ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
*Journal of Software*, Vol.18, No.1, January 2007, pp.33−39
DOI: 10.1360/jos180033

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

# Gödel *n* 值命题逻辑中命题的$\alpha$-真度理论*

李 骏[1,2+], 王国俊[1]

[1](陕西师范大学 数学与信息科学学院,陕西 西安 710062)
[2](兰州理工大学 理学院,甘肃 兰州 730050)

## Theory of $\alpha$-Truth Degrees in *n*-Valued Gödel Propositional Logic

LI Jun[1,2+], WANG Guo-Jun[1]

[1](College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)
[2](School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)
+ Corresponding author: Phn: +86-29-85314523, E-mail: lijun@stu.snnu.edu.cn

**Li J, Wang GJ. Theory of $\alpha$-truth degrees in *n*-valued Gödel propositional logic. *Journal of Software,* 2007, 18(1):33−39**. http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/33.htm

**Abstract**: In order to establish a graded reasoning mechanism and provide a possible framework for approximate reasoning in *n*-valued propositional logic, this paper introduces the concept of $\alpha$-truth degrees of propositions in *n*-valued Gödel logical system by using the infinite product of uniformly distributed probability spaces of cardinal *n*. It is proved that the general inference rules with truth degrees hold, and a sufficient and necessary condition to judge $\alpha$-tautology is obtained. Moreover, an intrinsic pseudo-metric on the set of propositions is defined by means of the similarity degree between propositions, which makes it possible to develop approximate reasoning in *n*-valued propositional logic. The graded method proposed in this paper lays a foundation for the algorithmic realization of approximate reasoning and serves as a guideline for the graded reasoning about knowledge.
**Key words**: $\alpha$-truth degree; truth degree; $\alpha$-similarity degree; pseudo-metric

摘 要: 为了在 *n* 值命题逻辑系统中建立一种程度化推理机制,并为其提供一个可能的近似推理框架,利用势为 *n* 的均匀概率空间的无穷乘积,在 *n* 值 Gödel 命题逻辑系统中引入命题的$\alpha$-真度概念.证明了一般真度推理规则,给出了判定$\alpha$-重言式的充分必要条件,并利用命题的$\alpha$-真度定义了命题间的$\alpha$-相似度,进而导出命题集上的一种伪距离,使得在 *n* 值命题逻辑系统中展开近似推理成为可能.提出的程度化推理方法为近似推理的算法实现奠定了基础,并对知识推理的程度化有所启示.
关键词: $\alpha$-真度;真度;$\alpha$-相似度;伪距离
中图法分类号: TP18 文献标识码: A

精确的、形式化的逻辑推理是人工智能学科及相关研究中普遍采用的方法[1],这种方法在诸如定理的自动

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10331010 (国家自然科学基金); the Innovation Foundation for Doctors of Shaanxi Normal University of China (陕西师范大学博士创新基金); the Outstanding Youth Foundation of Lanzhou University of Technology of China (兰州理工大学优秀青年基金)

Received 2005-09-15; Accepted 2006-05-24

证明[2,3]、知识推理[4]、逻辑程序设计[5]等多个领域得到了广泛应用.数值计算则似乎是远离形式推理的完全不同的方法,但由于人脑的思维模式与推理方法带有不确定性,导致推理不是精确的,而仅是近似的.因此,近年来,将二者相融合的研究越来越受到人们的关注.其实,早在 20 世纪 50 年代,文献[6]中用"指派真值"来反映逻辑公式真实度的做法已经反映了数理逻辑概念的程度化思想.这种思想在 Pavelka 的系列文章[7]中得到了全面的发展.值得注意的是,文献[8]中基于相似度概念提出了一种既是程度化又保持了经典逻辑中严格形式化特征的近似推理理论.在文献[8]中,逻辑公式、公理和演绎推理都保持了经典逻辑中的严格形式,只是语构和语义蕴涵关系都已程度化.另外,文献[9–12]中还分别就二值、$n$ 值以及连续值逻辑提出了类似的近似推理理论,我们基于$\alpha$-重言式理论,在修正的 Kleene 逻辑系统中建立了区分逻辑公式真实程度的类类互异定理[13].可见,将逻辑概念程度化,进而展开近似推理的研究成果是大量的.本文在 Gödel $n$ 值命题逻辑系统中引入了命题的$\alpha$-真度概念,首先将公式(命题)程度化,进而研究了命题的$\alpha$-真度与$\alpha$-重言式间的关系,给出了一般真度 MP(modus ponens)规则和 HS(hypothetical syllogism)规则,最后,利用$\alpha$-真度进一步定义了命题间的$\alpha$-相似度及伪距离,使得在 $n$ 值命题逻辑系统中展开另外一种带有度量的近似推理成为可能.

## 1 预备知识

**定义 1**[11]. 设 $S=\{p_1,p_2,\ldots\}$是可数集,$\neg$是一元运算,$\vee$与$\to$是二元运算,由 $S$ 生成的$(\neg,\vee,\to)$型自由代数记作$F(S)$.$F(S)$中的元素称为公式或命题,$S$ 中的元素称为原子公式或原子命题.

**定义 2**[11]. 设 $n\in N,n\geq 3$.令 $I_n=\left\{0,\frac{1}{n-1},\frac{2}{n-1},\ldots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$,在 $I_n$ 中规定:

$$\forall x,y\in I_n, x\vee y=\max\{x,y\}, x\to y=R_G(x,y), \neg x=x\to 0.$$

这里,$R_G$ 为 Gödel 蕴涵算子,则 $I_n$ 成为$(\neg,\vee,\to)$型代数,称为 $n$ 值 Gödel 命题逻辑系统.

**注 1**. $\forall x,y\in I_n$, $R_G(x,y)=\begin{cases}1, x\leq y\\ y,\text{其他}\end{cases}$.

下面我们将赋值及广义重言式理论中的几个概念推广到 $n$ 值逻辑系统 $I_n$ 中.

**定义 3**. 设 $A\in F(S),\alpha\in I_n$.

(i) 从 $F(S)$到 $I_n$ 的同态映射称为 $I_n$-赋值.全体 $I_n$-赋值的集合简记为$\Omega_n$.

(ii) 若对任意 $v\in\Omega_n$,总有 $v(A)\geq\alpha$,则称 $A$ 为 $I_n$ 上的$\alpha$-重言式,其全体记为$\alpha-T(I_n)$.特别地,当$\alpha=1$ 时,称 $A$ 为 $I_n$ 上的重言式.相应地,把 $1-T(I_n)$简记为 $T(I_n)$.

(iii) 若对任意 $v\in\Omega_n$,总有 $v(A)\leq\alpha$,则称 $A$ 为 $I_n$ 上的$\alpha$-矛盾式,其全体记为$\alpha$-$C(I_n)$.特别地,当$\alpha=0$ 时,称 $A$ 为 $I_n$ 上的矛盾式,相应地,把 0-$C(I_n)$简记为 $C(I_n)$.若$\forall v\in\Omega_n,\alpha>0$,均有 $v(A)<\alpha$,则称 $A$ 为 $I_n$ 上的$\alpha^-$-矛盾式,其全体记为$\alpha^- - C(I_n)$.

## 2 公式的$\alpha$-真度

**定义 4**[14]. 设$(X_n,A_n,\mu_n)$是概率测度空间,这里,$\mu_n$是 $X_n$ 上的 Lebesgue 测度;$A_n$是全体$\mu_n$可测集之族;$\mu_n(X_n)=1$.令 $X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$,则 $\prod_{n=1}^{\infty}A_n$ 在 $X$ 上可生成一个$\sigma$-代数 $A$,这时,$X$ 上存在唯一的测度$\mu$满足条件:

(i) $A$ 是 $X$ 中的$\mu$可测集之族;

(ii) 对于 $\prod_{n=1}^{m}X_n$ 中的任一可测集 $E$,$E\times\prod_{n=m+1}^{\infty}X_n$ 可测,且

$$\mu\left(E\times\prod_{n=m+1}^{\infty}X_n\right)=(\mu_1\times\mu_2\times\ldots\times\mu_m)(E), m=1,2,\ldots \tag{1}$$

称$\mu$为 $X$ 上的关于$\mu_1,\mu_2,\ldots$的无穷乘积测度,概率测度空间$(X,A,\mu)$也简记为 $X$.

**定义 5**. 设 $X_n=\left\{0,\frac{1}{n-1},\frac{2}{n-1},\ldots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$,$\mu_n$是 $X_n$ 上的均匀概率测度,即$\mu_n(\varnothing)=0,\mu_n(X_n)=1$,且

$$\mu_n(\{0\})=\mu_n\left(\left\{\frac{1}{n-1}\right\}\right)=\mu_n\left(\left\{\frac{2}{n-1}\right\}\right)=\ldots=\frac{1}{n}(n=1,2,\ldots).$$

令 $X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$,设$\mu$为 $X$ 上的关于$\mu_1,\mu_2,\ldots$的无穷乘积测度,称$\mu$为 $n$ 值逻辑测度.

**定义 6**. 设 $v\in\Omega_n$,记 $v(p_k)=v_k(k=1,2,\ldots)$,则无穷维向量$\vec{v}=\{v_1,v_2,\ldots\}\in X$,这里,$X$ 由定义 5 确定.反之,设$\vec{v}=\{v_1,v_2,\ldots\}\in X$,则由$\vec{v}$唯一确定$\Omega_n$中的一个赋值 $v$,这里,$v(p_k)=v_k(k=1,2,\ldots)$.令$\varphi(v)=\vec{v}$,则$\varphi:\Omega_n\to X$是从$\Omega_n$到 $X$ 的一一对应,称$\varphi$为$\Omega_n$的测度化映射.

定义 7. 设 $A\in F(S)$,令

$$[A]_\alpha=\{\vec{v}\in X\mid v\in\Omega_n,v(A)\geq\alpha\},\tau_\alpha(A)=\mu([A]_\alpha) \tag{2}$$

称$\tau_\alpha(A)$为 $A$ 的$\alpha$-真度.且当$\alpha=1$ 时,把公式 $A$ 的 1-真度简称为 $A$ 的真度,简记为$\tau(A)$,并把$[A]_1$简记为$[A]$.

显然,对 $F(S)$中任一公式 $A$,都有 $0\leq\tau_\alpha(A)\leq1$.又,逻辑等价的公式有相等的$\alpha$-真度.

**注 2**. 设

$$A=A(p_{i_1},p_{i_2},\ldots,p_{i_t}),E_\alpha=\{\vec{v}(i_1,\ldots,i_t)\in\prod_{k=1}^{t}X_{i_k}\mid v(A)\geq\alpha\} \tag{3}$$

则

$$[A]_\alpha=E_\alpha\times\prod\{X_j\mid j\neq i_k,k=1,2,\ldots,t\} \tag{4}$$

因为 $E_\alpha$作为有限的均匀空间$\prod_{k=1}^{t}X_{i_k}$的子集是可测集,所以,由定义 4 以及式(4)可知,$[A]_\alpha$是 $X$ 中的可测集.故由式(2)定义的$\tau_\alpha(A)$是存在的,通过从$\Omega_n$向测度空间 $X$ 的这种转移可以看出:$\tau_\alpha(A)$表示所有使 $v(A)\geq\alpha$的赋值 $v$ 在$\Omega_n$中所占的份额,这种份额越大,$A$ 的$\alpha$-真度值就越大.当$\alpha=1$ 时,$\tau(A)$表示所有使 $v(A)=1$ 的赋值 $v$ 在$\Omega_n$中所占的份额,这种份额越大,$A$ 的真确度就越大.所以,把$\tau(A)$称作 $A$ 的真度是恰当的.

**注 3**. 显然,$A$ 的真度值$\tau(A)$反映的是公式 $A$ 为重言式的程度,而 $A$ 的$\alpha$-真度值$\tau_\alpha(A)$则反映了 $A$ 为$\alpha$-重言式的程度.

**定理 1**. 设 $A,B\in F(S),\alpha\in I_n$.

(i) 若 $A$ 与 $B$ 逻辑等价,则$\tau_\alpha(A)=\tau_\alpha(B)$.

(ii) $A\in\alpha\text{-}T(I_n)$当且仅当$\tau_\alpha(A)=1$;当$\alpha>0$ 时,$A\in\alpha^{-}-C(I_n)$当且仅当$\tau_\alpha(A)=0$.

证明:(i)是显然的,下面证明(ii).

设 $A$ 是 $I_n$ 中的$\alpha$-重言式,即$\forall v\in\Omega_n$都有 $v(A)\geq\alpha$,则

$$[A]_\alpha=\{\vec{v}\in X\mid v\in\Omega_n,v(A\geq\alpha)\}=X.$$

从而,$\tau_\alpha(A)=\mu([A]_\alpha)=\mu(X)=1$.

反过来,若 $A\notin\alpha-T(I_n)$,设 $A=A(p_{i_1},\ldots,p_{i_m})$,则有 $v\in\Omega_n$ 使 $v(A)<\alpha$.设 $v(p_{i_k})=v_{i_k}(k=1,\ldots,m)$,则 $(v_{i_1},\ldots,v_{i_m})\in E_\alpha$,这里,$E_\alpha$由式(3)确定.因为 $\mu_{i_1}(\{v_{i_1}\})\times\ldots\times\mu_{i_m}(\{v_{i_m}\})=\left(\frac{1}{n}\right)^m$,所以,$(\mu_{i_1}\times\ldots\times\mu_{i_m})(E)\leq1-\left(\frac{1}{n}\right)^m$.从而,由式(1)及式(4)可知,$\mu([A]_\alpha)\neq1$.从而与$\tau_\alpha(A)\neq1$ 矛盾. □

类似可证关于$\alpha^{-}$-矛盾式的结论.

**引理 1**. 设 $a,b\in[0,1]$,则

(i) 当 $a=1$ 时,$1\to b=b$;

(ii) $a\to b\geq b$.

**定理 2**. 设 $A,B\in F(S),\alpha\in I_n\backslash\{0\}$,若 $A$ 是重言式,则

$$\tau_\alpha(A\to B)=\tau_\alpha(B),\tau_\alpha(B\to A)=1.$$

证明:由 $A$ 是重言式可知,$\forall v\in\Omega_n, v(A)=1$,从而由定义及引理 1 可知

$$\begin{aligned}\tau_\alpha(A\to B)&=\mu([A\to B]_\alpha)=\mu(\{\vec{v}\in X\mid v(A\to B)\geq\alpha\})\\&=\mu(\{\vec{v}\in X\mid v(A)\to v(B)\geq\alpha\})=\mu(\{\vec{v}\in X\mid 1\to v(B)\geq\alpha\})\\&=\mu(\{\vec{v}\in X\mid v(B)\geq\alpha\})=\tau_\alpha(B).\end{aligned}$$

类似可证另一结论. □

## 3 一般真度推理规则

定理 **3**(一般真度 **MP** 规则). 设 $A,B\in F(S),\alpha,\beta\in I_n$,若 $\tau_\alpha(A)\geq s,\tau_\beta(A\to B)\geq t$,则 $\tau_\gamma(B)\geq(s+t-1)\vee 0$.其中,$\gamma\geq\alpha\wedge\beta$.

证明:令 $G_1=\{\vec{v}\in X\mid v\in\Omega_n, v(A)\geq\alpha\}$, $G_2=\{\vec{v}\in X\mid v\in\Omega_n, v(A\to B)\geq\beta\}$, 则由假设可知,$\mu(G_1)\geq s,\mu(G_2)\geq t$,且

$$\forall v\in G_1, v(A)\geq\alpha;\forall v\in G_2, v(A\to B)\geq\beta.$$

令 $G=G_1\cap G_2$,则

$$\begin{aligned}\mu(X-G)&=\mu(X-G_1\cap G_2)=\mu((X-G_1)\cup(X-G_2))\\&\leq\mu(X-G_1)+\mu(X-G_2)=(1-\mu(G_1))+(1-\mu(G_2))\\&\leq 2-s-t.\end{aligned}$$

所以,$\mu(G)\geq 1-(2-s-t)=s+t-1$.又 $\mu(G)\geq 0$,故 $\mu(G)\geq(s+t-1)\vee 0$.

下面来看$\gamma$值的估计.

设 $\vec{v}\in G$,则 $v(A)\geq\alpha, v(A\to B)=v(A)\to v(B)=R_G(v(A),v(B))\geq\beta$.由注 1($R_G$ 的定义)易知 $v(B)\geq\alpha\wedge\beta$,令

$$H=\{\vec{v}\in X\mid v\in\Omega_n, v(B)\geq\alpha\wedge\beta\}.$$

显然有 $G\subset H$,故 $\mu(H)\geq\mu(G)=r$.因此,若令 $\gamma=\alpha\wedge\beta$,则有 $\tau_\gamma(B)=\mu(H)\geq r$ 成立,即$\gamma$至少可以等于$\alpha\wedge\beta$,从而$\gamma\geq\alpha\wedge\beta$. □

仿照此定理的证明,容易得出下面的定理.

定理 **4**(一般真度 **HS** 规则). 设 $A,B,C\in F(S),\alpha,\beta\in I_n$,若 $\tau_\alpha(A\to B)\geq s,\tau_\beta(B\to C)\geq t$,则 $\tau_\gamma(A\to C)\geq(s+t-1)\vee 0$.其中,$\gamma\geq\alpha\wedge\beta$.

上面两个定理包含许多特殊情形,如当 $s=t=1$ 时就有:

推论 **1**. 设 $A,B,C\in F(S)$,则

(i) 若 $\tau_\alpha(A)=1,\tau_\beta(A\to B)=1$,则 $\tau_\gamma(B)=1$.

(ii) 若 $\tau_\alpha(A\to B)=1,\tau_\beta(B\to C)=1$,则 $\tau_\gamma(A\to C)=1$.其中,$\gamma\geq\alpha\wedge\beta$.

又,当$\alpha=\beta=1$ 时,可以得到应用更为广泛的真度推理规则.

定理 **5**(真度推理规则). 设 $A,B,C\in F(S)$,

(i) (真度 **MP** 规则):若 $\tau(A)\geq s,\tau(A\to B)\geq t$,则 $\tau(B)\geq(s+t-1)\vee 0$.

(ii) (真度 **HS** 规则):若 $\tau(A\to B)\geq s,\tau(B\to C)\geq t$,则 $\tau(A\to C)\geq(s+t-1)\vee 0$.

进一步地,当 $s=t=1$,且$\alpha=\beta=1$ 时可得:

推论 **2**.

(i) 若 $\tau(A)=1,\tau(A\to B)=1$,则 $\tau(B)=1$.

(ii) 若 $\tau(A\to B)=1,\tau(B\to C)=1$,则 $\tau(A\to C)=1$.

## 4 公式间的$\alpha$-相似度及伪距离

定义 **8**. 设 $A,B\in F(S),\alpha\in I_n$,令

$$\xi_\alpha(A,B)=\tau_\alpha((A\to B)\wedge(B\to A)),$$

称$\xi_\alpha(A,B)$为 $A$ 与 $B$ 的$\alpha$-相似度.

又,当$\xi_\alpha(A,B)=1$ 时,称 $A$ 与 $B$ 是$\alpha$-相似的,记作:$A\backsim_\alpha B$.

特别地,当$\alpha=1$ 时,略去上面定义中的前缀和下缀$\alpha$,得到:

$$\xi(A,B)=\tau((A\to B)\wedge(B\to A)) \tag{5}$$

称$\xi(A,B)$为 $A$ 与 $B$ 的相似度,当$\xi(A,B)=1$ 时,称 $A$ 与 $B$ 是相似的,记作:$A\backsim B$.

下面对定义 8 作进一步研究,由$\alpha$-真度的定义可知,

$$\xi_\alpha(A,B)=\tau_\alpha((A\to B)\wedge(B\to A))=\mu(\{\vec{v}\in X\mid v\in\Omega_n,v(A\to B)\ge\alpha\text{且}v(B\to A)\ge\alpha\})\tag{6}$$

特别地,当$\alpha=1$ 时,由式(6)易得

$$\xi(A,B)=\mu(\{\vec{v}\in X\mid v\in\Omega_n,v(A)=v(B)\})\tag{7}$$

由式(6)及式(7)可得下面的注解.

**注 4**. 公式 $A$ 与 $B$ 的$\alpha$-相似度反映了公式 $A\to B$ 及 $B\to A$ 同时为$\alpha$-重言式的程度,而 $A$ 与 $B$ 的相似度反映了公式 $A\to B$ 及 $B\to A$ 同时为重言式的程度.

**定理 6**. 设 $A,B,C\in F(S),\alpha\in I_n$,则

(i) $\xi_\alpha(A,B)=\xi_\alpha(B,A)$.

(ii) $A\backsim_\alpha B$ 当且仅当$(A\to B)\wedge(B\to A)\in\alpha-T(I_n)$.

当$\alpha=1$ 时,$A\backsim B$ 当且仅当 $A$ 与 $B$ 逻辑等价,特别地,有 $A\backsim A$.

(iii) 当 $A$ 为重言式时,$\xi_\alpha(A,B)=\tau_\alpha(B)$,这里,$\alpha\in I_n-\{0\}$.

**定理 7**. 设 $A,B,C\in F(S),\alpha,\beta\in I_n$,若$\xi_\alpha(A,B)\ge t,\xi_\beta(B,C)\ge s$,则$\xi_\gamma(A,C)\ge(s+t-1)\vee 0$.其中,$\gamma\ge\alpha\wedge\beta$.

证明:令 $G_1=\{\vec{v}\in X\mid v\in\Omega_n,v((A\to B)\wedge(B\to A))\ge\alpha\}$,

$G_2=\{\vec{v}\in X\mid v\in\Omega_n,v((B\to C)\wedge(C\to B))\ge\beta\}$, 则

$$\mu(G_1)=\xi_\alpha(A,B)\ge t,\mu(G_2)=\xi_\beta(B,C)\ge s,$$

且

$$\forall v\in G_1,v(A\to B)\ge\alpha\text{且 }v(B\to A)\ge\alpha\tag{8}$$

$$\forall v\in G_2,v(B\to C)\ge\beta\text{且 }v(C\to B)\ge\beta\tag{9}$$

令 $G=G_1\cap G_2$,则有

$$1\ge\mu(G_1\cap G_2)=\mu(G_1)+\mu(G_2)-\mu(G),$$

即

$$\mu(G)\ge\mu(G_1)+\mu(G_2)-1\ge s+t-1.$$

令 $r=\mu(G)$,则 $r\ge 0$,故 $r\ge(s+t-1)\vee 0$.

下面来看$\gamma$值的估计.

设 $\vec{v}\in G$, 则 $\vec{v}\in G_1$, 且 $\vec{v}\in G_2$, 由式(8)及式(9)可知:

$$v(A\to B)\ge\alpha\text{且 }v(B\to C)\ge\beta.$$

从而,由注 1 可知:

当 $v(A)\le v(C)$时,$v(A\to C)=v(A)\to v(C)=1\ge\alpha\wedge\beta$;

当 $v(A)>v(C)$时,$v(A\to C)=v(A)\to v(C)=v(C)$,此时,

若 $v(B)>v(C)$,则有

$$v(B\to C)=v(B)\to v(C)=v(C)\ge\beta.$$

从而,$v(A\to C)=v(C)\ge\beta$,当然有

$$v(A\to C)\ge\beta\wedge\alpha.$$

若 $v(B)<v(C)$,则 $v(B)<v(A)$,可由 $v(A\to B)=v(B)\ge\alpha$得知:

$$v(C)>v(B)\ge\alpha.$$

当然有 $v(A\to C)=v(C)>\alpha\ge\alpha\wedge\beta$.

总之有 $v(A\to C)\ge\alpha\wedge\beta$.

类似可证 $v(C\to A)\ge\alpha\wedge\beta$.从而

$$v((A\to C)\wedge(C\to A))=v(A\to C)\wedge v(C\to A)\ge\alpha\wedge\beta.$$

仿照定理 3 最后部分的证明,可得$\gamma\ge\alpha\wedge\beta$. □

**推论 3**. 设 $A,B,C\in F(S)$,则

(i) 若$\xi_\alpha(A,B)=1,\xi_\beta(B,C)=1$,则$\xi_\gamma(A,C)=1$.其中,$\gamma\geq\alpha\wedge\beta$.

(ii) 若$\xi(A,B)\geq t,\xi(B,C)\geq s$,则$\xi(A,C)\geq t+s-1$.更一般地有

$$\xi(A,C)\geq\xi(A,B)+\xi(B,C)-1.$$

**定理 8**. 设 $A,B\in F(S)$,规定

$$\rho(A,B)=1-\xi(A,B),$$

则$\rho:F(S)\times F(S)\to[0,1]$是 $F(S)$上的伪距离.

证明:设 $A,B,C\in F(S)$,则由定理 6 及推论 3 可知:

(i) $\rho(A,A)=1-\xi(A,A)=0$;

(ii) $\rho(A,B)=1-\xi(A,B)=1-\xi(B,A)=\rho(B,A)$;

(iii) $\rho(A,C)=1-\xi(A,C)\leq1-(\xi(A,B)+\xi(B,C)-1)=(1-\xi(A,B))+(1-\xi(B,C))=\rho(A,B)+\rho(B,C)$. □

## 5 结束语

本文基于测度理论在 $n$ 值 Gödel 命题逻辑系统中提出了命题的$\alpha$-真度理论,并引入了命题间的$\alpha$-相似度及伪距离,从而公式与公式之间就有了远近的概念.这样,我们在文献[12,15]中分别为连续值 Lukasiewicz 以及 $n$ 值广义 Lukasiewicz 命题逻辑系统所建立的近似推理机制就可以完全移植到 $n$ 值 Gödel 系统中.需要指出的是:本文的工作是在均匀概率分布情形下展开的,但在人工智能以及形式化逻辑推理的实际应用中,往往会对某些命题有所侧重,从而需要赋予它们较大的概率.所以,针对非均匀分布情形进行研究会有更大的应用价值.当然,相应研究的难度也会增大.不过,近年来兴起的概率逻辑学[16]的一些方法有可能用于我们的研究当中.另外,本文的方法是一种程度化的推理方法,它在数值计算与形式化逻辑推理之间搭起了一座桥梁,这也使得建立在本文所给框架之上的近似推理从算法上得以实现成为可能.当然,如何从算法上具体实现以及算法的复杂性等,仍是值得进一步研究的课题.最后要指出的是:近年来兴起的知识推理在经济、哲学、人工智能以及计算机科学等领域得到广泛的应用[17],本文的思想和方法也可以用于程度化的知识推理,对此,我们将另文加以讨论.

致谢 作者衷心感谢审稿专家提供的宝贵修改意见和建议.

**References**:

[1] Shi CY, Huang CN, Wang JQ. Principles of Artificial Intelligence. Beijing: Tsinghua University Press, 1993 (in Chinese).

[2] Schumann JM. Automated Theorem Proving in Software Engneering. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

[3] Liu XH. Automatic Reasoning Based on Resolution Methods. Beijing: Science Press, 1994 (in Chinese).

[4] Lu RQ, Ying MS. A model for reasoning about knowledge. Science of China (Series E), 1998,28(4):363−369 (in Chinese with English abstract).

[5] Lioyd JW. Foundations of Logic Programming. New York: Springer-Verlag, 1987.

[6] Rosser JB, Turquette AR. Many-Valued Logics. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1952.

[7] Pavalk J. On fuzy logic (I, II, III). Z Math Logik Grundlagen Math, 1979,25:45−52; 119−134; 447−464.

[8] Ying MS. A logic for approximate reasoning. The Journal of Symbolic Logic, 1994,59(3):830−837.

[9] Wang GJ, Fu L, Song JS. Theory of truth degrees of propositions in two-valued logic. Science of China (Series A), 2002,45(9): 1106−1116.

[10] Li J, Li SP, Xia YF. Theory of truth degrees of propositions in Lukasiewicz $n$-valued popositional logic. Acta Mathematica Sinica, 2004,47(4):769−780 (in Chinese with English abstract).

[11] Wang GJ. Non-Classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning. Beijing: Science Press, 2000 (in Chinese).

[12] Wang GJ, Leung Y. Intergrated sematics and logic metric spaces. Fuzzy Sets and Systems, 2003,136(1):71−91.

[13] Wang GJ. Theory of $\Sigma$-($\alpha$-tautologies) in revised Kleene system. Science of China (Series E), 1998,28(2):146−152 (in Chinese with English abstract).

[14] Halmos PR. Measure Theory. New York: Springer-Verlag, 1974.

[15] Li J, Wang GJ. Theory of truth degrees of propositions in logic system $L_n^*$. Science of China (Series E), 2006,36(6):631–643 (in Chinese with English abstract).

[16] Adams EW. A Primer of Probability Logic. Stanford: CSLI Publications, 1998.

[17] Fagin R, Halpern JH, Moses Y, Vardi MY. Reasoning about Knowledge. MIT Press, 1995.

## 附中文参考文献:

[1] 石纯一,黄昌宁,王家钦.人工智能原理.北京:清华大学出版社,1993.

[3] 刘叙华.基于归结方法的自动推理.北京:科学出版社,1994.

[4] 陆汝钤,应明生.知识推理的一个模型.中国科学(E 辑),1998,28(4):363–369.

[10] 李骏,黎锁平,夏亚峰.Lukasiewicz $n$ 值命题逻辑中命题的真度理论.数学学报,2004,47(4):769–780.

[11] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理.北京:科学出版社,2000.

[13] 王国俊.修正的 Kleene 系统中的$\Sigma$-($\alpha$-重言式)理论.中国科学(E 辑),1998,28(2):146–152.

[15] 李骏,王国俊.逻辑系统 $L_n^*$ 中命题的真度理论.中国科学(E 辑),2006,36(6):631–643.

李骏(1972－),男,甘肃白银人,博士生,副教授,主要研究领域为非经典数理逻辑,不确定性推理.

王国俊(1935－),男,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为不确定性推理,非经典数理逻辑.