ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
*Journal of Software*, Vol.20, No.3, March 2009, pp.505−514
DOI: 10.3724/SP.J.1001.2009.03281

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

# Petri 网的步问题研究*

潘　理[1,2+], 赵卫东[1], 王志成[1], 周新民[1], 柳先辉[1]

[1](同济大学 企业数字化技术教育部工程研究中心,上海　200092)
[2](湖南理工学院 计算机与信息工程系,湖南 岳阳　414006)

## On the Step Problem for Petri Nets

PAN Li[1,2+], ZHAO Wei-Dong[1], WANG Zhi-Cheng[1], ZHOU Xin-Min[1], LIU Xian-Hui[1]

[1](Engineering Research Center for Enterprise Digital Technology, Tongji University, Shanghai 200092, China)
[2](Department of Computer and Information Engineering, Hu'nan Institute of Science and Technology, Yueyang 414006, China)
+ Corresponding author: E-mail: panli12345@sohu.com

**Pan L, Zhao WD, Wang ZC, Zhou XM, Liu XH. On the step problem for Petri nets. *Journal of Software*, 2009,20(3):505−514.** http://www.jos.org.cn/1000-9825/3281.htm

**Abstract**: In verification methods based on Petri nets, the step has been widely applied to the decrease of the interleaving of transition firings. To study the computational complexity of the algorithm for building a reachability graph based on steps, a new decision problem, the step problem, is proposed for Petri nets. The NP-completeness of this problem is proved by the reduction from the independent set problem. A polynomial-time algorithm for the maximal step problem is then presented. Furthermore, the maximum step problem is proved to be NP-equivalent. Finally, two kinds of sub-problems solvable in polynomial time are also discussed and analyzed.
**Key words**: Petri nets; concurrency; step problem; NP-completeness; NP-equivalence

**摘　要**: 在基于 Petri 网的模型验证方法中,步被广泛用于减少变迁实施产生的语义交织.为了研究基于步的构造算法的计算复杂性,提出步的判定问题,并证明该问题是 NP 完全的.进一步给出了极大步问题的多项式时间算法和最大步问题的 NP 等价性证明.最后分析两类特殊子问题是 P 问题.
**关键词**: Petri 网;发;步问题;NP 完全性;NP 等价性
**中图法分类号**: TP301　　**文献标识码**: A

Petri 网[1,2]是建模和分析并发系统的形式化模型,已广泛应用于网络通信、工业控制、并发程序设计等领域.Petri 网的并发可以交织(interleaving)执行,即按任意顺序逐个实施,也可以一步(step)执行,即一次实施一个并发使能变迁多重集(concurrently enabled transition multi-set).一般来讲,交织执行可能会导致状态空间的表示比必要的情形大指数倍.例如,一个系统在某个状态下有 *n* 个可以真并发的变迁发生,为了表示所有的发生序列,其

* Supported by the National High-Tech Research and Development Plan of China under Grant No.2007AA04Z1A7 (国家高技术研究发展计划(863)); the National Key Technology R&D Programs of China under Grant Nos.2006BAF01A35, 2006BAF01A42 (国家科技支撑计划); the Research Program of Science and Technology Commission of Shanghai Municipality of China under Grant Nos.072112026, 07dz11309, 08dz1126101 (上海市科委项目)

Received 2007-08-28; Accepted 2007-12-24

状态空间就要包含 $n!$个交织的结果序列.而基于步的构造方法(步覆盖图,covering step graph)[3]能够有效地克服这一缺点,它充分利用某些可实施变迁(尤其是那些与性质验证无关的变迁)之间的相互独立性,让这些变迁在同一步实施,即从某个状态同时实施,从而达到简化状态空间表示的目的,同时还能够保持对系统性质的验证能力.该技术已成功应用于基于Petri网的模型检验[3].即便如此,基于步的构造算法的时间复杂性也是不容乐观的.对一般Petri网而言,在某一状态下能执行的步的数目通常是使能变迁数目的指数倍.因此,是否存在一个通用的多项式时间算法来判定某一状态下是否存在一个大小至少为 $k$ 的步?或者说,关于步的判定问题是否是NP完全的?将直接决定着基于步的构造算法的计算复杂性.

尽管在很多文献中[4−7]已多次使用步或并发使能的概念,但作为一个判定问题来研究还是一个新课题. Mukund 利用变迁的并发使能和步的概念研究基于 Petri 网的步变迁系统(step transition system)[4];Jeffrey 等人使用步描述基于 Horn 子句逻辑目标导向网(horn clause logic goal-directed nets,简称 HCLGNs)的并行执行模型(parallel execution model)[5];Jacan 等人根据极大步来研究库所/变迁网的并发度(concurrency-degree)[6];Vernadat 等人利用步的概念对 Petri 网的模型检测问题进行状态空间化简[7].另一方面,关于 Petri 网的 NP 完全性研究,主要集中在以下几个方面:(i) 死锁问题(deadlock problem):对安全的自由选择网是 NP 完全的[8].(ii) 可达性问题(reachability problem):对无环网(acyclic nets)及安全无环网、冲突自由网(conflict-free net)、活的安全的自由选择网、正常无漏网(normal and sinkless nets)是 NP 完全的[9,10].(iii) 活性问题(liveness problem):对自由选择网是 NP 完全的[8].(iv) 合法实施序列问题(legal firing sequence problem):对一般 Petri 网,甚至某些自由选择网是NP 完全的[11].(v) 合成问题(synthesis problem):对基本网是 NP 完全的[12].另外,文献[10]还讨论了 Petri 网模型检验问题(model checking problem)的可判性.以上 NP 完全性研究均未涉及步问题.

本文首次提出步的判定问题,给出该问题的 NP 完全性证明,分析了极大步问题和最大步问题的计算复杂性,并讨论两类多项式时间可解的特殊子问题.第 2 节给出 Petri 网和步的基本定义.第 3 节提出步的判定问题、极大步问题和最大步问题,并分析它们的计算复杂性.第 4 节讨论两类特殊子问题.最后总结本文.

## 1 基本定义

### 1.1 Petri网

**定义 1**[1]. 给定集合 $A$,$A$ 上的一个多重集 $u$ 是一个函数 $u:A\rightarrow N$,这里 $N$ 是自然数集$\{0,1,2,...\}$.$\forall a\in A,u(a)$表示 $a$ 在 $u$ 中的出现次数.

用 $N^A$ 表示 $A$ 上所有多重集的集合.对 $u\in N^A$,记 $u$ 的基数$|u|=\Sigma_{a\in A}\,u(a)$.$u$ 是 $b$ 有界的($b$-bounded)当且仅当$\exists b\in N,\forall a\in A:u(a)\le b$,可简写为 $u\le b$.若 $u\le 1$,则 $u$ 退化为 $A$ 的一个子集.$\forall u,v\in N^A,k\in N$,定义多重集运算如下:(1) $u\le v$ iff $\forall a\in A:u(a)\le v(a)$;(2) $u+v$ iff $\forall a\in A:u(a)+v(a)$;(3) $k\cdot u$ iff $\forall a\in A:k\cdot u(a)$;(4) 若 $v\le u$,则 $u-v$ iff $\forall a\in A:u(a)-v(a)$.为方便起见,通常将多重集表示为具有多个重复元素的集合,例如:$A=\{a,b,c\}$,$u$ 是 $A$ 上多重集且 $u(a)=2,u(b)=1$ 和 $u(c)=0$,则 $u$ 可表示为$\{a,a,b\}$.$u(a)\ge 1$ 通常写成 $a\in u$.

为方便起见,通常将多重集表示为具有多个重复元素的集合,例如:$A=\{a,b,c\}$,$u$ 是 $A$ 上多重集且 $u(a)=2,u(b)=1$ 和 $u(c)=0$,则 $u$ 可以表示为$\{a,a,b\}$.$u(a)\ge 1$ 通常写成 $a\in u$.

**定义 2**[2]. 一个 Petri 网(库所/变迁网)是一个四元组$\Sigma=(P,T,F,W)$,其中:

(1) $P=\{p_1,p_2,\ldots,p_m\}$是有限非空库所集;

(2) $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$是有限非空变迁集,且 $P\cap T=\varnothing\wedge P\cup T\ne\varnothing$;

(3) $F\subseteq P\times T\cup T\times P$ 是流关系,且 $\mathrm{dom}(F)\cup\mathrm{cod}(F)=P\cup T$;$(P,T;F)$构成一个有向网;

(4) $W: F\rightarrow N$ 是权函数.

$W(p,t)=i(i>0)$当且仅当存在一条从库所 $p$ 到变迁 $t$ 的权值为 $i$ 的弧;$W(p,t)=0$ 当且仅当不存在从库所 $p$ 到变迁 $t$ 的弧.用${}^\bullet t=\{p|(p,t)\in F\}$表示变迁 $t$ 的输入库所集合,$p^\bullet=\{t|(p,t)\in F\}$表示库所 $p$ 的输出变迁集合,$W(\cdot,t)=\{W(p_1,t),W(p_2,t),\ldots,W(p_m,t)\}$表示 $t$ 的输入库所多重集.$W(p,\cdot)=\{W(p,t_1),W(p,t_2),\ldots,W(p,t_n)\}$表示 $p$ 的输出变迁多重集.对${}^\bullet p,t^\bullet,W(t,\cdot)$和 $W(\cdot,p)$也类似定义.

**定义 3**[1]. 一个 Petri 网的标识 $M\in N^P$ 是 $P$ 上的一个多重集,$M(p)$表示出现在库所 $p$ 中的托肯(token)数.

初始标识用 $M_0$ 表示.$(\Sigma,M_0)$构成 Petri 网系统.$(\Sigma,M_0)$的定义只反映 Petri 网的静态特征,即网结构和初始资源分布.Petri 网的动态行为由变迁的使能条件和实施规则刻画,表现为标识的演变过程.

**定义 4**[1]. 在 Petri 网Σ中,若 $W(\cdot,t)\le M$,则称变迁 $t$ 在标识 $M$ 是使能的(enabled).记为 $M[t\rangle_\Sigma$.用 $En_\Sigma(M)=\{t|M[t\rangle_\Sigma\}$表示 Petri 网$\Sigma$在标识 $M$ 的所有使能变迁的集合.

**定义 5**[1]. 如果变迁 $t\in T$ 在标识 $M$ 是使能的,那么 $t$ 可以被实施(fire)并产生一个新的后继标识 $M'$,且 $M'=M-W(\cdot,t)+W(t,\cdot)$.记为 $M[t\rangle_\Sigma M'$.用 $Reach_\Sigma(M_0)$表示$(\Sigma,M_0)$的所有可达标识的集合,可递归定义为:(i) $M_0\in Reach_\Sigma(M_0)$, (ii) $M\in Reach_\Sigma(M_0)\wedge(\exists t\in T{:}M[t\rangle_\Sigma M')\rightarrow M'\in Reach_\Sigma(M_0)$.

**定义 6**[1]. 对于 Petri 网系统$(\Sigma,M_0)$,若$\exists b\in N,\forall M\in Reach_\Sigma(M_0){:}M(p)\le b$,则称库所 $p$ 是 $b$ 有界的.若$(\Sigma,M_0)$的所有库所都是 $b$ 有界的,则称$(\Sigma,M_0)$是 $b$ 有界的.特别地,若$(\Sigma,M_0)$是 1 有界的,则称$(\Sigma,M_0)$是安全的(safe).

### 1.2 步

并发是指变迁(事件)之间因果上无依赖性.按网论的观点,局部环境不相交的变迁可以完全独立(并发)地实施.考虑定义 2 中库所容量默认为无限,故系统没有冲撞(contact),因此变迁的并发只受变迁的输入库所集中托肯的影响,变迁输出库所集中的托肯不影响变迁的使能与实施.

**定义 7**[4]. 若 $W(\cdot,t_1)+W(\cdot,t_2)\le M$,则称变迁 $t_1$ 和 $t_2$ 在标识 $M$ 是并发使能的,记为 $t_1\|_M t_2$.

**定义 8**[1]. 变迁的使能度 $d_M\in N^T$ 是变迁集 $T$ 上的一个多重集,这里 $d_M(t)=\min\{M(p)/W(p,t)|p\in{}^\bullet t\}$是变迁 $t$ 的使能度(enabling degree).若 $d_M(t)\ge 2$,则称 $t$ 具有多重使能(multiple enabledness).

**定义 9**. 给定变迁集 $C\subseteq T$,若$\Sigma_{t\in C}W(\cdot,t)\le M$,则称 $C$ 在标识 $M$ 是一个并发使能变迁集(concurrently enabled transition set).给定并发使能变迁集 $C$,若不存在其他并发使能变迁集 $C'$,使 $C\subset C'$,则称 $C$ 是极大并发使能变迁集;若不存在其他并发使能变迁集 $C'$,使$|C'|>|C|$,则称 $C$ 是的最大并发使能变迁集.

**定义 10**[1]. 若两个变迁 $t_1$ 和 $t_2$ 共享至少一个输入库所,即${}^\bullet t_1\cap{}^\bullet t_2\ne\varnothing$,则称 $t_1$ 和 $t_2$ 是结构冲突的.

**命题 1**. 给定一个安全的 Petri 网系统$(\Sigma,M_0),\forall M\in Reach_\Sigma(M_0),\forall C\subseteq En_\Sigma(M)$,$C$ 是并发使能变迁集当且仅当 $C$ 中任何两个变迁均无结构冲突.

证明:若$\forall t_1,t_2\in C(t_1\ne t_2){:}t_1\cap t_2=\varnothing$,则$\neg\exists p\in P{:}W(p,t_1)>0$ 且 $W(p,t_2)>0$.由于 $C\subseteq En_\Sigma(M)$,即$\forall t\in C{:}W(\cdot,t)\le M$,故$\Sigma_{t\in C}W(\cdot,t)\le M$,即 $C$ 是并发使能变迁集.若$\exists t_1,t_2\in C(t_1\ne t_2){:}t_1\cap t_2\ne\varnothing$,则$\exists p'\in t_1\cap t_2{:}W(p',t_1)>0$ 且 $W(p',t_2)>0$.于是 $W(p',t_1)+W(p',t_2)\ge 2$.由于$(\Sigma,M_0)$是安全的,即 $M(p')\le 1$,于是有 $W(p',t_1)+W(p',t_2)>M(p')$,故 $C$ 不是并发使能变迁集. □

与安全网不同,在一般 Petri 网中,可能出现多重使能现象,因此需要考虑变迁的服务语义问题(单服务员语义、多服务员语义和无限服务员语义).对于后两种服务语义,实质上是允许变迁与自身并发,这时就需要引入多重集的概念,来推广前面并发使能变迁集的定义.

**定义 11**. 给定变迁多重集 $u\in N^T$,若$\Sigma_{t\in T}u(t)\cdot W(\cdot,t)\le M$,则称 $u$ 在标识 $M$ 是步,用 $ST_\Sigma(M)$表示在标识 $M$ 所有步的集合.若$\neg\exists u'\in ST_\Sigma(M){:}u<u'$,则称步 $u$ 是极大步,用 $MST_\Sigma(M)$表示在标识 $M$ 所有极大步的集合.若$\forall u'\in ST_\Sigma(M){:}|u|\ge|u'|$,则称步 $u$ 是最大步,用 $MMST_\Sigma(M)$表示在标识 $M$ 所有最大步的集合.

如图 1 所示,在单服务员语义下,$\{t_1,t_2,t_4\}$和$\{t_1,t_3,t_4\}$是极(最)大并发使能变迁集;在多服务员语义下(假设每个变迁 2 个服务员),则$\{t_1,t_1,t_2,t_4\}$和$\{t_1,t_1,t_3,t_4\}$是极(最)大步;在无限服务员语义下,$\{t_1,t_1,t_1,t_3,t_4\}$和$\{t_1,t_1,t_2,t_4\}$是极大步,其中$\{t_1,t_1,t_1,t_3,t_4\}$是最大步.

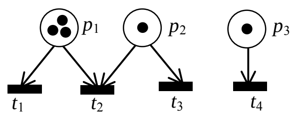


Fig.1 Maximal step and maximum step
图 1 极大步和最大步

**命题 2**. 给定 Petri 网系统$(\Sigma,M_0),\forall M\in Reach_\Sigma(M_0),\forall u\in N^T$.

(1) 若 $u\in ST_\Sigma(M)$,则$\forall t\in T{:}u(t)\le d_M(t)$;

(2) 若 $\max\{u(t)|t\in T\}>\max\{M(p)|p\in P\}$,则 $u\notin ST_\Sigma(M)$.

证明:(1) 若 $u\in ST_\Sigma(M)$,则$\Sigma_{t\in T}u(t)\cdot W(\cdot,t)\le M$,即$\forall t\in T{:}u(t)\cdot W(\cdot,t)\le M$,于是有$\forall t\in T,\forall p\in{}^\bullet t{:}u(t)\cdot W(p,t)\le M(p)$,即有 $u(t)\le\min\{M(p)/W(p,t)|p\in{}^\bullet t\}$,得$\forall t\in u{:}u(t)\le d_M(t)$,故 $u\le d_M$.(2) 若 $\max\{u(t)|t\in T\}>\max\{M(p)|p\in P\}$,则$\exists t\in T{:}u(t)>\max\{M(p)|p\in P\}\ge d_M(t)$.由(1)的结论可知,$u\notin ST_\Sigma(M)$. □

## 2 计算复杂性

### 2.1 独立集问题

**定义 12**[13]. 设 $G=(V,E)$是简单无向图.$\forall u,w\in V$,若$(u,w)\in E$,则称 $u$ 和 $w$ 是相邻的.对非空顶点集 $I\subseteq V$,若 $I$ 中任何两个顶点都不相邻,则称这个顶点集 $I$ 是图 $G$ 的独立集(independent set).若 $I$ 是图 $G$ 的独立集,且任意增加一个顶点都会破坏它的独立性,则称独立集 $I$ 是极大独立集.如果不存在独立集 $I'$,使$|I'|>|I|$,则称独立集 $I$ 是最大独立集.

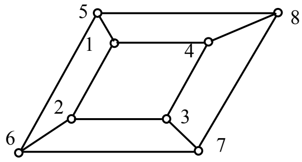


Fig.2 Maximal independent set and maximum independent set

图 2 极大独立集与最大独立集

如图 2 所示,{2,8},{2,4,5,7}和{1,3,6,8}是 $G$ 的极大独立集,其中{2,4,5,7}和{1,3,6,8}是 $G$ 的最大独立集.

在复杂性理论中,判定问题(decision problem)是一个只需回答 Yes 或 No 的形式问题.

**定义 13**[13]. 复杂类 P 表示用确定型图灵机(deterministic Turing machine)在多项式时间内可解决的判定问题集.NP 表示用非确定型图灵机(nondeterministic Turing machine)在多项式时间内可解决的判定问题集.若判定问题 $A$ 属于 NP,且所有其他 NP 问题都能够多项式时间多一归约(polynomial-time many-one reduction)到 $A$,则称 $A$ 是 NP 完全的(NP-complete).

**引理 1**[13]. 对于判定问题 $A$,若存在 NP 完全问题 $B$,使 $B$ 多项式时间多一归约到 $A$,则 $A$ 是 NP 困难的(NP-hard).若 $A$ 是 NP 困难的,且 $A\in$NP,则 $A$ 是 NP 完全的.

**定义 14**[13]**(独立集问题(IS))**. 给定简单无向图 $G=(V,E)$和正整数 $k\le|V|$,问 $G$ 是否包含基数至少为 $k$ 的独立集?

**引理 2**[13]. IS 是 NP 完全的.

### 2.2 步问题

**定义 15(并发使能变迁集问题(CETS))**. 给定 Petri 网$\Sigma=(P,T,F,W)$,标识 $M\in Reach_\Sigma(M_0)$和正整数 $k\le|T|$,问 Petri 网$\Sigma$在标识 $M$ 是否包含基数至少为 $k$ 的并发使能变迁集?

**定理 1**. 对于安全的 Petri 网系统,CETS 是 NP 完全的.

证明: (1) CETS 是 NP 困难的.

考虑从独立集问题多项式时间多一归约到 CETS 问题.设简单无向图 $G=(V,E)$和正整数 $s$ 是 IS 的一个实例,要构造 CETS 的一个实例 Petri 网$\Sigma$、标识 $M$ 和正整数 $k$,使$\Sigma$在标识 $M$ 有一个大小至少为 $k$ 的并发使能变迁集当且仅当 $G$ 有一个大小至少为 $s$ 的独立集.按照下面的方式进行构造:

(i) $v_i\in V$ 当且仅当 $t_i\in T$,即 Petri 网$\Sigma$中的每个变迁 $t_1,t_2,\ldots,t_n$ 对应图 $G$ 中的每个顶点 $v_1,v_2,\ldots,v_n$;

(ii) $(v_i,v_j)\in E$ 当且仅当 $p_{ij}\in P\wedge M(p_{ij})=1\wedge W(p_{ij},t_i)=1\wedge W(p_{ij},t_j)=1$.换句话说,两顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 相邻当且仅当 $t_i$ 与 $t_j$ 共享输入库所 $p_{ij}$,库所 $p_{ij}$ 中放置 1 个托肯,且弧$(p_{ij},t_i)$和$(p_{ij},t_j)$的权值均为 1;

(iii) $v_i$ 是孤立点当且仅当 $p_i\in P\wedge M(p_i)=1\wedge W(p_i,t_i)=1$.即 $v_i$ 是孤立点当且仅当 $t_i$ 有一个输入库所 $p_i$,库所 $p_i$ 中放置 1 个托肯,且弧$(p_i,t_i)$的权值为 1;

(iv) $k=s$.

从上面构造可以看出,Petri 网$\Sigma$的每个变迁对应图 $G$ 的每个顶点,且每个变迁在 $M$ 都使能;两个变迁共享一个库所当且仅当图 $G$ 中对应的两个顶点是相邻的;两个变迁无共享库所当且仅当图 $G$ 中对应的两个顶点不相邻.如图 3(a)所示,图 $G$ 有 4 个顶点 $v_1,v_2,v_3,v_4$,其中包含一个 $s=3$ 的独立集$\{v_1,v_3,v_4\}$.通过上述构造得到 Petri 网$\Sigma$和标识 $M$,如图 3(b)所示,$\Sigma$有 4 个变迁 $t_1,t_2,t_3,t_4$,3 个库所 $p_{12},p_{23},p_4$,每个库所中都有 1 个托肯;由于弧的权值均置为 1,故 4 个变迁都使能.容易看出,在 Petri 网$\Sigma$在 $M$ 包含一个 $k=3$ 的并发使能变迁集$\{t_1,t_3,t_4\}$.

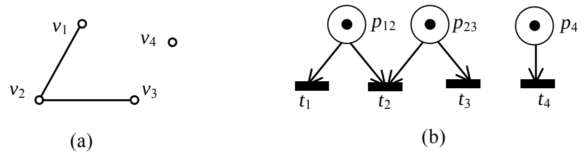



Fig.3 Construction from graph $G$ to Petri net $\Sigma$ and marking $M$

图 3 从图 $G$ 到 Petri 网$\Sigma$和标识 $M$ 的构造

现在,证明 Petri 网$\Sigma$在标识 $M$ 有一个大小至少为 $k$ 的并发使能变迁集当且仅当 $G$ 有一个大小至少为 $s$ 的独立集.$I$ 是 $G$ 的一个独立集,且$|I|\geq s$,当且仅当$\forall v_i,v_j\in I:(v_i,v_j)\notin E$;由上面构造步骤,当且仅当得到对应的变迁集 $C,|C|=|I|,C\subseteq En_\Sigma(M)$且$\forall t_i,t_j\in C:t_i\cap t_j=\varnothing$;根据命题 1,当且仅当 $C$ 在标识 $M$ 是并发使能变迁集且$|C|\geq k$.

进一步分析这是一个多项式时间的构造.设$|V|=n$,则 $V,E$ 和 $k$ 的输入长度分别为 $O(\log n),O(n^2)$和 $O(\log n)$,故实例的输入总长度是 $O(n^2)$.构造步(i)根据顶点集 $V$ 确定变迁集 $T$,故$|T|=n$;构造步(ii)和步(iii)根据边集 $E$ 确定库所集 $P$,故$|P|=O(n^2)$;由于$(\Sigma,M_0)$是安全的网系统,故$|M|=|P|=O(n^2)$,流关系 $F$ 和权函数 $W$ 的规模均是$|P||T|=O(n^3)$.因此整个构造需时间 $O(n^3)$,即从 IS 可多项式时间归约到 CETS.

由于 IS 是 NP 完全的(引理 2),根据引理 1,CETS 是 NP 困难的.

(2) CETS∈NP.

对于安全的 Petri 网系统$(\Sigma,M_0)$,对标识 $M\in Reach_\Sigma(M_0)$,给出一种验证 CETS 的非确定型算法.

**算法 1**. CETS 问题的非确定型算法.

**input**: $(P,T,F,W),M,k$

**begin**

nondeterministically guess a transition set $C$, and verify that:

(i) $|C|\geq k$

(ii) $\Sigma_{t\in C} W(\cdot,t)\leq M$

**if** all these conditions hold **then** accept

**end**

假设$|P|=m,|T|=n$,则 $P,T,F,W,M$ 和 $k$ 的长度分别是 $O(\log m),O(\log n),O(mn),O(mn),O(m)$和 $O(\log n)$,故输入的总长度是 $O(mn)$.$C$ 的长度是 $O(\log n)$,验证(i)需时间 $O(\log n)$,验证(ii)需时间 $O(mn)$,故验证(i)和(ii)需时间 $O(mn)$.这是一种可在多项式时间内验证 CETS 的非确定型算法.因此 CETS 属于 NP.

综合(1)和(2)的证明,根据引理 1,CETS 是 NP 完全的. □

**定义 16(步问题(Step))**. 给定 Petri 网$\Sigma=(P,T,F,W)$,标识 $M\in Reach_\Sigma(M_0)$和正整数 $k\leq|T|$,问 Petri 网$\Sigma$在标识 $M$ 是否包含基数至少为 $k$ 的步?

**定理 2**. 对于一般 Petri 网系统, STEP 是 NP 完全的.

证明:(1) STEP 是 NP 困难的.

由于安全 Petri 网系统是一般 Petri 网系统的子集,且在无多重使能的情况下,STEP 问题可以简化为 CETS 问题.因此,安全 Petri 网的 CETS 问题是一般 Petri 网的 STEP 问题的特殊子问题.由于安全 Petri 网系统的 CETS 问题是 NP 完全的(定理 1),故一般 Petri 网系统的 STEP 问题是 NP 困难的.

(2) STEP∈NP.

下面根据服务语义分 3 种情况考虑:

a) 对于单服务员语义,STEP 简化为 CETS 问题,其验证算法及证明与定理 1(2)类似.

b) 对于无限服务员语义,给出一个验证 STEP 问题的非确定型算法,如算法 2(a)所示.

**算法 2(a)**. 无限服务员语义下步问题的非确定型算法.

**input**:$(P,T,F,W),M,k$

**begin**

nondeterministically guess a transition multiset $u \le \max\{M(p)|\ p\in P\}$, and verify that:

(i) $\Sigma_{t\in T}\,u(t) \ge k$

(ii) $\Sigma_{t\in T}\,u(t)\cdot W(\cdot, t) \le M$

**if** all these conditions hold **then** accept

**end**

假设$|P|=m,|T|=n,b$ 是权函数 $W$ 和标识 $M$ 中的最大正整数.$P,T,F,W,M$ 和 $k$ 的长度分别是 $O(\log m)$, $O(\log n)$,$O(mn\log b)$,$O(mn\log b)$,$O(m\log b)$和 $O(\log n)$,故输入的总长度是 $O(mn\log b)$.根据命题 2,$u\le\max\{M(p)|\ p\in P\}$,故 $u$ 的长度是 $O(n\log b)$.验证(i)需时间 $O(n\log b)$,验证(ii)需时间 $O(nm\log^2 b)$,故验证(i)和(ii)需时间 $O(mn\log^2 b)$.这是一种可在多项式时间内验证 STEP 问题的非确定型算法.故 STEP 属于 NP.

c) 对于多服务员语义(假定每个变迁的服务员为 $d$ 个),给出验证 STEP 的非确定型算法,如算法 2(b)所示.

**算法 2(b)**. 多服务员语义下步问题的非确定型算法.

**input**:$(P,T,F,W),M,k$

**begin**

nondeterministically guess a transition multiset $u\le d$, where $d$ is the number of servers, and verify that:

(i) $\Sigma_{t\in T}u(t)\ge k$

(ii) $\Sigma_{t\in T}u(t)W(\cdot,t)\le M$

**if** all these conditions hold **then** accept

**end**

假设$|P|=m,|T|=n,b$ 是权函数 $W$ 和标识 $M$ 中的最大正整数.$P,T,F,W,M$ 和 $k$ 的长度分别是 $O(\log m)$, $O(\log n)$,$O(mn\log b)$,$O(mn\log b)$,$O(m\log b)$和 $O(\log n)$,故输入的总长度是 $O(mn\log b)$.$u$ 的长度是 $O(n)$,验证(i)需时间 $O(n)$,验证(ii)需时间 $O(nm\log b)$,故验证(i)和(ii)需时间 $O(mn\log b)$.这是一种可在多项式时间内验证 STEP 问题的非确定型算法.故 STEP 属于 NP.

综合(1)和(2)的证明可知,一般 Petri 网系统的 STEP 问题是 NP 完全的. □

可以看出,3 种服务语义下,STEP 问题的验证算法思想是相同的,只是被验证的步 $u$ 的范围稍有不同.在无限服务员语义下,步 $u$ 的范围最大,因此验证算法的复杂度也最大.鉴于这个原因及篇幅所限,下面仅考虑无限服务员语义.

### 2.3 极大步问题

在计算复杂性理论中,函数问题[13]不同于判定问题,它具有更复杂的回答,而不只是判定 Yes 或 No.

**定义 17[13]**. 复杂类 FP 表示用确定型图灵机在多项式时间可解决的函数问题集.

**定义 18(极大步问题,MSTEP)**. 给定 Petri 网$\Sigma=(P,T,F,W)$和标识 $M\in Reach_\Sigma(M_0)$,求 Petri 网$\Sigma$在标识 $M$ 的一个极大步.

**定理 3**. 对于 Petri 网系统,MSTEP$\in$FP.

证明:给出一个求解极大步的确定性算法(算法 3).

算法 3 首先初始化 $u$ 为空多重集.然后从 $T$ 中任意选取一个变迁 $t$,若 $t$ 在 $M$ 使能,则将变迁 $t$ 加入到 $u$,然后从 $M$ 中减去 $W(\cdot,t)$;如果 $t$ 在 $M$ 仍然使能,再将 $t$ 加入到 $u$ 并减去 $W(\cdot,t)$,直到 $t$ 不再使能.接着再从 $T$ 中选择下一变迁,如此继续,直到 $T$ 中的所有变迁被访问完毕为止,这时返回 $u$.

**算法 3**. 极大步问题的确定型算法.

**input**:$(P,T,F,W),M$

**begin**

**for** each transition $t$ in $T$

$u(t)\leftarrow 0$

```
        for each transition t in T
            while (W(·,t)≤M)
                u(t)←u(t)+1
                M←M−W(·,t)
        return u
    end
```

为了验证算法的正确性,要证明:(i) 算法一定会终止;(ii) 当算法终止时,$u$ 一定是 $M$ 的一个极大步.

(i) 由于 $T$ 是有限集,故两个 for 循环的次数均为$|T|$.根据定义 9,$d_M(t)\le\min\{M(p)|p\in{}^\bullet t\}$,于是每次 while 循环不会超过 $\min\{M(p)|p\in{}^\bullet t\}$次.因此,对于输入$\Sigma$和 $M$ 来说,算法 3 一定会终止.

(ii) 先用归纳法证明算法终止时 $u$ 是步.

设 $u_i$ 和 $M_i$ 是第 $i$ 次 while 循环时的 $u$ 和 $M$ 的值.

当 $k=0$ 时,$u_0$ 是空多重集,$M_0=M$.显然,$u_0$ 是步.

假设当 $k=i$ 时,$u_i$ 是步,$M_i=M-\Sigma_{t\in T}u_i(t)\cdot W(\cdot,t)$.

当 $k=i+1$ 时,不妨设选取的是 $t_j$.若 $t_j$ 在 $M_i$ 使能,由归纳假设,$M_i=M-\Sigma_{t\in T}u_i(t)\cdot W(\cdot,t)$,于是 $W(\cdot,t_j)+\Sigma_{t\in T}u_i(t)\cdot W(\cdot,t)\le M$,根据步的定义,$u_{i+1}=\{t_j\}+u_i$ 是步.若 $t_j$ 在 $M_i$ 不使能,由归纳假设,$u_{i+1}=u_i$ 是步.

再用反证法证明当算法终止时 $u$ 是极大步.

假设当第 $n$ 次 while 循环后算法终止,但 $u_n$ 不是极大步,则$\exists u'\in ST_\Sigma(M_n),\exists t'\in T$,使 $u_n+\{t'\}\le u'$,于是 $W(\cdot,t')+\Sigma_{t\in T}u_n(t)\cdot W(\cdot,t)\le\Sigma_{t\in T}u'(t)\cdot W(\cdot,t)\le M$,即有 $W(\cdot,t')\le M-\Sigma_{t\in T}u_n(t)\cdot W(\cdot,t)=M_n$,根据 while 循环条件,此时算法 3 不会终止,与假设矛盾.

设$|T|=n,|P|=m,b$ 是权函数 $W$ 和标识 $M$ 中的最大正整数.对于第 1 个 for 循环,需时间 $O(n\log b)$.对于第 2 个 for 循环,外层 for 循环 $n$ 次,内层 while 循环至多 $b$ 次,每次需时间 $O(m\log b)$,故第 2 个 for 循环需时间 $O(nmb\log b)$.这是一种多项式时间算法.因此 MSTEP∈FP. □

### 2.4 最大步问题

**定义 19**[13]. 对函数问题 $A$,若存在问题 $B\in$NP 使得 $A$ 能够多项式时间图灵归约(polynomial-time Turing reduction)到 $B$,则称 $A$ 是 NP 易解的(NP-easy).若对每个 $B\in$NP,$B$ 都能多项式时间图灵归约到函数问题 $A$,则称 $A$ 是 NP 难解的(NP-hard).若函数问题 $A$ 既是 NP 易解的又是 NP 难解的,则称 $A$ 是 NP 等价的(NP-equivalent).

**引理 3**[13]. 对于函数问题 $A$,若存在 NP 完全问题 $B$ 和 $C$,使 $B$ 能够多项式时间图灵归约到 $A$,且 $A$ 能多项式时间图灵归约到 $C$,则 $A$ 是 NP 等价的.

**定义 20(最大步问题,MMSTEP)**. 给定 Petri 网$\Sigma=(P,T,F,W)$和标识 $M\in Reach_\Sigma(M_0)$,求 Petri 网$\Sigma$在标识 $M$ 的一个最大步.

**定理 4**. 对于 Petri 网系统,MMSTEP 是 NP 等价的.

证明:现在从 STEP 多项式时间图灵归约到 MMSTEP.设 FIND-MMSTEP($\Sigma,M$)是求解 MMSTEP 的子程序,给出判定 STEP 问题的算法(算法 4).

算法 4 调用子程序 FIND-MMSTEP($\Sigma,M$)找到一个最大步 $u$,然后计算它的长度并与 $k$ 进行比较.设子程序 FIND-MMSTEP($\Sigma,M$)需常数时间,计算$|u|$且与 $k$ 比较的时间需 $O(n)$,这里$|T|=n$.故算法只需多项式时间,因此,MMSTEP 是 NP 难解的.再考虑 MMSTEP 多项式时间图灵归约到 STEP.设 DECISION-STEP($\Sigma,M,k$)是判定 STEP 的子程序,给出求解 MMSTEP 的算法(算法 5).

**算法 4**. 利用最大步算法判定步问题.

```
    Input: Σ,M,k
    begin
        u←FIND-MMSTEP(Σ,M)
        if |u|≥k then accept else reject
```

**end**

**算法 5**. 利用步问题判定算法求解最大步.

**Input**: $\Sigma,M$

**begin**

$k\leftarrow\Sigma_{t\in T}\, d_M(t)$

**while** not DECISION-STEP $(\Sigma,M,k)$

$k\leftarrow k-1$

**for** each transition $t$ in $T$

$u(t)\leftarrow 0$

**for** each transition $t$ in $T$

**while** $(W(\cdot,t)\le M$ and DECISION-STEP$(\Sigma,M-W(\cdot,t),k-1))$

$M\leftarrow M-W(\cdot,t)$

$k\leftarrow k-1$

$u(t)\leftarrow u(t)+1$

**return** $u$

**end**

算法 5 首先初始化最大步的基数上界 $k$,第 1 个 while 循环计算最大步基数,第 2 个 for 循环检验每个变迁是否为最大步中的变迁.若 $t$ 使能且 DECISION-STEP 返回真,表明去掉 1 个 $t$ 仅会使 $k-1$,则 $t$ 是最大步中的变迁;否则不是最大步中的变迁.设$|T|=n,|P|=m,b$ 是权函数 $W$ 和标识 $M$ 中的最大正整数.第 1 个 while 循环计算最大步基数 $k$ 需时间 $O(n)$;for 循环迭代 $n$ 次,而其内部的 while 循环至多循环 $b$ 次,每次需时间 $O(m\log b)$,故整个 for 循环需时间 $O(nmb\log b)$.这是一种多项式时间算法,因此 MMSTEP 是 NP 易解的.

由引理 3,MMSTEP 是 NP 等价的. □

## 3 子问题分析

下面介绍两种典型的特殊子网.

**定义 21**[1]. 设$\Sigma=(P,T,F,W)$是一个 Petri 网,且所有弧的权值为 1,则

(1) 若$\forall p_1,p_2\in P:p_1^\bullet\cap p_2^\bullet\ne\varnothing\rightarrow p_1^\bullet=p_2^\bullet$,则称$\Sigma$是扩展自由选择网(extended free-choice net,简称 EFC);

(2) 若$\forall p_1,p_2\in P:p_1^\bullet\cap p_2^\bullet\ne\varnothing\rightarrow p_1^\bullet\subseteq p_2^\bullet\vee p_2^\bullet\subseteq p_1^\bullet$,则称$\Sigma$是非对称选择网(asymmetric choice net,简称 AC).

**定理 5**. 对于非对称选择网,定义二元关系 $R=\{(t_1,t_2)|(t_1,t_2)\in T^2\wedge{}^\bullet t_1\cap{}^\bullet t_2\ne\varnothing\}$,则 $R$ 是等价关系.

证明:$\forall t\in T$,有${}^\bullet t\cap{}^\bullet t\ne\varnothing$,即$(t,t)\in R$,故 $R$ 是自反的.

$\forall t_1,t_2\in T$,若$(t_1,t_2)\in R$,即${}^\bullet t_1\cap{}^\bullet t_2\ne\varnothing$,则${}^\bullet t_2\cap{}^\bullet t_1\ne\varnothing$,即$(t_2,t_1)\in R$,故 $R$ 是对称的.

$\forall t_1,t_2,t_3\in T$,若$(t_1,t_2)\in R$ 且$(t_2,t_3)\in R$,即${}^\bullet t_1\cap{}^\bullet t_2\ne\varnothing$且${}^\bullet t_2\cap{}^\bullet t_3\ne\varnothing$,不妨设 $p_{12}\in{}^\bullet t_1\cap{}^\bullet t_2,p_{23}\in{}^\bullet t_2\cap{}^\bullet t_3$,则$\{t_1,t_2\}\subseteq p_{12}^\bullet,\{t_2,t_3\}\subseteq p_{23}^\bullet$,即有 $t_2\in p_{12}^\bullet\cap p_{23}^\bullet\ne\varnothing$.由于$\Sigma$是 AC,故有 $p_{12}^\bullet\subseteq p_{23}^\bullet$或 $p_{23}^\bullet\supseteq p_{12}^\bullet$,即有$\{t_1,t_2,t_3\}\subseteq p_{23}^\bullet$或$\{t_1,t_2,t_3\}\subseteq p_{12}^\bullet$,于是${}^\bullet t_1\cap{}^\bullet t_3\ne\varnothing$,即$(t_1,t_3)\in R$,故 $R$ 是传递的.

因此,$R$ 是等价关系. □

由于 EFC⊆AC[1],故对于扩展自由选择网,$R$ 也是等价关系.定义由 $R$ 诱导的等价类$[t]=\{t'|(t,t')\in R\}$,商集 $T/R=\{[t]|t\in T\}$.用 $R_M=R\cap(En_\Sigma(M)\times En_\Sigma(M))$表示 $R$ 在 $En_\Sigma(M)$上的限制(restriction),$[t]_M=\{t'|(t,t')\in R_M\}$表示使能等价类,$T/R_M=\{[t]_M|t\in En_\Sigma(M)\}$表示使能商集.为了方便问题的证明,再扩展几个符号表示:用 $P_i^\bullet=\bigcup_{p\in P_i}(p^\bullet)$表示库所集 $P_i$ 的输出变迁集;${}^\bullet T_i=\bigcup_{t\in T_i}({}^\bullet t)$表示变迁集 $T_i$ 的输入库所集;$M(P_i)=\sum_{p\in P_i}M(p)$表示 $P_i$ 中所有库所的托肯数之和,$u(T_i)=\sum_{t\in T_i}u(t)$表示 $T_i$ 中所有变迁在步 $u$ 中出现的数目之和.

**定理 6**. 对于扩展自由选择网系统$(\Sigma,M_0),\forall M\in Reach_\Sigma(M_0),\forall u\in MST_\Sigma(M),|u|=\Sigma_{[t]\in T/R}d_M(t)$.

证明:先证$\forall u\in MST_\Sigma(M),\forall[t]\in T/R:u([t])=d_M(t)$.

$\forall[t]\in T/R,\forall t'\in[t]$,则$^\bullet t'={}^\bullet t$,且$\forall p\in{}^\bullet t:W(p,t')=W(p,t)=1$,于是 $d_M(t')=d_M(t)$.

若假设 $u([t])>d_M(t)$,根据 $d_M(t)$的定义,必$\exists p\in{}^\bullet t:d_M(t)=d_M(t)\cdot W(p,t)=M(p)$,于是 $\Sigma_{t'\in[t]}u(t')\cdot W(p,t')=\Sigma_{t'\in[t]}u(t')=u([t])>d_M(t)=M(p)$.根据步的定义,$u$ 不是步,与题设矛盾.若假设 $u([t])<d_M(t)$,令 $u'=u+\{t\}$,得 $u'([t])\le d_M(t)$.根据 $d_M(t)$的定义,$\forall p\in{}^\bullet t:d_M(t)\le M(p)/W(p,t)=M(p)$.于是,$\forall p\in{}^\bullet t$,有$\Sigma_{t'\in[t]}u'(t')\cdot W(p,t')\le d_M(t)\le M(p)$.由步的定义,$u'$是步,故 $u$ 不是极大步,与题设矛盾.因此$\forall u\in MST_\Sigma(M),\forall[t]\in T/R_M:u([t])=d_M(t)$.

所以,$\forall u\in MST_\Sigma(M),|u|=\Sigma_{t\in T}u(t)=\Sigma_{[t]\in T/R}u([t])=\Sigma_{[t]\in T/R}d_M(t)$. □

**定理 7**. 对于扩展自由选择网系统,STEP$\in P$.

证明:由定理 6 可知,对于给定的扩展自由选择网$\Sigma$和标识 $M$,所有极大步的基数都相等,故 $MMST_\Sigma(M)=MST_\Sigma(M)$,即极大步集合等于最大步集合.又由于 MSTEP$\in$FP(定理 3),故 MMSTEP$\in$FP.

接下来,利用算法 4 判定 STEP 问题.设 FIND-MMSTEP($\Sigma,M$)是求解一个最大步的子程序,由于 MMSTEP$\in$FP,故 FIND-MMSTEP($\Sigma,M$)可在多项式时间内找到一个最大步 $u$,又由于计算$|u|$且与 $k$ 比较也只需多项式时间,因此 STEP$\in P$. □

为了证明非对称选择网的步问题复杂性,需引入一个新的概念——最小完全覆盖集.

**定义 22(最小完全覆盖集)**. 一个库所集 $P_i\subseteq P$ 被称为变迁集 $T_j\subseteq T$ 的覆盖集(cover set),当且仅当 $P_i^\bullet\supseteq T_j$.库所集 $P_i$ 被称为变迁集 $T_j$ 的完全覆盖集(complete cover set),当且仅当 $P_i^\bullet=T_j$.用 $CV(T_j)$表示 $T_j$ 的所有完全覆盖集的集合.一个库所集 $P_{\min}\subseteq P$ 称为使能变迁集 $T_j\subseteq En_\Sigma(M)$的最小完全覆盖集(minimal complete cover set),当且仅当满足:(1) $P_{\min}\in CV(T_j)$;(2) $\forall P_i\in CV(T_j),M(P_{\min})\le M(P_i)$.用 $MCV(T_j)$表示 $T_j$ 的所有最小完全覆盖集的集合.

**命题 3**. 给定非对称选择网系统$(\Sigma,M_0)$和可达标识 $M\in Reach_\Sigma(M_0),\forall[t]_M\in T/R_M,\forall P_{\min}\in MCV([t]_M)$,有:

(1) $\forall p_1,p_2\in P_{\min}:p_1^\bullet\cap p_2^\bullet=\varnothing$;

(2) $\forall t'\in[t]_M:|{}^\bullet t'\cap P_{\min}|=1$.

证明:(1) 用反证法.假设$\exists p_1,p_2\in P_{\min}:p_1^\bullet\cap p_2^\bullet\ne\varnothing$,根据非对称选择网定义,有 $p_1^\bullet\subseteq p_2^\bullet\vee p_2^\bullet\subseteq p_1^\bullet$,不妨设 $p_1^\bullet\subseteq p_2^\bullet$,令 $P'_{\min}=P_{\min}-\{p_1\}$,则有 $P'^\bullet_{\min}=P_{\min}^\bullet=[t]_M$,得 $P'_{\min}\in CV([t]_M)$.由于$[t]_M$ 是使能变迁集,故$\forall p\in P_{\min},M(p)>0$,即有 $M(p_1)>0$,故 $M(P'_{\min})=M(P_{\min}-\{p_1\})<M(P_{\min})$.于是,$P_{\min}$ 不是$[t]_M$ 的最小完全覆盖集,与题设矛盾.(2) 由于 $P_{\min}^\bullet=[t]_M$,则必$\forall t'\in[t]_M,\exists p\in P_{\min}:t'\in p^\bullet$,即 $p\in{}^\bullet t'$.假设还$\exists p'\in P_{\min}$,使 $p'\in{}^\bullet t'$,则 $t'\in p^\bullet\cap p'^\bullet\ne\varnothing$.与(1)的结论矛盾. □

**定理 8**. 给定非对称选择网系统$(\Sigma,M_0)$,标识 $M\in Reach_\Sigma(M_0)$,设最小完全覆盖集 $P_{\min}\in MCV(En_\Sigma(M))$,则$\forall u\in MST_\Sigma(M):|u|=M(P_{\min})$.

证明:不妨设 $P_{t,\min}\in MCV([t]_M)$.根据命题 3(2)可知,$[t]_M$ 中的任意变迁的前集中仅有一个库所属于 $P_{t,\min}$.即每实施$[t]_M$ 中的一个变迁,便会使 $P_{t,\min}$ 中失去一个托肯.于是有 $u([t]_M)=M(P_{t,\min})$.故$\forall u\in MST_\Sigma(M),|u|=\Sigma_{t\in T}u(t)=\Sigma_{[t]_M\in T/R_M}u([t]_M)=\Sigma_{[t]_M\in T/R_M}M(P_{t,\min})=M(P_{\min})$. □

**定理 9**. 对于非对称选择网系统,STEP$\in P$.

证明:证明过程与定理 7 类似,略. □

## 4 结论与展望

本文提出步的判定问题,并得到几个重要的复杂性结论:(i) Petri 网的步问题是 NP 完全的;(ii) Petri 网的极大步问题是多项式时间可解的;(iii) Petri 网的最大步问题是 NP 等价的;(iv) 扩展自由选择网的步问题是 P 问题;(v) 非对称选择网的步问题是 P 问题.这些结论将为基于步的 Petri 网构造算法提供有价值的理论依据.进一步的工作重点是:研究步枚举问题的算法及复杂性,步枚举问题就是列举某一状态下所有步的问题,这个问题显然要比判定问题更困难.

**致谢** 感谢《软件学报》评审专家提出的宝贵意见,感谢同济大学电信学院蒋昌俊教授的建议.

**References**:

[1] Murata T. Petri nets: Properties, analysis and applications. Proc. of the IEEE, 1989,77(4):541−580.

[2] Yuan CY. Application and Theorem of Petri Nets. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005 (in Chinese).

[3] Girault C, Valk R, Wrote; Wang SY, Trans. Petri Nets for Systems Engineering: A Guide to Modeling, Verification, and Applications. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005 (in Chinese).

[4] Mukund M. Petri nets and step transition systems. Int'l Journal of Foundations of Computer Science, 1992,3(4):443−478.

[5] Jeffrey J, Lobo J, Murata T. A high-level petri net for goal-directed semantics of horn clause logic. IEEE Trans. on Knowledge and Data Engineering, 1996,8(2):241−259.

[6] Jucan T, Vidrascu C. Concurrency-Degrees for Petri nets. Studia Universitatis Babes-Bolyai Informatica, 1999,XLIV(2):3−15.

[7] Vernadat F, Azema P, Michel F. Covering step graph. In: Billington J, Reisig W, eds. Proc. of the 17th Int'l Conf. on Application and Theory of Petri Nets. LNCS 1091, Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1996. 516−535.

[8] Cheng A, Esparza J, Palsberg J. Complexity results for 1-safe nets. Theoretical Computer Science, 1995,147(1-2):117−136.

[9] Esparza J. Reachability in live and safe free-choice Petri nets is NP-complete. Theoretical Computer Science, 1998,198(1-2):211−224.

[10] Esparza J. Decidability and complexity of Petri net problems—an introduction. In: Lectures on Petri Nets I: Basic Models, Advances in Petri Nets. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 374−428.

[11] Jiang CJ. Polynomial-Time algorithm for the legal firing sequences problem of a type of synchronous composition Petri nets. Science in China (Series F), 2001,4(3):226−233.

[12] Badouel E, Bernardinello L, Darondeau P. The synthesis problem for elementary net systems is NP-complete. Theoretical Computer Science, 1997,186(1-2):107−134.

[13] Garey MR, Johnson DS. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. New York: W.H. Freeman and Company, 1979.

附中文参考文献:

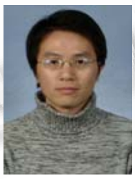
[2] 袁崇义.Petri 网原理与应用.北京:电子工业出版社,2005.

[3] Girault C,Valk R,著.王生原,等,译.系统工程 Petri 网——建模,验证与应用指南.北京:电子工业出版社,2005.

**潘理**(1975－),男,湖南平江人,博士生,讲师,主要研究领域为 Petri 网.

**周新民**(1977－),男,博士生,主要研究领域为文本数字水印.

**赵卫东**(1965－),男,博士,研究员,博士生导师,主要研究领域为制造业信息化.



**柳先辉**(1979－),男,博士生,讲师,主要研究领域为软件工程.

**王志成**(1975－),男,博士,讲师,主要研究领域为图形图像处理.