

鲁棒估计器在 3D 网格降噪中的应用*

毛志红⁺, 马利庄, 赵明喜

(上海交通大学 计算机科学与工程系, 上海 200030)

Robust Estimator for 3D Meshes Filtering

MAO Zhi-Hong⁺, MA Li-Zhuang, ZHAO Ming-Xi

(Department of Computer Science and Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-21-34201746, E-mail: mzh_yu@163.com, http://www.sjtu.edu.cn

Mao ZH, Ma LZ, Zhao MX. Robust estimator for 3D meshes filtering. *Journal of Software*, 2007,18(2): 453-460. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/453.htm>

Abstract: In this paper, the link between least-squares (LS) estimator and Laplacian smoothing method from the point of view of LS method is firstly disclosed. Further more, an M -estimator for mesh filtering is presented. At last, the M -estimator is extended to the re-weighted M -estimator to remove noise while preserving the surface feature efficiently. The re-weighted M -estimator is bilateral filtering in natural.

Key words: mesh filtering; feature preserving; least-squares estimation; M -estimator; re-weighted M -estimator

摘要: 从最小平方估计的观点揭示了最小平方估计与 Laplacian 光顺算法之间的关联,并进一步提出了 M -估计器在网格光顺中的应用,最后延伸 M -估计器至二次加权的 M -估计器,在抑制噪声的同时有效地保持了表面特征。在本质上,二次加权的 M -估计器就是双向滤波器。

关键词: 网格滤波;特征保持;最小平方估计; M -估计器;二次加权的 M -估计器

中图法分类号: TP391 **文献标识码:** A

顾名思义,数字几何处理(digital geometry processing,简称 DGP)就是利用计算机工具来处理离散(数字)几何体的方法。目前,数字几何处理在计算机图形学、计算机辅助设计、可视化和多媒体数据等领域的应用越来越广泛。然而,从现实世界中获取的扫描数据不可避免地带有噪声^[1,2],所以在 DGP 中一个重要的问题就是在保持模型必要的几何特征的同时,如何有效地抑制噪声。目前,噪声数据的鲁棒处理是一个广泛研究的课题。但是,噪声和特征通常是模棱两可的,因此,在光顺过程中如果不小心地处理,尖特征很容易被模糊。

自从 Tanbin^[3]提出用信号处理方法来设计光顺表面以来,在网格光顺问题上已经完成了大量工作,出现了多种算法,如 Laplacian 算符^[3]、各向异性散播算法^[4-7]、法向场的散播算法^[8,9]、移动最小平方(moving least-squares)拟合算法^[10,11]和双向滤波器算法^[12-14]。在国内,徐国良^[15]给出了 Laplace-Beltrami 算子的简单离散化及其收敛性证明,并应用于网格光顺;周昆^[16]等人构造了任意网格模型的全局球面参数化框架,并应用于网格光顺;刘胜兰^[17]等人提出了一种针对三角网格的主曲率均匀的光顺方法。

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60373070, 60521002, 60573147 (国家自然科学基金)

Received 2005-11-06; Accepted 2006-05-11

Jones^[12]提出了一个项特征保持光顺技术.这项技术是基于非递归鲁棒统计的.首先,Jones 通过定义一个局部一阶预估点 $\Pi(\cdot)$ 来捕获表面光滑性;然后,通过周围邻域预估点的加权和来估计新的顶点位置.

$$p' = \frac{1}{k(p)} \sum_{q \in S} \Pi_q(p) \alpha_q f(\|c_q - p\|) g(\|\Pi_q(p) - p\|) \quad (1)$$

根据 Black^[18]和 Durand and Dorsey^[19]得出的结论,Jones 类似地指出方程式(1)近似地对应于最小化方程式(2).

$$E(p) = \int_{q \in S} f(\|c_q - p\|) \rho(\|\Pi_q(p) - p\|) dq \quad (2)$$

但是,我们无法严格地从方程式(2)得到方程式(1).在本文中,我们使用一个鲁棒的统计估计器,因此,可以在网格模型的每个局部邻域内获取所需要的那部分特征数据,同时丢弃不需要的那部分特征数据(不需要的特征数据相当于奇异点,在估计模型参数时要求被排除).同时,我们也将讨论 M -估计器与 Laplacian 光顺及双向滤波算法的关系.粗略地看,这些方法似乎完全不同,但实际上,它们都能够统一在 M -估计器框架下.

本文第 1 节回顾鲁棒统计估计器理论.第 2 节揭示最小平方方法和 Laplacian 光顺之间的联系.第 3 节描述 M -估计器在网格表面滤波中的应用.第 4 节详述二次加权的 M -估计器在网格表面滤波中的应用.第 5 节是实验结果说明.配合实验结果,我们将较为详细地讨论最小平方估计器、 M -估计器和二次加权的 M -估计器在网格光顺中应用的优劣.第 6 节对我们的工作进行概述,并指出存在的不足.

1 鲁棒统计估计器

通常,特征保持光顺被看成是一个统计拟合问题,它等价于从带有奇异点的噪声模型数据中合理地估计出光顺的模型数据.假设无噪声数据为 u' ,噪声数据 $u=u'+n$,其中 n 代表噪声.若 n 为零均值高斯随机变量,则可以通过最小平方方法来估算 u' .如图 1 所示^[20],如果噪声 n 不服从正态分布,则估计复杂度增加.例如,在严重情况下(数据中或者存在大量奇异点,或者仅有一个奇异点,但该点偏离严重),最小平方方法不能像处理小尺度噪声数据那样有效处理偏离严重的情况.

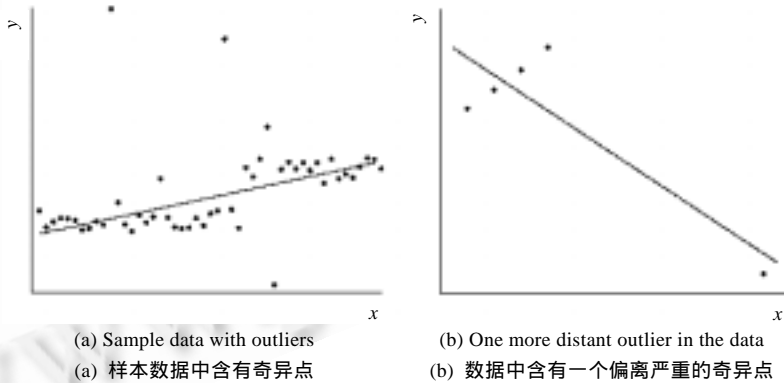


Fig.1 LS method is not a robust estimator

图 1 最小平方方法不是鲁棒估计器

M -估计器通过定义一个优化的目标函数来取代最小平方函数,以减少大偏差奇异点的影响.该函数表达式如下:

$$\min \sum (e^2) \quad (3)$$

这里, ρ 是对称的正定目标函数,在零值点有唯一的最小值.称其导数 $\psi = \frac{d\rho}{de}$ 为影响函数,称 $\omega = \frac{\psi}{e}$ 为权函数.当估计器为鲁棒估计器时,任何单一数据都不足以对估计产生有影响的偏离.一个鲁棒的 M -估计器应满足以下约束^[21]:

- 影响函数,即残差对估计参数的影响程度.最小平方估计器的影响函数与残差大小成正比.鲁棒估计器的影响函数应当是有界的.
- 崩溃点,即影响估计器正确性的奇异点的百分比值.最小平方方法的崩溃点是0,因为只要有一个“坏点”就足以影响估计的正确性.鲁棒估计的最大崩溃点至少为0.5.
- 要求鲁棒估计器的目标函数有唯一的最小值.

近年来,鲁棒估计在计算机图形领域受到了人们的广泛关注.Hui Xie^[22]应用点聚类(points clustering)、鲁棒投票(robust voting)及递归拟合(iterative fitting)等算法来重建噪声点云数据.这些新技术的应用,使得该方法能够可靠地移除奇异点,保持模型特征.Tong^[23]应用一种张量积投票算法,从噪声数据中鲁棒估计曲面曲率张量积.Fleishman^[10]则应用鲁棒的移动最小平方拟合算法,从噪声点云数据中重建光顺曲面.移动最小平方拟合算法概念简单,在光顺噪声的同时,能够有效地保持模型尖特征.

2 最小平方方法与 Laplacian 光顺

对比图像分析,将现有的鲁棒统计技术延伸至 3D 网格存在明显不足:在 3D 网格中,空间位置和信号是同一的.经典的信号 Fourier 变换可看作是将信号分解为特征向量的线性组合.Taubin^[3]将离散表面信号的离散 Laplacian 算符定义为与其邻域点距离的加权平均,

$$\Delta u_i = \sum_{j \in \text{neighbor}(i)} \sigma_{ij} (u_j - u_i) \tag{4}$$

这里,权值 σ_{ij} 为正值,对每个 i 点,其和为 1.在 3D 网格中,当我们逐步移动顶点至其邻域位置时,高频对应于距离值频繁变化,而低频则对应于距离值缓慢变化.在 Laplacian 递归光顺中,每一步递归,新点位置为其周围邻域点的重心^[3,24,25].

下面,我们从最小平方估计的观点给出 Laplacian 光顺的另一种解释.在网格中,设 u_i, u_j 为 3D 表面上的点, u_j 为 u_i 的邻域点. K 为 u_i 邻域点总数,而 n 为网格表面上的总点数. $y_i = |u_i - u_j|$ 为两点之间的欧氏距离.

引理 2.1. 设 $\bar{y} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K y_j$ 且 $\Delta y_j = y_j - \bar{y}$. 如果 $\sum_{j=1}^K \Delta y_j = 0$ 成立,则 $\bar{y}^2 = \min \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K y_j^2$ 一定成立.

证明:假设在邻域点中有 m 个点为 $y_j < \bar{y}$, 相应地,有 $l=K-m$ 个点为 $y_j \geq \bar{y}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K y_j^2 &= \frac{1}{K} \left[\sum_{j=1}^l (\bar{y} + \Delta y_j)^2 + \sum_{j=1}^m (\bar{y} - \Delta y_j)^2 \right] \\ &= \bar{y}^2 + \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K 2\bar{y}\Delta y_j + \sum_{j=1}^K \Delta y_j^2. \end{aligned}$$

又存在 $\sum_{j=1}^K \Delta y_j = 0$,

因此,可推出 $\frac{1}{K} \sum_{j=1}^K y_j^2 = \bar{y}^2 + \sum_{j=1}^K \Delta y_j^2 \geq \bar{y}^2$,

即 $\bar{y}^2 = \min \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K y_j^2$ 成立.

根据引理 2.1,我们定义 3D 表面滤波的最小平方估计器的目标函数为

$$\min \rho(u) = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^K |u_i - u_j|^2 = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^K (u_i - u_j) \times (u_i - u_j) \tag{5}$$

对方程式(5)应用最速下降法,我们可以得到:

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \lambda \frac{\partial \rho}{\partial u_i} = u_i^k - 2\lambda \sum_{j=1}^K (u_i^k - u_j^k) \tag{6}$$

这里, λ 为时步大小.假设 $\lambda = \frac{1}{2K}$, 我们可得到:

$$u_i^{k+1} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K u_j^k \quad (7)$$

方程式(7)即为通用的 Laplacian 光顺表达式.从第 1 节可知,最小平方估计器不是鲁棒的.所以在 Laplacian 光顺过程中,特征(大变动)和噪声(小变动)被同等处理.Laplacian 光顺不是特征保持算法(如图 2 所示).

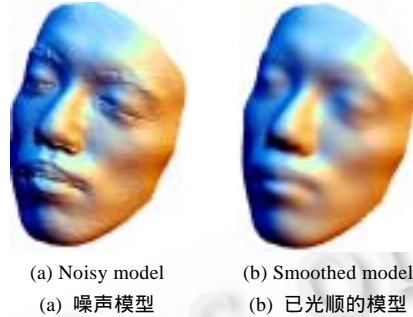


Fig.2 A noisy face model is smoothed by Laplacian smoothing operator

图 2 用 Laplacian 光顺算子光顺一个噪声头像模型

3 M-估计器在网格降噪中的应用

由第 1 节可知,如果定义一个合适的目标函数 ρ , M -估计器就能够有效地减少样本中奇异点的影响.类似于方程式(5),得到:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^K \rho(|u_i - u_j|^2) \quad (8)$$

对方程式(8)应用最速下降法,可以得到:

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \lambda \frac{\partial \rho}{\partial u_i} = u_i^k - 2\lambda \sum_{j=1}^K \omega(|u_i^k - u_j^k|^2)(u_i^k - u_j^k) \quad (9)$$

如果设定 $\lambda = \frac{1}{2 \sum_{j=1}^K \omega(|u_i^k - u_j^k|^2)}$, 则可以得到:

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{\sum_{j=1}^K \omega(|u_i^k - u_j^k|^2)(u_j^k - u_i^k)}{\sum_{j=1}^K \omega(|u_i^k - u_j^k|^2)} \quad (10)$$

已提出的 M -估计器的目标函数 $\rho(\cdot)$ 各有差别,相应地,其影响函数 $\psi(\cdot)$ 及权函数 $\omega(\cdot)$ 也各不相同.图 3 给出了最小平方估计器以及 4 种常用的 M -估计器的函数曲线,从上至下依次为目标函数 $\rho(\cdot)$ 、影响函数 $\psi(\cdot)$ 和权函数 $\omega(\cdot)$;从左至右依次为最小平方估计器、Huber 估计器、Cauchy 估计器、Welsch 估计器和 Beaton and Tukey 估计器.表 1 分别列举了其各自的函数表达式.在 M -估计器中, $\omega(\cdot)$ 往往快速趋近于 0,如 Beaton and Tukey 的权函数曲线所示,这样就能够有效地降低奇异点的影响.

在方程式(10)中,我们仅考虑了顶点与其邻域点的空间距离.但是,仅仅依靠空间距离往往难以有效地区分网格模型中的不连续几何特征,因此,方程式(10)仍然有其局限性(如图 4 所示).

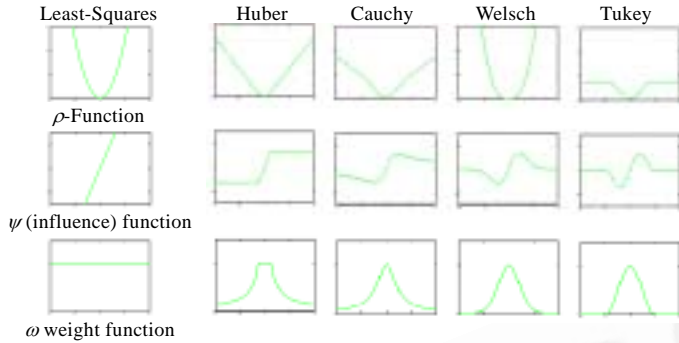


Fig.3 Plots of the LS estimator and other four M -estimators
图 3 最小平方估计器以及另外 4 种 M -估计器的函数曲线

Table 1 A few commonly used M -estimators and least-squares estimator
表 1 几个通用的 M -估计器和最小平方估计器

Type	Objective functions	Influence functions	Weight functions
LS	$x^2/2$	x	1
Huber	$\begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{if } x \leq c \\ k(x - k/2), & \text{if } x > c \end{cases}$	$\begin{cases} x, & \text{if } x \leq c \\ k \operatorname{sgn}(x), & \text{if } x > c \end{cases}$	$\begin{cases} 1, & \text{if } x \leq c \\ \frac{k}{ x }, & \text{if } x > c \end{cases}$
Cauchy	$\frac{c^2}{2} \log\left(1 + \left(\frac{x}{c}\right)^2\right)$	$\frac{x}{1 + \left(\frac{x}{c}\right)^2}$	$\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{c}\right)^2}$
Welsch	$\frac{c^2}{2} \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{c}\right)^2\right)\right]$	$x \exp\left(-\left(\frac{x}{c}\right)^2\right)$	$\exp\left(-\left(\frac{x}{c}\right)^2\right)$
Beaton and Tukey	$\begin{cases} \frac{c}{6} \left[1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2\right]^3, & \text{if } x \leq c \\ \frac{c^2}{6}, & \text{if } x > c \end{cases}$	$\begin{cases} x \left[1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2\right]^2, & \text{if } x \leq c \\ 0, & \text{if } x > c \end{cases}$	$\begin{cases} \left[1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2\right]^2, & \text{if } x \leq c \\ 0, & \text{if } x > c \end{cases}$



Fig.4 A noisy rabbit model smoothed by M -estimator
图 4 应用 M -估计器光滑一个噪声兔子模型

4 二次加权的 M -估计器在网格降噪中的应用

我们知道,连续表面有一个连续变化的切平面.所以,这里我们应用网格表面相邻点的法向量夹角来捕获网格的不连续几何特征.首先我们定义

$$\alpha_j = \arccos(n_i \cdot n_j) \quad (11)$$

其中, n_i, n_j 表示 3D 表面上相邻点的法向量, i, j 代表点的索引. 现在, 我们可以定义二次加权的 M -估计器的目标函数为

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^K \rho(|u_i - u_j|^2) w(\alpha_j^2) \quad (12)$$

这里, $w(\alpha_j^2)$ 是以法向夹角为定义域的权函数. 在本文中, 我们设置

$$w(\alpha_j^2) = e^{-\frac{\alpha_j^2}{\sigma_a^2}} \quad (13)$$

我们也将方程式(12)称为 W -估计器. 按照与上一节相同的处理方式, 应用适当的时步最小化方程式(12), 得到:

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{\sum_{j=1}^K \omega(|u_i^k - u_j^k|^2) w(\alpha_j^2) (u_j^k - u_i^k)}{\sum_{j=1}^K \omega(|u_i^k - u_j^k|^2) w(\alpha_j^2)} \quad (14)$$

事实上, 方程式(14)类似于双向滤波器的表达式. 方程式(14)和方程式(1)唯一的区别就是, 我们使用的权函数 $w(\alpha_j^2)$ 依赖于网格表面上相邻点的法向量夹角, 而不是距离 $\|I_{I_q}(p) - p\|$.

从样本点中分离奇异点通常依赖于样本点的估计尺度. 这里有两个尺度参数需要估计: 一个是表 1 中的函数定义的范围常量 c ; 另一个是方程式(13)中的 σ_a . 假设网格中所有边的平均长度为 \bar{e} , 所有相邻点法向量夹角平均值为 $\bar{\alpha}$, 则我们可定义尺度参数为

$$\sigma_a = \kappa \bar{\alpha}, \quad c = \rho \bar{e} \quad (15)$$

其中, κ, ρ 为调整因子. 通常我们设置 $\kappa=2\sim 3, \rho=1\sim 2$.

5 实验说明

通过对离散表面的离散 Laplacian 算符的分析, 我们提出了一个基于空间距离 $\sum_{j=1}^K |u_i - u_j|^2$ 的最小平方估计器, 同时揭示了最小平方估计器与 Laplacian 光顺算法之间的联系. 正如我们所知, 最小平方估计不是一个鲁棒估计器. 所以, Laplacian 光顺算法不是一种特征保持算法, 在每步递归中, 它同等地处理特征(大变动)和噪声(小变动). 如图 2 所示, 在应用 Laplacian 光顺时, 面部的许多小特征也随着噪声一同消失. 进一步地, 我们讨论了 M -估计器在 3D 网格降噪中的应用. 在图 3 中, 我们对比了最小平方估计器和 4 种通用的鲁棒 M -估计器的函数曲线. 图 4 给出了一个噪声兔子模型以及分别应用 Cauchy 和 Tukey 估计器得到的结果(注意, 兔子头部的特征以及附着着的文字边界有些模糊). 因为仅仅依靠空间距离是不能有效捕获不连续几何特征的, 所以, M -估计器有其局限性. 为了有效地保持特征, 我们拓展了 M -估计器, 提出了一个基于网格表面上相邻点的法向量夹角的二次加权 M -估计器. 事实上, 这里提出的二次加权 M -估计器类似于 Jones^[12]提出的双向滤波器, 唯一的区别就是, 我们使用的权函数 $w(\alpha_j^2)$ 依赖于网格表面上相邻点的法向量夹角, 而不是距离 $\|I_{I_q}(p) - p\|$. 其应用效果如图 5 所示, 在眼睛、鼻子及眉毛处, 特征均保持良好. 在图 6 中, 我们给出了 M -估计器和二次加权 M -估计器的应用效果对比, 在应用 M -估计器时, 龙身的鳞片和龙头的龙须被模糊了(如图 5(b)所示); 而在使用二次加权 M -估计器时, 这些特征能够较好地保持(如图 5(c)所示).

6 结论

在本文中, 我们提出了鲁棒估计器在 3D 网格滤波中的应用. 同时, 我们也指出了 Laplacian 光顺及双向滤波器算法与 M -估计器之间的关联. 正如第 5 节所讨论的, 一个鲁棒的 M -估计器能够对不连续的几何特征进行鲁棒估测, 所以能够有效地保持网格特征. 这里有两个经验参数 σ_a 和 c 需要用户设置. 如何自适应地决定这些参数仍

然是一个有待解决的问题.

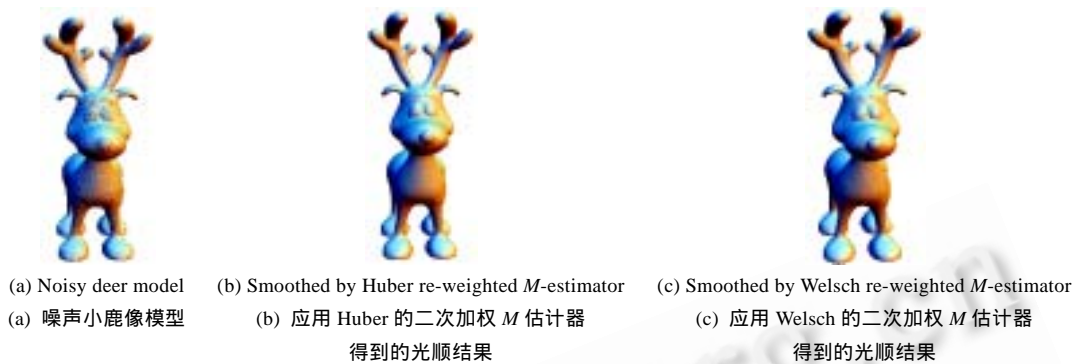


Fig.5 A noisy deer model smoothed by re-weighted M -estimator

图 5 应用二次加权的 M -估计器光顺噪声鹿模型



Fig.6 Comparison between M -estimator and re-weighted M -estimator

图 6 M -估计器和二次加权 M -估计器的对比

致谢 在此,感谢 Yutaka Ohtake, Thouis R. Jones 和 Prasad Choudhury 所提供的网格数据;同时,也衷心感谢 Yutaka Ohtake 的 meshviewer 程序对我们的帮助.

References:

- [1] Rusinkiewicz S, Hall-Holt O, Levoy M. Real-Time 3D model acquisition. *ACM Trans. on Graphics*, 2002,21(3):438-446.
- [2] Levoy M, Pulli K, Curless B, Rusinkiewicz S, Koller D, Pereira L, Ginzton M, Anderson S, Davis J, Ginsberg J, Shade J, Fulk D. The digital michelangelo project: 3D scanning of large statues. In: *Proc. of the SIGGRAPH 2000*. New York: ACM Press, 2000. 131-144.
- [3] Taubin G. A signal processing approach to fair surface design. In: *Proc. of the SIGGRAPH'95*. New York: ACM Press, 1995. 351-358.
- [4] Bajaj C, Xu G. Anisotropic diffusion of noisy surfaces and noisy functions on surfaces. In: *Proc. of the Information Visualization 2001*. London: IEEE Press, 2001. 212-222.
- [5] Hildebrandt K, Polthier K. Anisotropic filtering of non-linear surface features. *Computer Graphics Forum*, 2004,23(3):391-400.
- [6] Desbrun M, Meyer M, Schroder P, Barr AH. Anisotropic feature-preserving denoising of height fields and bivariate data. In: *Proc. of the Graphics Interface 2000*. Montreal: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. 145-152.
- [7] Desbrun M, Meyer M, Schroder P, Barr AH. Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. In: *Proc. of the SIGGRAPH'99*. New York: ACM Press, 1999. 317-324.
- [8] Tasdizen T, Whitaker R, Burchard P, Asher S. Geometric surface smoothing via anisotropic diffusion of the normals. In: *Proc. of the IEEE Visualization 2002*. Boston: IEEE Press, 2002. 125-132.

- [9] Ohtake Y, Belyaev A, Seidel HP. Mesh smoothing by adaptive and anisotropic Gaussian filter applied to mesh normal. In: Proc. of the Vision, Modeling and Visualization 2002. Boston: IEEE Press, 2002. 203–210.
- [10] Fleishman S, Cohen-Or D, Silva CT. Robust moving least-squares fitting with sharp features. In: Proc. of the SIGGRAPH 2005. New York: ACM Press, 2005. 544–552.
- [11] Mederos B, Velho L, de Figueiredo LH. Robust smoothing of noisy point clouds. In: Proc. of the SIAM Conf. on Geometric Design and Computing. Seattle: Nashboro Press, 2003.
- [12] Jones TR, Durand F, Desbrun M. Non-iterative, feature-preserving mesh smoothing. ACM Trans. on Graphics, 2003,21(3): 943–949.
- [13] Fleishman S, Drori I, Cohen-Or D. Bilateral mesh denoising. ACM Trans. on Graphics, 2003,21(3):950–953.
- [14] Choudhury P, Tumblin J. The trilateral filter for high contrast images and meshes. In: Proc. of the Eurographics Symp. on Rendering. Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. 186–196.
- [15] Xu GL. Discrete Laplace-Beltrami operators and their convergence. Computer Aided Geometric Design, 2004,21(3):767–784.
- [16] Zhou K, Bao HJ, Shi JY. A unified framework for digital geometry processing. Chinese Journal of Computers, 2002,25(9): 904–909 (in Chinese with English abstract).
- [17] Liu SL, Zhou RR, Nie JH, Zhou LS. Mesh smoothing using principal curvature flow. Chinese Journal of Computers, 2004,27(1):79–94 (in Chinese with English abstract).
- [18] Black M, Sapiro G, Marimont D, Heeger D. Robust anisotropic diffusion. IEEE Trans. on Image Processing, 1998,7(3):421–432.
- [19] Durand F, Dorsey J. Fast bilateral filtering for the display of high-dynamic-range Images. ACM Trans. on Graphics, 2002,21(3): 257–266.
- [20] Stewart CV. Robust parameter estimation in computer vision. SIAM Review, 2002,41(3):513–537.
- [21] Meer P. Robust Techniques for Computer Vision. New York: Prentice Hall, 2004.
- [22] Xie H, McDonnell KT, Qin H. Surface reconstruction of noisy and defective data sets. In: Proc. of the IEEE Visualization 2004. Boston: IEEE Press, 2004. 259–266.
- [23] Tong WS, Tang HK. Robust estimation of adaptive tensors of curvature by tensor voting. IEEE Trans. on PAMI, 2005,27(3): 434–449.
- [24] Taubin G. Geometric signal processing on polygonal meshes. In: Proc. of the Eurographics 2000. Heidelberg: Springer-Verlag, 2000.
- [25] Taubin G, Zhang T, Golub G. Optimal surface smoothing as filter design. In: Proc. of the 4th European Conf. on Computer Vision. Heidelberg: Springer-Verlag, 1996. 283–292.

附中文参考文献:

- [16] 周昆,鲍虎军,石教英.统一的数字几何处理框架.计算机学报,2002,25(9):904–909.
- [17] 刘胜兰,周儒荣,聂军洪,周来水.主曲率均匀的网格光滑.计算机学报,2004,27(1):79–94.



毛志红(1971 -),男,湖南株洲人,博士,主要研究领域为计算机图形学,数字几何处理.



赵慕喜(1976 -),男,博士,主要研究领域为计算机图形学,几何造型.



马利庄(1963 -),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机图形学,数字几何处理,几何造型.