属于$\Gamma$.

(8) 对任意 $p\in S$,p,$\neg p$ 和$(\neg p^2)\&(\neg(\neg p)^2)$有且仅有一个属于$\Gamma$.

证明:(1) Γ的极大性保证它包含系统 NMG 中的所有定理.设$\varphi,\varphi\to\psi\in\Gamma$,如果$\psi\notin\Gamma$,则由$\Gamma$的极大性得知 $\Gamma\cup\{\psi\}$不相容.那么由系统 NMG 的演绎定理可知存在$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in\Gamma$,使得$\varphi_1{}^2\&\ldots\&\varphi_n{}^2\&\psi^2\to\bar{0}$是定理.由命题 2(3)可知$\varphi_1{}^2\&\ldots\&\varphi_n{}^2\&\varphi^2\&(\varphi\to\psi)^2\to\bar{0}$是定理,这意味着$\Gamma$是不相容的,矛盾.

(2) 设$\varphi\&\psi\in\Gamma$由于$\varphi\&\psi\to\varphi$是定理,所以$\varphi\&\psi\to\psi\in\Gamma$,那么由(1)知$\Gamma$对 MP 规则封闭,所以$\varphi\in\Gamma$.类似可证$\psi\in\Gamma$.反过来,设$\varphi,\psi\in\Gamma$,则由$\varphi\to(\psi\to\varphi\&\psi)$是定理,从而含于$\Gamma$中,运用两次 MP 得到$\varphi\&\psi\in\Gamma$.

(3) 由于$\varphi\wedge\psi\to\varphi$和$\varphi\to(\psi\to\varphi\wedge\psi)$也是定理,所以类似于(2)可证(3).

(4) 设$\varphi\vee\psi\in\Gamma$,且$\varphi\notin\Gamma,\psi\notin\Gamma$,则$\Gamma\cup\{\varphi\}$和$\Gamma\cup\{\psi\}$都不相容,从而由(1)和(2)可知存在$\varphi_1,\psi_1\in\Gamma$分别使得$\varphi_1{}^2\&\varphi^2\to\bar{0}$和$\psi_1{}^2\&\psi^2\to\bar{0}$是定理,则$(\varphi_1\&\psi_1)^2\&\varphi^2\to\bar{0}$和$(\varphi_1\&\psi_1)^2\&\psi^2\to\bar{0}$是定理,所以$((\varphi_1\&\psi_1)^2\&$

$\varphi^2 \to \bar{0}) \wedge ((\varphi_1 \& \psi_1)^2 \& \psi^2 \to \bar{0})$ 是定理.由于上述公式又可证等价于 $(\varphi_1 \& \psi_1)^2 \& (\varphi \vee \psi)^2 \to \bar{0}$,而 $\varphi_1 \& \psi_1 \in \Gamma$,所以Γ不相容,矛盾!反过来,设$\varphi \in \Gamma$或$\psi \in \Gamma$.由于 $\varphi \to \varphi \vee \psi$ 和 $\psi \to \varphi \vee \psi$ 都作为定理含在Γ中,所以由(1)知 $\varphi \vee \psi \in \Gamma$.

(5) 由命题 2(2)可知, $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ 是定理,所以它含于Γ中,再由(4)可知 $\varphi \to \psi \in \Gamma$ 或 $\psi \to \varphi \in \Gamma$.

(6) 显然φ和$\neg\varphi^2$ 不能同时含于Γ中,因为$\{\varphi,\varphi^2\}$是不相容的.下面只需证明φ和$\neg\varphi^2$ 不能同时不属于Γ,为此我们用反证法,假设$\varphi \notin \Gamma$且 $\neg\varphi^2 \notin \Gamma$.由Γ的极大性知 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 和 $\Gamma \cup \{\neg\varphi^2\}$ 均不相容,所以存在 $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma$ 使得 $\varphi_1{}^2 \& \varphi^2 \to \bar{0}$ 和 $\varphi_2{}^2 \& (\neg\varphi^2)^2 \to \bar{0}$ 是定理,即 $\varphi_1{}^2 \to \neg\varphi^2$ 和 $\varphi_2{}^2 \to \neg(\neg\varphi^2)^2$ 是定理.所以 $\varphi_1{}^2 \& \varphi_2{}^2 \to (\neg\varphi^2)^2 \& \neg(\neg\varphi^2)^2$ 是定理,又易见 $(\neg\varphi^2)^2 \& \neg(\neg\varphi^2)^2$ 是矛盾式,这说明 $\varphi_1{}^2 \& \varphi_2{}^2 \to \bar{0}$ 是定理,于是证得Γ是不相容的,矛盾!

(7) 由(6)我们只需证明如下事实: $\neg\varphi^2 \in \Gamma$ 当且仅当 $\neg\varphi$ 和 $(\neg\varphi^2) \& (\neg(\neg\varphi)^2)$ 有且仅有一个属于Γ.设 $\neg\varphi^2 \in \Gamma$,若 $\neg\varphi \notin \Gamma$,则由(6)可知 $\neg(\neg\varphi)^2 \in \Gamma$,再由(2)可知 $(\neg\varphi^2) \& (\neg(\neg\varphi)^2) \in \Gamma$;若 $(\neg\varphi^2) \& (\neg(\neg\varphi)^2) \notin \Gamma$,由(2)可知 $\neg(\neg\varphi)^2 \notin \Gamma$,所以由(6),可知 $\neg\varphi \in \Gamma$;又,显然 $\neg\varphi$ 和 $(\neg\varphi^2) \& (\neg(\neg\varphi)^2)$ 不能同时属于Γ,所以必要性成立.反过来,设 $\neg\varphi \in \Gamma$,由 $\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\varphi) \in \Gamma$,可知 $\varphi \to \neg\varphi \in \Gamma$,即 $\neg\varphi^2 \in \Gamma$;若 $(\neg\varphi^2) \& (\neg(\neg\varphi)^2) \in \Gamma$,则由(2)可知 $\neg\varphi^2 \in \Gamma$. □

(8) 作为(7)的特例当然成立.

由命题 5 可得一个极大相容理论极大的两个充要条件:

定理 3. 设Γ是一个相容理论,则Γ极大当且仅当Γ满足以下两条:

(i) $\Gamma=D(\Gamma)$,

(ii) 对任意$\varphi \in F(S)$,φ和$\neg\varphi^2$有且仅有一个属于Γ.

证明:由命题 5 只需证明充分性.设Γ'是一真包含Γ的理论.设 $\varphi \in \Gamma' - \Gamma$,由题设, $\neg\varphi^2 \in \Gamma$,从而 $\neg\varphi^2 \in \Gamma'$.因为 $\{\varphi, \neg\varphi^2\}$ 作为Γ'的子理论是不相容的,所以Γ'也不相容,这就证明了Γ是极大的.

定理 4. 设Γ是一个相容理论,则Γ极大当且仅当Γ满足以下两条:

(i) $\Gamma=D(\Gamma)$,

(ii) 对任意 $\varphi \in F(S)$, $\varphi, \neg\varphi$ 和 $(\neg\varphi^2) \& (\neg(\neg\varphi)^2)$ 有且仅有一个属于Γ.

证明:因为对一个逻辑闭$\Gamma=D(\Gamma)$理论而言,由命题 5(7)的证明得知,定理 4(ii)和定理 3(ii)是等价的,所以定理 4 成立. □

尽管定理 3 和定理 4 给出了极大相容理论的判定条件,但很难验证一个理论是否满足上述定理中的条件.在文献[26]中,我们利用系统 L*的强完备性定理在系统 L*中得到了更为简单、直观的极大相容理论的刻画.由于系统 NMG 的强完备性定理尚未得到证明[14],所以文献[26]中的方法暂不适用于 NMG.下面我们利用归纳法给出定理 4 的一个简化形式.

定理 5. 设Γ是一个相容理论,则Γ极大当且仅当Γ满足以下两条:

(i) $\Gamma=D(\Gamma)$,

(ii) 对任意命题变元 $p \in S$, $p, \neg p$ 和 $(\neg p^2) \& (\neg(\neg p)^2)$ 有且仅有一个属于Γ.

证明:由命题 5(8)可知必要性成立,下面我们证明充分性.由定理 4 我们只需证明:对任意 $\varphi \in F(S)$, $\varphi, \neg\varphi$ 和 $(\neg\varphi^2) \& (\neg(\neg\varphi)^2)$ 有且仅有一个属于Γ.为此,我们对公式φ的结构使用归纳法.

1. 若 $\varphi = \bar{0}$,则 $\neg\varphi \in \Gamma$,所以命题成立.

2. 若$\varphi=p$,命题显然成立.

3. 若$\varphi=\psi\&\chi$,且命题对ψ,χ已经成立.我们需要考虑以下情形:

3.1. 若$\psi,\chi \in \Gamma$.由于 $\psi \to (\chi \to \varphi)$ 是定理,所以由(i)知 $\psi \to (\chi \to \varphi) \in \Gamma$ 且Γ对 MP 规则封闭,所以运用两次 MP 规则有$\varphi \in \Gamma$.

3.2. 若 $\neg\psi \in \Gamma$ 或者 $\neg\chi \in \Gamma$,不妨设 $\neg\psi \in \Gamma$.由命题 2(6)可知 $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ 是定理,所以由(i)得知它含在Γ中.注意,此时 $\varphi \to \psi$ 是定理,也含在Γ中,所以有 $\neg\varphi \in \Gamma$.

3.3. 若 $\psi \in \Gamma$ 且 $(\neg\chi^2) \& (\neg(\neg\chi)^2) \in \Gamma$,则由(i)可知 $\neg\chi^2 \in \Gamma$, $\neg(\neg\chi)^2 \in \Gamma$.又由命题 2(1)可知

$\neg\chi^2 \to (\psi^2 \to \neg\chi^2)$ 是定理,从而含在Γ中,再由(i)可知 $\psi^2 \to \neg\chi^2 \in \Gamma$,而 $\psi^2 \to \neg\chi^2$ 可证等价于 $\neg\varphi^2$,所以 $\neg\varphi^2 \in \Gamma$.又,因为 $\psi \,\&\, \chi \to \varphi$ 是定理,所以由命题 1(1)可知 $\psi \to (\chi \to \varphi)$ 是定理.再由命题 2(6)可知 $\psi \to (\neg\varphi \to \neg\chi)$ 是定理,从而 $\psi^2 \to ((\neg\varphi)^2 \to (\neg\chi)^2)$ 是定理.再次利用命题 2(6), $\psi^2 \to (\neg(\neg\chi)^2 \to \neg(\neg\varphi)^2)$ 是定理,从而含在Γ中.运用两次 MP 规则得 $\neg(\neg\varphi)^2 \in \Gamma$.所以 $(\neg\varphi^2)\&(\neg(\neg\varphi)^2) \in \Gamma$.

3.4. 若$\chi\in\Gamma$且 $(\neg\psi^2)\&(\neg(\neg\psi)^2) \in \Gamma$,证明同 3.3.

3.5. 若 $(\neg\psi^2)\&(\neg(\neg\psi)^2) \in \Gamma$ 且 $(\neg\chi^2)\&(\neg(\neg\chi)^2) \in \Gamma$,则由(i)可知 $\neg\psi^2, \neg(\neg\psi)^2, \neg\chi^2, \neg(\neg\chi)^2 \in \Gamma$,再由(i)得 $(\neg\psi^2)^2, (\neg(\neg\psi)^2)^2, (\neg\chi^2)^2, (\neg(\neg\chi)^2)^2 \in \Gamma$.又易验证 $((\neg\psi^2)^2\&(\neg(\neg\psi)^2)^2\&(\neg\chi^2)^2\&(\neg(\neg\chi)^2)^2) \to \neg\varphi$ 是定理,所以运用 MP 规则得 $\neg\varphi \in \Gamma$.

综合情形 3.1~3.5 可知命题对 $\varphi = \psi \,\&\, \chi$ 时成立.

4. 若$\varphi=\psi\wedge\chi$,证明类似于情形 3.

5. 若$\varphi=\psi\to\chi$,且命题对ψ,χ已经成立.我们需要考虑以下情形:

5.1. 若 $\chi \in \Gamma$ 或 $\neg\psi \in \Gamma$,则由(i)及 $\chi \to \varphi$ 和 $\neg\psi \to \varphi$ 是定理可知 $\varphi \in \Gamma$.

5.2. 若 $\psi \in \Gamma$ 且 $\neg\chi \in \Gamma$.由 $(\psi \to \chi) \to (\neg\chi \to \neg\psi)$,即 $\varphi \to (\neg\chi \to (\psi \to \bar{0}))$ 是定理可知 $\neg\chi \to (\psi \to (\varphi \to \bar{0}))$ 是定理,从而含在Γ中.再由(i)和 MP 规则可知 $\neg\varphi \in \Gamma$.

5.3. 若 $\psi \in \Gamma$ 且 $(\neg\chi^2)\&(\neg(\neg\chi)^2) \in \Gamma$, 则 $\neg\chi^2 \in \Gamma, \neg(\neg\chi)^2 \in \Gamma$.由命题 2(3)可知 $\psi^2\&(\psi \to \chi)^2 \to \chi^2$ 是定理,从而 $\psi^2 \to ((\psi \to \chi)^2 \to \chi^2)$ 是定理,所以由(i)知 $(\psi \to \chi)^2 \to \chi^2 \in \Gamma$,即 $\varphi^2 \to \chi^2 \in \Gamma$.再由命题 2(6)可知 $(\varphi^2 \to \chi^2) \to (\neg\chi^2 \to \neg\varphi^2)$ 是定理,所以由(i)和 MP 规则知 $\neg\varphi^2 \in \Gamma$.类似可证 $\neg(\neg\varphi)^2 \in \Gamma$.所以 $(\neg\varphi^2)\&(\neg(\neg\varphi)^2) \in \Gamma$.

5.4. 若 $\neg\chi \in \Gamma$ 且 $(\neg\psi^2)\&(\neg(\neg\psi)^2) \in \Gamma$,则 $\neg\psi^2,\ \neg(\neg\psi)^2 \in \Gamma$.不难验证 $((\neg\psi^2)^2\&(\neg(\neg\psi)^2)^2\&(\neg\chi)^2) \to \neg\varphi^2$ 和 $((\neg\psi^2)^2\&(\neg(\neg\psi)^2)^2\&(\neg\chi)^2) \to \neg(\neg\varphi)^2$ 都是定理(注意若任取 $e\in\Omega$, 令 $x = e(\psi)$,则当 $x = \frac{1}{4}$ 时, $(\neg x^2)^2 * (\neg(\neg x)^2)^2 = 1$;当 $x \neq \frac{1}{4}$ 时 $(\neg x^2)^2 * (\neg(\neg x)^2)^2 = 0$),所以 $\neg\varphi^2,\ \neg(\neg\varphi)^2 \in \Gamma$,从而 $(\neg\varphi^2)\&(\neg(\neg\varphi)^2) \in \Gamma$.

5.5. 若 $(\neg\psi^2)\&(\neg(\neg\psi)^2) \in \Gamma$ 且 $(\neg\chi^2)\&(\neg(\neg\chi)^2) \in \Gamma$.可以验证 $((\neg\psi^2)^2\&(\neg(\neg\psi)^2)^2\&(\neg\chi^2)^2\&(\neg(\neg\chi)^2)^2) \to \varphi$ 是定理,所以$\varphi\in\Gamma$.

综合情形 5.1~5.5 可知,命题对 $\varphi = \psi \to \chi$ 时成立.

由上面的 1~5 可知定理 5 成立. □

例 2:(i) $D(S) = D\{p_1, p_2, \ldots\}$ 是极大相容理论,

(ii) 令 $Q = \{\alpha \mid \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots), \alpha_n \in \left\{0, \frac{1}{4}, 1\right\}, n \in N\}$, $\forall \alpha \in Q$,定义 $S(\alpha) = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$,其中

$$\varphi_n = \begin{cases} p_n, & \alpha_n = 1 \\ (\neg(p_n)^2) \,\&\, (\neg(\neg p_n)^2), & \alpha_n = \frac{1}{4}, \\ \neg p_n, & \alpha_n = 0 \end{cases}$$

则 $D(S(\alpha)) = D(\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\})$ 是极大相容理论.

例 2 中的极大相容理论的结构都非常简单,下面的两个命题告诉我们,例 2 给出了系统 NMG 的所有极大相容理论.

命题 6. $\forall \alpha, \beta \in Q$, $D(S(\alpha)) = D(S(\beta))$ 当且仅当$\alpha=\beta$.

证明:显然. □

命题 7. 设Γ是系统 NMG 的一个极大相容理论,则存在$\alpha\in Q$,使得$\Gamma=D(S(\alpha))$.

证明:设Γ是极大相容理论,则由定理 5 可知 $\forall\, p_n \in S, p_n, \neg p_n$ 和 $(\neg p_n{}^2)\&(\neg(\neg p_n)^2)$ 有且仅有一个属于Γ,相应

地,令 $\alpha_n=1,\alpha_n=0$ 和 $\alpha_n=\frac{1}{4}$ (n=1,2,…),则 $D(S(\alpha))\subseteq\Gamma$ ($\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...)$).由 $D(S(\alpha))$的极大性可知 $D(S(\alpha))=\Gamma$.

我们在下面的定理中总结有关系统 NMG 中的极大相容理论的主要结论.

定理 6. (i) $\{D(S(\alpha))\,|\,\alpha\in Q\}$ 是系统 NMG 中的所有极大相容理论集,

(ii) 系统 NMG 中恰有 3^{ω}个极大相容理论,

(iii) 映射 $D(S(\alpha))\mapsto e$ ($e(p_n)=\alpha_n,n\in N,\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...)$)建立了 $\{D(S(\alpha))\,|\,\alpha\in Q\}$ 与 $\{e\in\Omega\,|\,e(p)\in\left\{0,\frac{1}{4},1\right\}$ $p\in S\}$ 间的一一对应.

证明:由命题 5~命题 7 可知(i)和(ii)成立.下面证明(iii). $\forall D(S(\alpha)),\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...)\in Q$, $\forall p_n\in S$, 令 $e(p_n)=\alpha_n$, 得到一个映射 $e:S\to[0,1]$.由于 $F(S)$是由 $S\cup\{\bar{0}\}$ 生成的(&,→,∧)型自由代数,所以 e 可唯一地扩张成一个赋值,仍记为 e.所以(iii)中的映射定义是合理的.又,这一映射显然是单射.反过来,任取赋值 $e(e(p)\in\left\{0,\frac{1}{4},1\right\},p\in S)$,令 $\alpha=e\,|\,S=(e(p_1),e(p_2),...)$,则$\alpha\in Q$.这就证明了(iii)中的映射是满射. □

下面再给出系统 NMG 中相容理论极大的一个充要条件.

定理 7. 设Γ是系统 NMG 中的相容理论,则Γ是极大的当且仅当$\Gamma=D(\Gamma)$且Γ有唯一的模型.

注意,定理 7 不同于定理 6(iii).定理 6(iii)认为系统 NMG 中的极大相容理论和赋值 $e(e(p)\in\left\{0,\frac{1}{4},1\right\},p\in S)$ 是一一对应的,由证明知每个这样的赋值也恰是它所对应的极大相容理论的唯一模型,而在定理 7 中不再要求赋值满足条件 $(e(p)\in\left\{0,\frac{1}{4},1\right\},p\in S)$ 但要求$\Gamma=D(\Gamma)$.为证明定理 7,我们需要下面的引理.

引理 1[13]. 设 $W=([0,1],\wedge,\vee,*,\to,0,1)$ 和 $W_3=(\left\{0,\frac{1}{4},1\right\},\wedge,\vee,*,\to,0,1)$ 分别是标准 NMG 代数和三值 NMG 代数. 定义 $h:W\to W_3$ 如下:

$$h(x)=\begin{cases}1, & x>\frac{1}{4},\\ \frac{1}{4}, & x=\frac{1}{4}, \quad x\in W,\\ 0, & x<\frac{1}{4},\end{cases}$$

则 h 是从 W 到 W_3 的(∧,∨,*,→)型同态.

现在证明定理 7.由定理 6(iii)得知必要性成立,只需证明其充分性.设$\Gamma=D(\Gamma)$且Γ有唯一的模型 e.由定理 6(iii)只需证明存在 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...)\in Q$ 使得 $\forall n\in N,e(p_n)=\alpha_n$. 为此只需证明 $\forall n\in N$, $e(p_n)\in\left\{0,\frac{1}{4},1\right\}$.用反证法证明这一事实.假设存在 $n_0\in N$ 使得 $e(p_0)\notin\left\{0,\frac{1}{4},1\right\}$.设 h 是由引理 1 所定义的同态,则 h 和 e 的复合函数 $h\circ e$ 也是从 $F(S)$到 W 的一个同态,从而 $h\circ e$ 是 $F(S)$的一个赋值.任取 $\varphi\in\Gamma$, $h\circ e(\varphi)=h(e(\varphi))=h(1)=1$. 这说明 $h\circ e$ 也是Γ的一个模型.因为 $h\circ e(p_0)=h(e(p_0))\in\left\{0,\frac{1}{4},1\right\}$ 而 $e(p_0)\notin\left\{0,\frac{1}{4},1\right\}$,所以 $h\circ e\neq e$.从而说明Γ至少有两个不同的模型,矛盾!

由定理 7 可以证明系统 NMG 中的满足性定理.

定理 8(满足性定理). 设Γ是系统 NMG 中的相容理论,则存在赋值 e 使得 $e(\Gamma)\subseteq\{1\}$,即相容理论有模型.

证明:设Γ是相容理论,则由命题 4 得知存在极大相容理论Γ'使得 $\Gamma\subseteq\Gamma'$.由定理 7 得知Γ'有模型 e,所以 $e(\Gamma)\subseteq e(\Gamma')=\{1\}$. □

显然,有模型的理论必相容,所以由命题 3 得到一个理论相容的充要条件.

推论 1. 在系统 NMG 中,一个理论相容的充要条件是它有模型.

由推论 1 和命题 3 我们就得到了系统 NMG 的紧致性定理,即 NMG 是紧的.

定理 9(紧致性定理). 一个理论有模型当且仅当它的每个有限子理论有模型.

3 极大相容理论的拓扑刻画

在文献[26]中,我们还给出了系统 L*中极大相容理论之集的拓扑刻画,证明了全体极大相容理论之集带上适当的拓扑是一个 Cantor 空间.类似地,我们也可以给出系统 NMG 中极大相容理论之集的拓扑刻画,在此,我们只列出主要结果,关于具体细节请参见文献[26].在本节中,令 $M=\{D(S(\alpha))\mid\alpha\in Q\}$.

定义 7. $\forall\varphi\in F(S)$,令 $\upsilon(\varphi)=\{D(S(\alpha))\in M\mid\varphi\in D(S(\alpha))\}$, $\mathrm{B}=\{\upsilon(\varphi)|\varphi\in F(S)\}$, 则 B 是 M 上某拓扑(记为 τ)的拓扑基.

定理 10. 拓扑空间(M,τ)具有下列性质:

(i) (M,τ)是第 2 可数空间,

(ii) (M,τ)是拓扑紧空间,

(iii) (M,τ)中没有孤立点,

(iv) (M,τ)是零维空间,

(v) (M,τ)是 Cantor 空间.

4 结束语

本文首先刻画了系统 NMG 中的极大相容理论,给出了若干刻画条件,使我们完全掌握了 NMG 中的极大相容理论.并基于此证明了 NMG 是紧致的.最后又从拓扑角度研究了系统 NMG 中的极大相容理论,证明了全体极大相容理论之集是一个 Cantor 空间.所以本文的结果完善了系统 NMG 的理论体系.

本文的紧性仅仅考虑了赋值为 1 的模型,而模糊逻辑的赋值域为[0,1],那么能否也考虑赋值为 1/2/3/4,…的模型呢?就此,我们将另文讨论.

References:

[1] Elkan C. The paradoxical success of fuzzy logic. IEEE Expert, 1994,9(4):3−8.

[2] Berenji HR, Chandrasekaran B, Silva C JS, Attikiouzel Y, Dubois D, Prade H, Freksa C, Garcia O, Mamdani EH, Pelletier FJ, Ruspini EH, Turksen B, Vadiee N, Jamsbidi M, Wang PZ, Yager RR, Zadeh LA. Responses to Elkan. IEEE Expert, 1994,9(4): 9−49.

[3] Ying MS. A logic for approximate reasoning. The Journal of Symbolic Logic, 1994,59(3):830−837.

[4] Xu Y, Qin KY, Liu J. Lattice-Valued Logic. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[5] Wang GJ. A formal deductive system for fuzzy propositional calculus. Chinese Science Bulletin, 1997,42(10):1041−1045 (in Chinese with English abstract).

[6] Wang GJ. The full implicational triple I method of fuzzy reasoning. Science of China (Series E), 1999,29(1):43−53 (in Chinese with English abstract).

[7] Wang GJ. Theory of Σ-(α-tautologies) in revised Kleene system. Science of China (Series E), 1998,28(2):146−152 (in Chinese with English abstract).

[8] Wang GJ. On the logic foundation of fuzzy reasoning. Information Sciences, 1999,117(1):47−88.

[9] Wang GJ. Non-Classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning. Beijing: Science Press, 2000 (in Chinese).

[10] Pei DW, Wang GJ. The completeness and applications of the formal system *L**. Science of China (Series E), 2002,32(1):56−64 (in Chinese with English abstract).

[11] Wang SM, Wang BS, Wang GJ. A triangular norm-based propositional fuzzy logic. Fuzzy Sets and Systems, 2003,136(1):55−70.

[12] Zadeh LA. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics 1973,3(1):28−44.

[13] Wang GJ, Lan R. Theory of generalized tautologies in the system H_α. Journal of Shaanxi Normal Uiversity (Natural Science Edition), 2003,31(2):1−11 (in Chinese with English abstract).
[14] Wang SM, Wang BS, Pei DW. A fuzzy logic for an ordinal sum *t*-norm. Fuzzy Sets and Systems, 2005,149(2):297−307.
[15] Hάjek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
[16] Esteva F, Godo L. Monoidal *t*-norm based logic: Towards a logic for left-continuous *t*-norms. Fuzzy Sets and Systems, 2001,124(3):271−288.
[17] Höhle U. Commutative, residuated *l*-monoids. In: Höhle U, Klement EP, eds. Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999. 53−106.
[18] Novάk V, Perfilieva I, Mockor J. Mathematical Principles of Fuzzy Logic. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.
[19] Cignoli R, D'Ottaviano IML, Mundici D. Algebraic Foundation of Many-Valued Reasoning. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.
[20] Gottwald S. A Treatise on Many-Valued Logics. Baldock: Research Studies Press, 2001.
[21] Pei DW. On equivalent forms of fuzzy logic systems NM and IMTL. Fuzzy Sets and Systems, 2003,138(1):187−195.
[22] Ying MS. Compactness of fuzzy logic. Chinese Science Bulletin, 1998,43(4):379−383 (in Chinese with English abstract).
[23] Butnariu D, Klement EP, Zafrany S. On triangular norm-based propositional fuzzy logics. Fuzzy Sets and Systems, 1995,69(3): 241−255.
[24] Navara M. Satisfiability in fuzzy logics. Neural Network World, 2000,10(5):845−858.
[25] Cintula P, Navara M. Compactness of fuzzy logics. Fuzzy Sets and Systems, 2004,143(1):59−73.
[26] Zhou HJ, Wang GJ. Characterizations of maximal consistent theories in the formal deductive sysems L*(NM-logic) and Cantor space. Fuzzy Sets and Systems, 2007,158(23):2591−2604.
[27] Zhou HJ, Wang GJ. An inductive proof for characterizations of maximal consistent theories over the system L*. Journal of Shaanxi Normal Uiversity (Natural Science Edition), 2008,36(3):1−6 (in Chinese with English abstract).
[28] Wang GJ. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2006 (in Chinese).

附中文参考文献:

[5] 王国俊.模糊命题演算的一种形式演绎系统.科学通报,1997,42(10):1041−1045.
[6] 王国俊.模糊推理的全蕴涵三 I 算法.中国科学(E 辑),1999,29(1):43−53.
[7] 王国俊.修正的 Kleene 系统中的Σ-(α-重言式)理论.中国科学(E 辑),1998,28(2):146−152.
[9] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理.北京:科学出版社,2000.
[10] 裴道武,王国俊.形式系统 L*的完备性及其应用.中国科学(E 辑),2002,32(1):56−64.
[13] 王国俊,兰蓉.系统 H_α中的广义重言式理论.陕西师范大学学报(自然科学版),2003,31(2):1−11.
[22] 应明生.模糊逻辑的紧致性.科学通报,1998,43(4):379−383.
[27] 周红军,王国俊.系统 L*中极大相容理论结构刻画的归纳证明.陕西师范大学学报(自然科学版),2008,36(3):1−6.
[28] 王国俊.数理逻辑引论与归结原理.第 2 版,北京:科学出版社,2006.

周红军(1980－),男,山东莘县人,博士生,主要研究领域为非经典数理逻辑,不确定性推理.

王国俊(1935－),男,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为非经典数理逻辑,不确定性推理,模糊拓朴.