

V-系统与几何群组信息的频域表达*

李 坚¹⁺, 宋瑞霞², 叶梦杰¹, 梁延研¹, 齐东旭^{1,2}

¹(澳门科技大学 资讯科技学院, 澳门)

²(北方工业大学 理学院, 北京 100044)

V-System and Expression of Geometric Group Information in Frequency Domain

LI Jian¹⁺, SONG Rui-Xia², YE Meng-Jie¹, LIANG Yan-Yan¹, QI Dong-Xu^{1,2}

¹(Faculty of Information Technology, Macau University of Science and Technology, Macao, China)

²(College of Sciences, North China University of Technology, Beijing 100044, China)

+ Corresponding author: E-mail: linxi3@163.com

Li J, Song RX, Ye MJ, Liang YY, Qi DX. V-System and expression of geometric group information in frequency domain. Journal of Software, 2008,19(Suppl.):41-51. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/19/s41.htm>

Abstract: The V-system is a new class of complete orthogonal functions system in $L_2[0,1]$, which is composed of piecewise kth-order polynomials. There are continuous functions as well as discontinuous functions in V-system. It can be used for signal processing and global expression of a geometric graph group. Moreover, the information of geometric modeling in CAGD can be reconstructed precisely by finite terms of V-system without Gibbs phenomenon, so global feature analysis of the complicated modeling can be implemented. This paper shows that 3-dimension complicated geometric model can be reconstructed by the V-system over triangulated domain. The experiment results indicate that V-system is an effective tool used to reconstruct complicated geometric information with both continuous and discontinuous signals. This is the essential difference among V-system, the classical complete orthogonal system with continuous functions and Walsh and Haar system which include intense discontinuous functions.

Key words: orthogonal functions; V-system; multi-resolution; triangular domain; information reconstruction; geometric group

摘 要: V-系统是一类由分片多项式构成的正交函数系,函数系中既有连续函数又有间断函数.它既能用于信号处理,也能适应几何图组整体表达,在计算机辅助几何设计(CAGD)中可以精确重构几何造型信息,做到消除 Gibbs 现象,从而可以进行复杂造型的整体特征分析.利用三角域上 V-系统进行三维复杂几何模型的重构实验,实验结果表明,V-系统对复杂的、连续间断并存的几何信息重构特别有效,这与经典的连续正交函数系及强间断的 Walsh 及 Haar 函数系有本质的不同.

关键词: 正交函数系;V-系统;多分辨;三角域;信息重构;几何群组

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.10631080,10771002 (国家自然科学基金); the National Basic Research Program of China under Grant No.2004CB318000 (国家重点基础研究发展计划(973)); the Science and Technology Development Fund of Macao SAR of China under Grant No.045/2006/A (澳门科学技术发展基金)

Received 2008-05-03; Accepted 2008-11-14

人们致力于用数学工具表达几何对象,一个最重要的目的是从数学表达中尽可能多的获取几何对象各方面的信息,使其服务于诸如对几何对象的特征提取、分类、识别,以及转换、存储、传输、加密、认证等等.当前,几何对象表达的研究,已经从开创阶段的 Bezier 方法、样条函数方法等,提高与深入到诸如隐式曲面、共形几何代数等方面^[1-5],面对的数据处理数量达到几万甚至百万量级.值得注意的是,在机械、建筑、地图、服装、医学、卡通等实际需求中,研究几何图组之间的关联、差别与转化十分重要,这就对几何图组(大规模的群体)整体信息的分析与综合提出了需求.相对于群体而言,个体对象的信息特征尽管可以做到较详尽的掌握,但由于没有诸多个体之间关联的信息表达方式,人们不可能对群体的全局特征有完整的认知.

另一方面,正交函数的研究很多,它在图象、语音、图形信息处理中,形成了强有力的频谱分析与综合手段,它有利于生成或提取信号的特征,从而在“分类”,乃至“识别”等许多问题里成为不可或缺的数学工具.在计算机辅助几何设计中,广泛应用分片多项式对几何形状的控制数据作插值或拟合,即用样条曲线及 Bezier 曲线(曲面)等方法表达几何对象的造型,其理论优美应用成功.注意到表达样条曲线及 Bezier 曲线(曲面)都是采用某类基函数,特别是 B-样条基及 Bernstein 基,但它们都不是正交基^[3,4].正交函数与正交变换在数字信号处理领域的成功应用,令人想到十分必要将其威力扩大到几何信息特别是几何造型的领域.在 CAGD 中我们尚未见到直接用正交函数表达几何造型的研究.

计算几何学中,人们为什么不用正交基去做几何造型?对已有的分片多项式表达的几何造型,为什么不作正交重构?回答是明确的:正交表示与正交重构不是没意义,恰恰相反,它十分有用,问题是,已有的连续正交函数作几何造型,严重地受 Gibbs 现象^[6-8]影响以至于不可使用.本文研究的 V-系统,恰是一类这样的一类正交函数系,它既可以用在图像处理的问题中,也可以用于 CAGD 中几何造型的正交重构,最重要的是可以有效地消除 Gibbs 现象. k 次 V-系统是一类 $L^2[0,1]$ 上的非连续的完备正交函数系,构成该系统的函数是分片 k 次多项式,既有连续函数又有间断函数.用函数系中有限个函数的线性组合就可以精确表示由分片多项式表达的几何对象,它特别适用于连续和间断并存的信息处理,前述的“群组信息”,指的就是连续与间断并存的整体信息.

1 Gibbs 现象

熟知,用有限项 Fourier 级数表达间断信号时,在间断点处出现波动,并且不能因求和的项数增大而彻底消失,这就是著名的 Gibbs 现象.H.Wilbraham 于 1848 年首先观察到这一现象,后来经 Josiah W.Gibbs(1839-1903)作出深入细致的研究.在正交函数理论及其应用的研究中,Gibbs 现象的消减问题一直倍受重视^[6-8].

可以从理论上分析得到一般性结论^[6]:对 $[-\pi, \pi]$ 上以某 x_0 为间断点的分段光滑函数 $f(x)$,其 Fourier 级数的部分和在间断点 x_0 处波动的大小约为

$$0.09(f(x_{0+}) - f(x_{0-})).$$

Gibbs 现象的研究之所以引起关注,在于它的出现造成数据偏差.在数字图象、语音处理,以及用 Fourier 方法求解微分方程等问题中,人们都要设法消减它的影响.这里特别强调指出,在几何信息重构的问题中,Gibbs 现象的影响尤为突出.

我们考察下面简单例子.

例:有平面上的一个图组,它由互相分离的两个正方形的边界构成.大正方形的 4 个顶点 $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (1,1)$, $P_3 = (0,1)$,小正方形的顶点为 $P_4 = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$, $P_5 = (2,1)$, $P_6 = \left(2, \frac{3}{2}\right)$, $P_7 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$,闭折线 $P_0P_1P_2P_3P_0$ 与 $P_4P_5P_6P_7P_4$ 构成一个图组(群体).图 1 给出了用正交的 Fourier 三角级数作为表达工具的信息重构结果,由于两个正方形是分离的,因此图组出现了强间断.有限项 Fourier 级数重构的结果严重地歪曲了原图的形象,尤其产生了不该有的连线,并且这种现象不会因 Fourier 级数项数的增加而彻底消除.这在几何造型中是决不允许的,Gibbs 现象严重影响了信息重构.

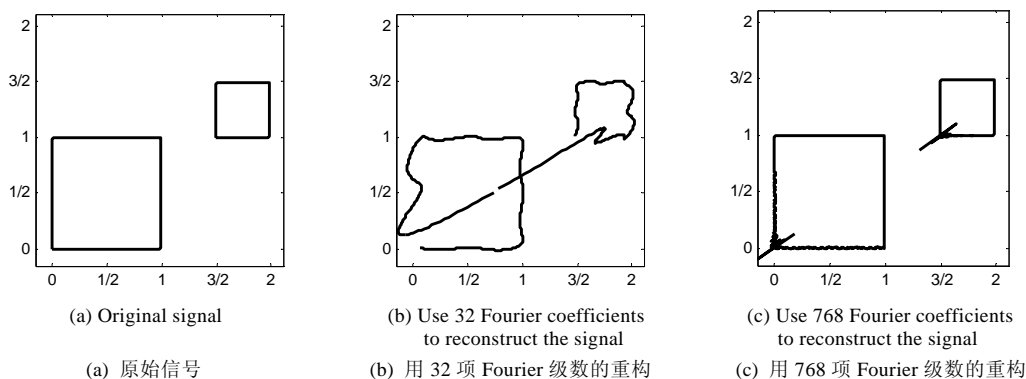


Fig.1 Use finite Fourier series to approach simple geometric group

图 1 有限项 Fourier 级数对简单几何图组的逼近

在二维及三维几何造型中,几何对象往往包含许多“部件”和“零件”.作为几何图组,其子图互相分离(强间断)以及非光滑连接(弱间断)的情况不可避免.几何造型的精度要求很高,如果说信号处理的某些实际问题对 Gibbs 现象的出现尚可接受的话,那么在几何信息表达中则是不可容忍的.

上面的例子表明,用有限项 Fourier 级数(连续小波级数也一样)逼近几何造型是不成功的.事实上,只要是连续的正交函数系,其有限个基函数的线性组合不可能表达间断函数.实际应用上,不可能采用无穷多的计算,那么,如果要表达既有连续光滑、也有间断的信息,只有采用非连续的函数才有可能.

2 关于非连续正交函数与 V-描述子

众所周知,非连续正交函数的典型代表有上世纪初建立的 Walsh 函数、Haar 函数,大约半个世纪之后,它们展现出重要的应用价值^[9-11].Walsh 函数、Haar 函数可以看作是零次分段多项式正交系统;1983 年出现的 U 系统是非连续的,它是一类含有间断函数的完备正交系^[12],是 Walsh 函数的推广.但当时只是作为数学理论的成果,没有展开相关应用的研究.在 U 系统的基础上,发展了一类表达更加简练且有多分辨特性的完备正交系,命名为 V-系统^[13],发表于 2007 年,它恰是 Haar 函数系的推广.最近,V-系统的研究从单变量情形发展到多变量,完成了三角域上 V-系统的构造^[14,15].V-系统出现后,立刻进行了几何图组重构、Gibbs 现象消除、信号消噪、图像消噪、数字水印等方面的应用探索研究,结果表明 V-系统在信号消噪方面比普通的小波消噪效果更好.由于 V-系统在几何信息表达方面有独特的精确重构性质、完全消除 Gibbs 现象、对几何群体能够作频域表达从而实现几何群体的整体特征分析,于是为某些对象的分类与模式识别实际问题增添一种可行工具.

我们认为,几何图组(群体)整体的频域表达,应该通过非连续的正交函数系统才可能实现.尤其三角域上的 V-系统,作为一类非连续正交函数,它提供了对更加复杂的几何群体实现频域表达的信息重构方法.

单变量 V-系统的构造见文献[13],相关应用可见文献[16-21].本节概述三角域上的 V-系统.

2.1 三角域上 k 次 V-系统概要

设三角域 G 作如下剖分:连接各边中点,则 G 被剖分为 4 个子域,按图 2(a)标注的次序,称为一级剖分,记为 $G_{1,1}, G_{2,1}, G_{2,2}, G_{2,3}$ 剖分的分割线记作 $l_{i,j} = 1, 2, 3$;接下来,将每个子域再剖分为 4 个更小的子域,记为 $G_{i,j}, i=1, 2, 3, 4, j=1, 2, \dots, 2i-1$,下标 i, j 分别表示子三角域位于剖分后的第 i 行的第 j 个位置,如图 2(b)所示,称为二级剖分;如此继续下去,得到 m 级剖分,每层更小子域的次序,按其所在位置来确定,记为 $G_{i,j}, i=1, 2, \dots, 2^m, j=1, 2, \dots, 2i-1, m=1, 2, \dots$

熟知,从一个三角形区域变换到另一个三角形区域,其变换雅可比行列式非零,因此坐标变换时不改变正交性.我们可以选择积分容易计算且面积为 1 的直角三角形区域 $G = \{(x, y) \mid (0, 0), (1, 0), (0, 2)\}$ 为顶点围成的三角域,之所以选面积为 1,是为了保证 $f(x, y) = 1$ 在 G 上是规范的(模为 1).这里 G 上的内积定义为

$$\langle f, g \rangle = \iint_G f g dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} f g dy.$$

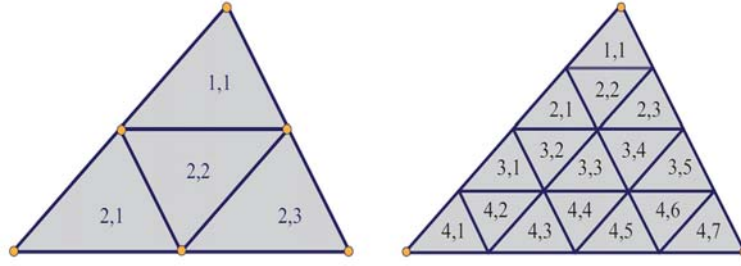


Fig.2 Notation of the triangular domain

图 2 三角剖分域的标注

不失一般性,下面的讨论均在 G 上进行.

G 上 k 次 V -系统是分组分类来构造的.本文针对空间三角面片组成的几何造型,因此这里给出 $k=1$ 时 V -系统构造过程:

第 1 组:由 $f_1(x,y)=1, f_2(x,y)=x, f_3(x,y)=y$, 经规范正交化得到

$$V_{1,1}^1(x,y)=1, V_{1,1}^2(x,y)=3\sqrt{2}x-\sqrt{2}, V_{1,1}^3(x,y)=\sqrt{6}x+\sqrt{6}y-\sqrt{6} \quad (1)$$

第 2 组:由于一级剖分下三角域上的分片二元 1 次多项式构成 12 维线性空间,故除(1)之外,还需要构造 9 个分片二元 1 次多项式作为基函数,称作二元 1 次生成元,要求这 9 个连同(1)中的 3 个共计 12 个函数构成规范正交组,且在 G 的一级剖分线上既有连续的、又有间断的函数成员.

按待定系数法容易确定一组 9 个二元 1 次函数生成元:

$$V_{1,2}^1 = \begin{cases} -3y+5, & (x,y) \in G_{1,1} \\ -3y+1, & (x,y) \in G_{2,1} \\ -3y+1, & (x,y) \in G_{2,2} \\ -3y+1, & (x,y) \in G_{2,3} \end{cases}, V_{1,2}^2 = \begin{cases} 6x+3y-5, & (x,y) \in G_{1,1} \\ 6x+3y-1, & (x,y) \in G_{2,1} \\ 6x+3y-5, & (x,y) \in G_{2,2} \\ 6x+3y-5, & (x,y) \in G_{2,3} \end{cases}, V_{1,2}^3 = \begin{cases} -6x+1, & (x,y) \in G_{1,1} \\ -6x+1, & (x,y) \in G_{2,1} \\ -6x+1, & (x,y) \in G_{2,2} \\ -6x+5, & (x,y) \in G_{2,3} \end{cases}$$

$$V_{1,2}^4 = \begin{cases} \sqrt{2}(6x-1), & (x,y) \in G_{1,1} \\ -\sqrt{2}(6x-1), & (x,y) \in G_{2,1} \\ \sqrt{2}(6x-2), & (x,y) \in G_{2,2} \\ -\sqrt{2}(6x-4), & (x,y) \in G_{2,3} \end{cases}, V_{1,2}^5 = \begin{cases} -\sqrt{2}(6x-1), & (x,y) \in G_{1,1} \\ \sqrt{2}(6x-1), & (x,y) \in G_{2,1} \\ \sqrt{2}(6x-2), & (x,y) \in G_{2,2} \\ -\sqrt{2}(6x-4), & (x,y) \in G_{2,3} \end{cases}, V_{1,2}^6 = \begin{cases} \sqrt{2}(-3y+4), & (x,y) \in G_{1,1} \\ \sqrt{2}(-3y+1), & (x,y) \in G_{2,1} \\ \sqrt{2}(3y-2), & (x,y) \in G_{2,2} \\ \sqrt{2}(3y-1), & (x,y) \in G_{2,3} \end{cases}$$

$$V_{1,2}^7 = \begin{cases} \sqrt{3}(4x+4y-6), & (x,y) \in G_{1,1} \\ \sqrt{3}(-4x-4y+2), & (x,y) \in G_{2,1} \\ 0, & (x,y) \in G_{2,2} \\ 0, & (x,y) \in G_{2,3} \end{cases}, V_{1,2}^8 = \begin{cases} 0, & (x,y) \in G_{1,1} \\ 0, & (x,y) \in G_{2,1} \\ -\sqrt{3}(4x+4y-4), & (x,y) \in G_{2,2} \\ \sqrt{3}(4x+4y-4), & (x,y) \in G_{2,3} \end{cases}, V_{1,2}^9 = \begin{cases} \sqrt{6}(4x+y-2), & (x,y) \in G_{1,1} \\ \sqrt{6}(4x+y-1), & (x,y) \in G_{2,1} \\ \sqrt{6}(-4x-y+2), & (x,y) \in G_{2,2} \\ \sqrt{6}(-4x-y+3), & (x,y) \in G_{2,3} \end{cases}$$

为了定义这 9 个函数生成元在间断线 l_j 处的函数值,不妨认为 $G_{2,2}$ 包含了 $l_j, \{j=1,2,3\}$.

第 3 组:将 9 个函数生成元分别压缩 4 倍,复制到 G 的一级剖分后的子区域上:

$$V_{1,3}^{i,1} = \begin{cases} 2V_{1,2}^i(2x, 2(y-1)), & (x,y) \in G_{1,1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, V_{1,3}^{i,2} = \begin{cases} 2V_{1,2}^i(2x, 2y), & (x,y) \in G_{2,1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

$$V_{1,3}^{i,3} = \begin{cases} 2V_{1,2}^i\left(-2\left(x-\frac{1}{2}\right), -2(y-1)\right), & (x,y) \in G_{2,2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, V_{1,3}^{i,4} = \begin{cases} 2V_{1,2}^i\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right), 2y\right), & (x,y) \in G_{2,3} \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

$$i=1,2,\dots,9.$$

这样得到 9×4 个函数,它们定义在 G 的二级剖分域上,分成 9 类,每类 4 个函数.示意图见图 3,着色的三角形

具有渐变灰度,它表示该三角形上定义了一个二元线性函数.不同颜色对应不同的二元线性函数,白色部分表示取值为0.

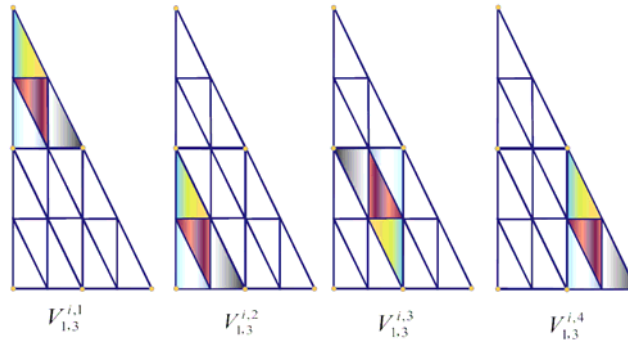


Fig.3 The 3rd group i th class base functions of linear V-system

图3 1次V-系统的第3组第*i*类示意图

第 m 组:将 9 个函数生成元分别压缩 4^{m-2} 倍,复制到 $m-2$ 级剖分的子域 $G_{i,j}$ 上($i=1,2,\dots,2^{m-2}, j=1,2,\dots,2i-1, m=3,4,\dots$),而其余部分取值为 0,可得到 $9 \times 4^{m-2}$ 个函数,分成 9 类,每类 4^{m-2} 个函数.第 m 组的第 i 类的第 j 个函数可表达为

$$V_{1,m}^{i,j} = \begin{cases} 2^{m-2} V_{1,2}^i \left(2^{m-2} \left(x - \frac{\beta-1}{2^{m-2}} \right), 2^{m-2} \left(y - \frac{2^{m-1} - 2\alpha}{2^{m-2}} \right) \right), & (x, y) \in G_{\alpha, 2\beta-1}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$V_{1,m}^{i,j} = \begin{cases} 2^{m-2} V_{1,2}^i \left(-2^{m-2} \left(x - \frac{\beta}{2^{m-2}} \right), -2^{m-2} \left(y - \frac{2^{m-1} - 2\alpha + 2}{2^{m-2}} \right) \right), & (x, y) \in G_{\alpha, 2\beta}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$m = 3, 4, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, 9, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 2^{m-2}, \quad \beta = 1, 2, \dots, \alpha.$$

当生成元复制到 $G_{\alpha,\gamma}$ 上时,对应函数排序为第 $(\alpha-1)^2 + \gamma$ 个,即 $V_{1,m}^{i,j}$ 中 $j = (\alpha-1)^2 + \gamma$.

各组函数的集合组成了三角域 G 上的 1 次 V-系统.

第1组: $V_{1,1}^1, V_{1,1}^2, V_{1,1}^3$,

第2组: $V_{1,2}^1, V_{1,2}^2, \dots, V_{1,2}^9$,

第*m*组: $V_{1,m}^{i,j}, m = 3, 4, \dots; i = 1, 2, \dots, 9; j = 1, 2, \dots, 4^{m-2}$.

可以证明 V-系统的正交性与完备性(从略).下面的性质是本文的理论基础:

再生性^[9,10]:三角域上 V 系统是一个具有多分辨特性的规范正交函数系,且如果 $f(x, y)$ 是定义在三角域 G 上的分片二元一次多项式,其分段线恰是 G 的三角剖分线,则 $f(x, y)$ 可以用 V-系统级数的有限项精确重构.

按照这条性质,我们可以对几何群体信息作 V-系统下的分解,实现群体信息的频域表达.

2.2 V-描述子

记几何群组为 $P(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}, (u, v) \in G$, 这里 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ 均为二元 k 次分片多项式.设三角域上 k 次 V-系统中的基函数顺次排序为

$$v_0(u, v), v_1(u, v), v_2(u, v), \dots$$

注意到二元 k 次多项式有 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ 个自由度,故有

$$P(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\} = \left\{ \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)(4^n-1)} \lambda_x^j v_j(u, v), \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)(4^n-1)} \lambda_y^j v_j(u, v), \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)(4^n-1)} \lambda_z^j v_j(u, v) \right\},$$

记 $\lambda(j) = \{\lambda_x^j, \lambda_y^j, \lambda_z^j\}$, 则

$$\lambda(j) = \iint_G P(u, v) v_j(u, v) du dv, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(k+1)(k+2)(4^n-1).$$

于是

$$P(u, v) = \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)(4^n-1)} \lambda(j) v_j(u, v).$$

进一步定义这个图组的“能量”为

$$E = \left(\sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)(4^n-1)} \|\lambda(j)\|^2 \right)^{1/2} \tag{2}$$

令

$$d(j) = \frac{\|\lambda(j)\|}{\|\lambda(1)\|}, \quad j = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(k+1)(k+2)(4^n-1) \tag{3}$$

称 $d(j)$ 为 $P(u, v)$ 的第 j 个归一化的 V-描述子.

引理 1. 归一化的 V-描述子 $d(j), j = 1, 2, \dots$, 具有平移、缩放不变性.

证明: 设平移位移为 z_0 , 缩放倍数为 a , 则新的几何体形状为 $a(P(u, v) + z_0)$, 其 V-描述子为

$$\lambda'(j) = \iint_G a(P(u, v) + z_0) v_j(u, v) du dv = a \iint_G P(u, v) v_j(u, v) du dv + \iint_G z_0 v_j(u, v) du dv = a[\lambda(j) + z_0 \delta(j)].$$

这里

$$\delta(j) = \iint_G v_j(u, v) du dv = \begin{cases} 0, & j \neq 0 \\ 1, & j = 0 \end{cases}.$$

当 $j \neq 0$ 时, 有: $\lambda'(j) = a\lambda(j)$, 从而

$$d'(j) = \frac{\|\lambda'(j)\|}{\max(\|\lambda'(j)\|)} = \frac{\|\lambda(j)\|}{\max(\|\lambda(j)\|)} = d(j). \quad \square$$

引理 2. (1) 当几何体绕坐标轴旋转后, 归一化的 V-描述子 $d(j), j = 1, 2, \dots$, 具有不变性.

(2) 归一化的 V-描述子 $d(j), j = 1, 2, \dots$, 绕任意轴旋转不变.

证明: (1) 采用齐次坐标表示几何体形状. 设几何体为

$$P(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v), 1\}.$$

不妨设几何体绕 z 轴旋转角度为 θ , 则旋转后的几何体形状为

$$P(u, v) = \{X(u, v), Y(u, v), Z(u, v), H(u, v)\}$$

$$= (x(u, v), y(u, v), z(u, v), 1) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \{x(u, v) \cos \theta - y(u, v) \sin \theta, x(u, v) \sin \theta + y(u, v) \cos \theta, z(u, v), 1\}$$

其描述子的 3 个分量为

$$\lambda'_x(j) = \iint_G (x(u, v) \cos \theta - y(u, v) \sin \theta) v_j(u, v) du dv = \cos \theta \lambda_x(j) - \sin \theta \lambda_y(j),$$

$$\lambda'_y(j) = \iint_G (x(u, v) \sin \theta + y(u, v) \cos \theta) v_j(u, v) du dv = \sin \theta \lambda_x(j) + \cos \theta \lambda_y(j),$$

$$\lambda'_z(j) = \iint_G z(u, v) v_j(u, v) du dv = \lambda_z(j).$$

于是

$$\begin{aligned}\|\lambda'(j)\|^2 &= (\lambda'_x(j))^2 + (\lambda'_y(j))^2 + (\lambda'_z(j))^2 \\ &= (\cos\theta\lambda_x(j) - \sin\theta\lambda_y(j))^2 + (\sin\theta\lambda_x(j) + \cos\theta\lambda_y(j))^2 + (\lambda_z(j))^2 \\ &= (\lambda_x(j))^2 + (\lambda_y(j))^2 + (\lambda_z(j))^2 \\ &= \|\lambda(j)\|^2.\end{aligned}$$

从而

$$d'(j) = \frac{\|\lambda'(j)\|}{\max(\|\lambda'(j)\|)} = \frac{\|\lambda(j)\|}{\max(\|\lambda(j)\|)} = d(j), j=1,2,\dots$$

(2) 当几何体绕任意轴 A 旋转角 θ 时,可看作几何体经平移及 3 次绕坐标轴的旋转的综合,其过程为:

- (i) 平移几何体连同轴 A ,使 A 经过坐标原点;
- (ii) 将几何体连同轴 A 绕某个坐标轴旋转,使 A 落到某个坐标面,不妨设为 $yo z$ 面;
- (iii) 将几何体连同轴 A 绕 x 轴旋转,使 A 与 z 轴重合;
- (iv) 将几何体绕这个 z 轴旋转角 θ 即完成了“几何体绕轴 A 旋转角 θ ”的过程.

由引理 1 及引理 2 的(1)知,经过上述 4 个步骤,归一化的 V-描述子不会改变. □

综上所述,得到:

定理. 归一化的 V-描述子 $d(j)$, $j=1,2,\dots$, 具有平移、放缩、旋转不变性.

假若两个对象 A 、 B 的归一化 V-描述子分别为 $d_A(j)$ 和 $d_B(j)$,由于对于给定的对象,可用 V-系统有限项(设为 N 项)级数精确表示,所以可以定义这两个对象间的“距离”为

$$Distance = \sqrt{\sum_{j=2}^N (d_A(j) - d_B(j))^2} \quad (4)$$

通过 $Distance$ 可以对不同的对象进行相似程度计算,并能用于识别具有平移、放缩、旋转不变性的对象的形状. $Distance$ 越大表示两个对象形状差异越大, $Distance=0$ 则表示两个对象形状一样.

3 实验检测

我们的实验针对三角域上一次 V-系统进行.

按照计算机对三维几何模型的处理算法,对三维几何数据的组织使用顶点索引数据结构.空间任意三角面片映射到 G 的一个剖分子区域上,就可以得到符合再生性所要求的分片二元一次多项式.具体参数化的步骤为:通过顶点索引得到任意三角面片 $\Delta p_1 p_2 p_3$ 的 3 个顶点 $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i=1,2,3$,把这个三角面片映射到 G 的子区域

$G_{\alpha,\beta}$ 上,设三角子区域 $G_{\alpha,\beta}$ 的顶点为 $\tilde{P}_i = (u_i, v_i)$, $i=1,2,3$.作线性变换

$$\begin{cases} x = a_x u + b_x v + c_x \\ y = a_y u + b_y v + c_y \\ z = a_z u + b_z v + c_z \end{cases}, \text{令其满足: } \begin{cases} x_i = a_x u_i + b_x v_i + c_x \\ y_i = a_y u_i + b_y v_i + c_y \\ z_i = a_z u_i + b_z v_i + c_z \end{cases}, i=1,2,3.$$

从这个方程可唯一确定出前面线性变换中的 9 个系数.该变换实现了三角面片 $\Delta p_1 p_2 p_3$ 的参数化.

如果三维几何模型中的三角面片的总数为 N ,则选取最小正整数 n ,使得 $4^n \geq N$,对三角域 G 进行 n 次剖分(为编程简单,不妨将剩余的 $4^n - N$ 个子区域上的表达式设为零).在这一映射过程中,空间几何模型中的三角面片是一一映射到三角域的剖分网格上的,不允许出现不同三角面片映射到同一三角子区域上的情况.

设三角域上一次 V-系统顺序排序为 $v_0(u, v), v_1(u, v), v_2(u, v), \dots$, 二元一次多项式有 3 个自由度,因此三角面片数为 N 的空间几何模型 P 必可由三角域上 V-系统的 3×4^n 个基函数精确重构,其中 n 是使得 $4^n \geq N$ 的最小正整数.即有

$$P = \left\{ \sum_{j=0}^{3(4^n-1)} \lambda_x^j v_j(u,v), \sum_{j=0}^{3(4^n-1)} \lambda_y^j v_j(u,v), \sum_{j=0}^{3(4^n-1)} \lambda_z^j v_j(u,v) \right\} \quad (5)$$

其中

$$\lambda_x^j = \iint_G (a_x^j u + b_x^j v + c_x^j) v_j(u,v) du dv, \lambda_y^j = \iint_G (a_y^j u + b_y^j v + c_y^j) v_j(u,v) du dv, \\ \lambda_z^j = \iint_G (a_z^j u + b_z^j v + c_z^j) v_j(u,v) du dv, j = 0, 1, 2, \dots, 3(4^n - 1).$$

这里 $a_x^j, b_x^j, c_x^j, a_y^j, b_y^j, c_y^j, a_z^j, b_z^j, c_z^j$ 通过线性变换得到. 系数 $\lambda_x^j, \lambda_y^j, \lambda_z^j$ 分别称为 x, y, z 三个方向的频谱. 式(5)就是空间三角片群体几何模型 P 的频域表示.

例 1: 分层次的 Stanford bunny 模型.

在这个实验中使用的模型为不同分辨率的 Stanford bunny 模型. 如图所示模型的三角面片数从(a)~(f)分别为 512 片、776 片、1436 片、2803 片、3946 片、10122 片, 并且给出相应模型的频谱.

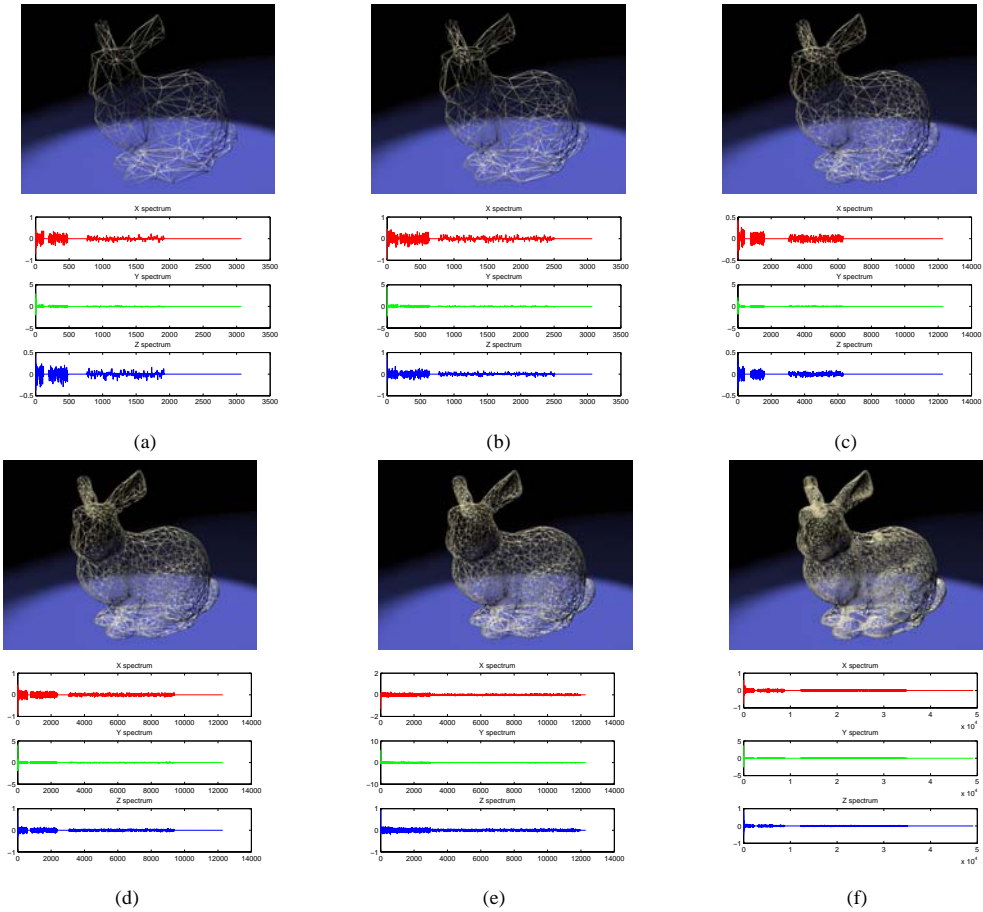


Fig.4 Spectrum of Stanford bunny in different resolutions

图 4 不同分辨率下 Stanford bunny 模型的频谱

例 2: 三角面片群组模型.

在此实验中, 使用了空间的互相分离的散乱三角面片 6 组, 其中每组包含 1 024 个三角面片. (a) 是初始模型. (b), (c), (d) 分别是对 (a) 进行平移, 旋转、缩放等操作得来的. (e) (f) 是对 (a) 中的某些三角面片进行扰动得到. 从视觉上我们很难比较它们的差异. 通过频谱计算及各个群组的归一化描述子, 得到群组之间的“距离”. 这样就可以得到一个衡量它们之间差异的量化标准. 在下面 (a)~(f) 中显示了各个模型及其频谱.

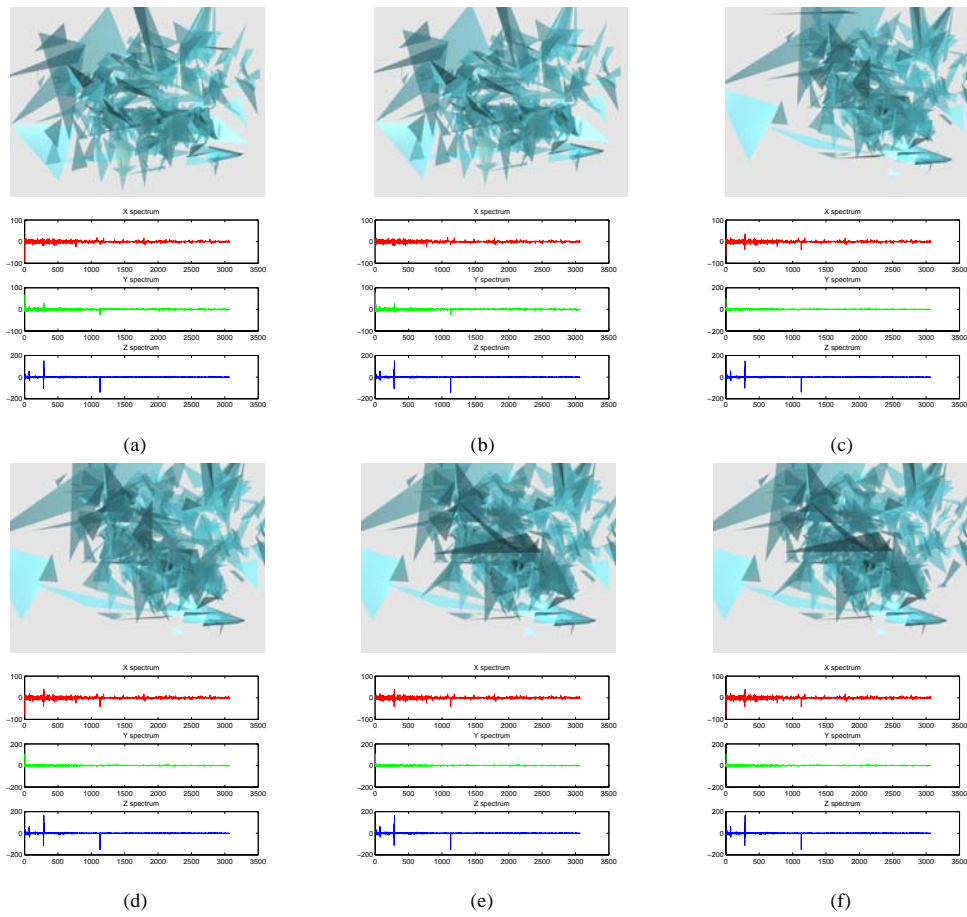


Fig.5 Scattered triangles experiment

图 5 散乱三角片群组实验

Table 1 Normalize descriptor an energy of the models

表 1 模型的归一化描述子及其能量

模型	模型的归一化描述子	模型能量
(a)		388.749 9
(b)		388.305 7
(c)		391.642 9
(d)		431.657 7
(e)		432.909 1
(f)		432.777 8

Table 2 The distance between models**表 2** 各个模型之间的距离

模型	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
(a)	0	0	0	0	2.753 2	2.857
(b)	0	0	0	0	2.753 2	2.857
(c)	0	0	0	0	2.753 2	2.857
(d)	0	0	0	0	2.753 2	2.857
(e)	2.753 2	2.753 2	2.753 2	2.753 2	0	0.187 5
(f)	2.857	2.857	2.857	2.857	0.1875	0

从上述实验看出归一化描述子对模型的平移、缩放、旋转具有不变性.这一特性对于应用归一化描述子进行模型的特征分析是非常重要的.

4 结 论

熟知,对于连续信息,Fourier级数及小波函数是非常方便的工具;对于间断信息,Walsh函数系及Haar函数系可以大展威力;但对于既有连续又有间断的信息,无论是Fourier、小波、Walsh还是Haar,都不尽人意.本文研究的V-系统,恰好能适应既有连续又有间断的信息,这是V-系统与传统的经典正交系最本质的区别.特别是三角域上V-系统的出现,使得众多的三维复杂几何模型(几何群组信息)可以正交分解在频域空间,进而可以做整体特征提取,进行认证、识别、分类等.下一步就是在现有正交展开的频域表达基础上深入开展应用方面的研究.

References:

- [1] Tang RX, Wang JY, Peng QS, Wang GZ, *et al.* Course of Computer Graphics. Beijing: Science Press, 2000. 56–115 (in Chinese).
- [2] Peng QS, Bao HJ, Jin XG. Fundamental Algorithms for Realistic Image Synthesis. Beijing: Science Press, 1999 (in Chinese).
- [3] Foley JD, van Dam A, Feiner SK, Hughes JF. Computer Graphics. Principles and Practice. 2nd Edition, New York: Addison-Wesley Professional, 1995.
- [4] Wang GJ, Wang GZ, Zheng JM. Computer Aided Geometric Design. Beijing: China Higher Education Press; Berlin: Springer-Verlag, 2001 (in Chinese).
- [5] Li HG. Hyperbolic conformal geometry with Clifford algebra. Int'l Journal of Theoretical Physics, 2001,40(1):79–91.
- [6] Jerri AJ. The Gibbs Phenomenon in Fourier Analysis, Splines and Wavelet Applications in the Mathematics and Its Applications. New York: Springer-Verlag, 2006.
- [7] Peter DL. Gibbs phenomena. Journal of Scientific Computing, 2006,28(2-3):445–449.
- [8] Gilbert GW, Shen XP. Wavelets and Other Orthogonal Systems. 2nd Edition, Boca Raton Florida: Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [9] Yves M. Wavelets: Algorithms and applications. Philadelphia: SIAM, 1993.
- [10] Henning FH. Sequency Theory—Foundations and Applications. New York: Academic Press, 1977.
- [11] Zhang QS, Zhang YG. Theory and Application of Bridge Function. Beijing: National Defense Industry Press, 1992 (in Chinese).
- [12] Feng YY, Qi DX. A sequence of piecewise orthogonal polynomials. SIAM Journal of Mathematical Analysis, 1984,15(4):834–844.
- [13] Song RX, Ma H, Wang TJ, Qi DX. Complete orthogonal V-system and its applications. Communications on Pure and Applied Analysis, 2007,6(3):853–871.
- [14] Song RX, Wang XC, Ou MF, Li J. The structure of V-system over triangulated domains. In: Chen FL, Bert J, eds. Advances in Geometric Modeling and Processing LNCS 4975, Springer-Verlag, 2008.563–569.
- [15] Song RX. The Construction of a new class of orthogonal function over triangular domain. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2008,28(8):949–960 (in Chinese with English abstract).
- [16] Song RX, Wang XC, Ma H, Qi DX. V-Descriptor and shape similarity measurement between B-spline curves. In: Proc. of the 1st Int'l Symp. on Pervasive Computing and Application. Beijing: IEEE Press, 2006. 486–490.
- [17] Liang YY, Song RX, Qi DX. Complete orthogonal function system V and points cloud fitting. Journal of System Simulation, 2006,18(8):2109–2113 (in Chinese with English abstract).
- [18] Liang YY, Song RX, Wang XC, Qi DX. Application of a new class of orthogonal function system in geometrical information. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2007,19(7):871–875 (in Chinese with English abstract).

- [19] Song RX, Liang YY, Wang XC, Qi DX. Elimination of Gibbs phenomenon in computational information based on the V-system. In: Proc. of the 2nd Int'l Conf. on Pervasive Computing and Applications. 2007. 337-341.
- [20] Wang XC, Liang YY, Ou MF, Song RX. Application of complete orthogonal V-system. In: Proc. of The 2008 Int'l Congress on Image and Signal Processing, 2008,2:694-698.
- [21] Song RX, Ou MF. The application of V-system in the digital image transform. In: Proc. of the IEEE Int'l Conf. on Information Acquisition 2008 (ICIA 2008). 2008. 296-301.

附中文参考文献:

- [1] 唐荣锡,汪嘉业,彭群生,汪国昭.计算机图形学教程.北京:科学出版社,1990. 56-115.
- [2] 彭群生,鲍虎军,金小刚.计算机真实感图形的算法基础.北京:科学出版社,1999.
- [4] 王国瑾,汪国昭,郑建民.计算机辅助几何设计.北京:高教出版社,施普林格出版社,2001.
- [11] 张其善,张有光.桥函数理论及其应用.北京:国防工业出版社,1992.
- [15] 宋瑞霞.三角域上一类正交函数系的构造.系统科学与数学,2008,28(8):949-960.
- [17] 梁延研,宋瑞霞,齐东旭.完备正交 V-系统与点云数据拟合.系统仿真学报,2006,18(8):2109-2113.
- [18] 梁延研,宋瑞霞,王小春,齐东旭.完备正交 V-系统及其在几何信息重构中的应用.计算机辅助设计与图形学学报,2007,19(7): 871-875.



李坚(1975—),男,北京人,博士生,主要研究领域为计算机图形学.



梁延研(1982—),男,博士生,主要研究领域为数字信号处理,计算机图形学.



宋瑞霞(1963—),女,教授,主要研究领域为计算几何.



齐东旭(1940—),男,教授,博士生导师,主要研究领域为计算几何,计算机图形学.



叶梦杰(1982—),男,硕士生,主要研究领域为计算机图形学.